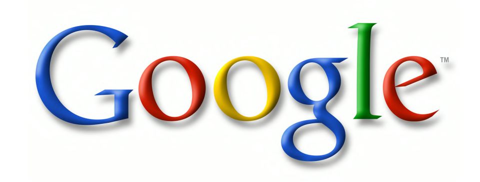
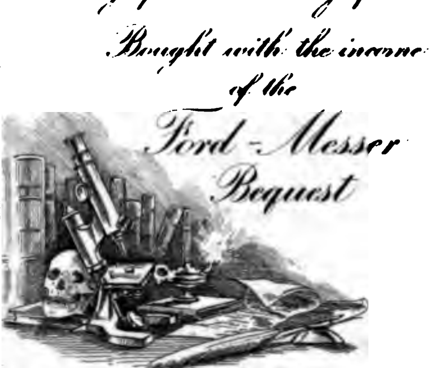



B 1,063,994




Ford-Messer
Bequest
E P FABER

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

BRUXELLES
IMPRIMERIE JOSEPH POLLEUNIS
RUE SANS-SOUCI, 45

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest.

CONST. DE FID. CATH., c. IV.

TRENTE ET UNIÈME ANNÉE, 1906-1907

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(M. J. THIRION)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1907

PREMIÈRE PARTIE

—

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

STATUTS

Article premier. — Il est constitué à Bruxelles une association qui prend le nom de *Société scientifique de Bruxelles*, avec la devise : « *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest* » (*).

Art. 2. — Cette association se propose de favoriser, conformément à l'esprit de sa devise, l'avancement et la diffusion des sciences.

Art. 3. — Elle publiera annuellement le compte rendu de ses réunions, les travaux présentés par ses membres, et des rapports sommaires sur les progrès accomplis dans chaque branche.

Elle tâchera de rendre possible la publication d'une revue destinée à la vulgarisation (**).

Art. 4. — Elle se compose d'un nombre illimité de membres, et fait appel à tous ceux qui reconnaissent l'importance d'une culture scientifique sérieuse pour le bien de la société.

(*) Const. de Fid. cath., c. IV.

(**) Depuis le mois de janvier 1877, cette revue paraît, par livraisons trimestrielles, sous le titre de *Revue des Questions scientifiques*. Elle forme chaque année deux volumes in-8° de 700 pages. Prix de l'abonnement : 20 francs par an pour tous les pays de l'Union postale. Les membres de la *Société scientifique* ont droit à une réduction de 25 pour cent.

Art. 5. — Elle est dirigée par un Conseil de vingt membres renouvelable annuellement par quart à la session de Pâques. Le Conseil choisit dans son sein, le Président, les Vice-Présidents, le Secrétaire, le Trésorier. Toutefois, il peut choisir en dehors du Conseil, le Président ou le premier Vice-Président. Parmi les membres du Bureau, le Secrétaire et le Trésorier sont seuls rééligibles. En cas de décès ou de démission d'un membre du Bureau ou du Conseil, le Conseil peut lui nommer un successeur pour achever son mandat (*).

Art. 6. — Pour être admis dans l'Association, il faut être présenté par deux membres. La demande, signée par ceux-ci, est adressée au Président, qui la soumet au Conseil. L'admission n'est prononcée qu'à la majorité des deux tiers des voix.

L'exclusion d'un membre ne pourra être prononcée que pour des motifs graves et à la majorité des deux tiers des membres du Conseil.

Art. 7. — Les membres qui souscrivent, à une époque quelconque, une ou plusieurs parts du capital social, sont *membres fondateurs*. Ces parts sont de 500 francs. Les *membres ordinaires* versent une cotisation annuelle de 15 francs, qui peut toujours être rachetée par une somme de 150 francs, versée une fois pour toutes.

Le Conseil peut nommer des *membres honoraires* parmi les savants étrangers à la Belgique.

Les noms des membres fondateurs figurent en tête des listes par ordre d'inscription, et ces membres reçoivent autant d'exemplaires des publications annuelles qu'ils ont souscrit de parts du capital social. Les membres ordinaires et les membres honoraires reçoivent un exemplaire de ces publications.

Tous les membres ont le même droit de vote dans les assemblées générales.

Art. 8. — Chaque année il y a trois sessions. La principale se tiendra dans la quinzaine qui suit la fête de Pâques, et pourra

(*) Ancien art. 5. — Elle est dirigée par un Conseil de vingt membres, élus annuellement dans son sein. Le Président, les Vice-Présidents, le Secrétaire et le Trésorier font partie de ce Conseil. Parmi les membres du Bureau le Secrétaire et le Trésorier sont seuls rééligibles (Cf. Annales de la Société scientifique, 1901, t. XXV, 1re partie, p. 235).

durer quatre jours. Le public y sera admis sur la présentation de cartes. On y lit les rapports annuels (*).

Les deux autres sessions se tiendront en octobre et en janvier. Elles pourront durer deux jours, et auront pour objet principal de préparer la session de Pâques.

Art. 9. — Lorsqu'une résolution, prise par l'Assemblée générale, n'aura pas été délibérée en présence du tiers des membres de la Société, le Conseil aura la faculté d'ajourner la décision jusqu'à la prochaine session de Pâques. La décision sera alors définitive, quel que soit le nombre des membres présents.

Art. 10. — La Société ne permettra jamais qu'il se produise dans son sein aucune attaque, même courtoise, à la religion catholique ou à la philosophie spiritualiste et religieuse.

Art. 11. — Dans les sessions, la Société se répartit en cinq sections : I. *Sciences mathématiques.* II. *Sciences physiques.* III. *Sciences naturelles.* IV. *Sciences médicales.* V. *Sciences économiques.*

Tout membre de l'Association choisit chaque année la section à laquelle il désire appartenir. Il a le droit de prendre part aux travaux des autres sections avec voix consultative.

Art. 12. — La session comprend des séances générales et des séances de section.

Art. 13. — Le Conseil représente l'Association. Il a tout pouvoir pour gérer et administrer les affaires sociales. Il place en rentes sur l'État ou en valeurs garanties par l'État les fonds qui constituent le capital social.

Il fait tous les règlements d'ordre intérieur que peut nécessiter l'exécution des statuts, sauf le droit de contrôle de l'Assemblée générale.

Il délibère, sauf les cas prévus à l'article 6, à la majorité des

---

(*) Ancien art. 8. — Chaque année, la Société tient quatre sessions. La principale en octobre pourra durer quatre jours. Le public y sera admis sur la présentation de cartes. On y lit les rapports annuels et l'on y nomme le Bureau et le Conseil pour l'année suivante. Les trois autres sessions, en janvier, avril et juillet, pourront durer trois jours, et auront pour objet principal de préparer la session d'octobre (Cf. Annales, 1878, t. II, 1re partie, p. 169 ; 1901, t. XXV, 1re partie, p. 235).

membres présents. Néanmoins, aucune résolution ne sera valable qu'autant qu'elle aura été délibérée en présence du tiers au moins des membres du Conseil dûment convoqué.

Art. 14. — Tous les actes, reçus et décharges sont signés par le Trésorier et un membre du Conseil, délégué à cet effet.

Art. 15. — Le Conseil dresse annuellement le budget des dépenses de l'Association et présente dans la session de Pâques le compte détaillé des recettes et dépenses de l'exercice écoulé. L'approbation de ces comptes, après examen de l'assemblée, lui donne décharge.

Art. 16. — Les statuts ne pourront être modifiés que sur la proposition du Conseil, à la majorité des deux tiers des membres et dans l'Assemblée générale de la session de Pâques.

Les modifications ne pourront être soumises au vote qu'après avoir été proposées dans une des sessions précédentes. Elles devront figurer à l'ordre du jour dans les convocations adressées à tous les membres de la Société.

Art. 17. — La devise et l'article 10 ne pourront jamais être modifiés.

En cas de dissolution, l'Assemblée générale, convoquée extraordinairement, statuera sur la destination des biens appartenant à l'Association. Cette destination devra être conforme au but indiqué dans l'article 2.

RÈGLEMENT

ARRÊTÉ PAR LE CONSEIL POUR L'ENCOURAGEMENT DES RECHERCHES SCIENTIFIQUES

---

1. — Le Conseil de la *Société scientifique de Bruxelles* a résolu d'instituer des concours et d'accorder des subsides pour encourager les recherches scientifiques.

2. — Le Conseil peut, sur la proposition de la section compétente, accorder des encouragements pécuniaires ou des médailles aux auteurs des meilleurs travaux présentés par les membres de cette section. L'ensemble de ces récompenses ne peut dépasser annuellement mille francs.

3. — Chaque année, l'une des sections désignera une question à mettre au concours. L'ordre dans lequel les sections feront cette désignation sera déterminé par le sort. Toute question, pour être posée, devra être approuvée par le Conseil qui donnera aux questions la publicité convenable.

4. — Les questions auxquelles il n'aura pas été répondu d'une manière satisfaisante resteront au concours. Le Conseil pourra cependant inviter les sections compétentes à les remplacer par d'autres.

5. — Aucun prix ne pourra être inférieur à 500 francs. Une médaille sera en outre remise à l'auteur du mémoire couronné.

6. — Ces concours ne seront ouverts qu'aux membres de la Société.

7. — Ne sont admis que les ouvrages et les planches manuscrits.

8. — Le choix de la langue dans laquelle seront rédigés les mémoires est libre. Ils seront, s'il y a lieu, traduits aux frais de la Société ; la publication n'aura lieu qu'en français.

9. — Les auteurs ne mettront pas leur nom à ces mémoires, mais seulement une devise qu'ils répéteront dans un billet cacheté renfermant leur nom et leur adresse.

10. — Les jurys des concours seront composés de trois membres présentés par la section compétente et nommés par le Conseil.

11. — Les prix sont décernés par le Conseil sur le rapport des jurys.

12. — Toute décision du Conseil ou des sections relative aux prix sera prise au scrutin secret et à la majorité absolue des suffrages.

13. — La Société n'a l'obligation de publier aucun travail couronné ; les manuscrits de tous les travaux présentés au concours restent la propriété de la Société. En cas de publication, cent exemplaires seront remis gratuitement aux auteurs.

14. — Les résultats des concours seront proclamés et les médailles remises dans l'une des assemblées générales de la session de Pâques. Les rapports des jurys devront être remis au Conseil six semaines avant cette session. Le 1er octobre de l'année qui suit celle où a été proposée la question, est la date de rigueur pour l'envoi des mémoires au secrétariat.

15. — Pour être admis à demander un subside, il faut être membre de la Société depuis un an au moins.

16. — Le membre qui demandera un subside devra faire connaître par écrit le but précis de ses travaux, au moins d'une manière générale ; il sera tenu, dans les six mois de l'allocation du subside, de présenter au Conseil un rapport écrit sur les résultats de ses recherches, quel qu'en ait été le succès.

17. — Le Conseil, après avoir pris connaissance des diverses demandes de subsides, à l'effet d'en apprécier l'importance relative, statuera au scrutin secret.

18. — Les résultats des recherches favorisées par les subsides de la Société devront lui être présentés, pour être publiés dans ses ANNALES s'il y a lieu.

LETTRES

DE

S. S. LE PAPE LÉON XIII

AU PRÉSIDENT ET AUX MEMBRES
DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

I

Dilectis Filiis Praesidi ac Membris Societatis scientificae Bruxellis constitutae

LEO PP. XIII

DILECTI FILII, SALUTEM ET APOSTOLICAM BENEDICTIONEM

Gratae Nobis advenerunt litterae vestrae una cum Annalibus et Quaestionibus a vobis editis, quas in obsequentissimum erga Nos et Apostolicam Sedem pietatis testimonium obtulistis. Libenter sane agnovimus Societatem vestram quae a scientiis sibi nomen fecit, et quae tribus tantum abhinc annis laetis auspiciis ac Iesu Christi Vicarii benedictione Bruxellis constituta est, magnum iam incrementum cepisse, et uberes fructus polliceri. Profecto cum infensissimi relligionis ac veritatis hostes nunquam desistant, imo magis magisque studeant dissidium rationem inter ac fidem propugnare, opportunum est ut praestantes scientia ac pietate viri ubique exurgant, qui Ecclesiae doctrinis ac documentis ex animo obsequentes, in id contendant, ut demonstrent *nullam unquam inter fidem et rationem veram dissensionem esse posse* ; quemadmodum Sacrosancta Vaticana Synodus, constantem Ecclesiae et Sanctorum Patrum doctrinam affirmans, declaravit Constitutione IVª de fide catholica. Quapropter gratulamur quod Societas vestra hunc primo

finem sibi proposuerit, itemque in statutis legem dederit, ne quid a sociis contra sanam christianae philosophiae doctrinam committatur; simulque omnes hortamur ut nunquam de egregio eiusmodi laudis tramite deflectant, atque ut toto animi nisu praestitum Societatis finem praeclaris exemplis ac scriptis editis continuo assequi adnitantur. Deum autem Optimum Maximum precamur, ut vos omnes caelestibus praesidiis confirmet ac muniat; quorum auspicem et Nostrae in vos benevolentiae pignus, Apostolicam benedictionem vobis, dilecti filii, et Societati vestrae ex animo impertimur.

Datum Romae, apud S. Petrum, die 15 Ianuarii 1879, Pontificatus Nostri Anno Primo.

LEO PP. XIII.

A nos chers Fils le Président et les Membres de la Société scientifique de Bruxelles

LÉON XIII, PAPE

CHERS FILS, SALUT ET BÉNÉDICTION APOSTOLIQUE

Votre lettre Nous a été agréable, ainsi que les Annales et les Questions publiées par vous et offertes en témoignage de votre piété respectueuse envers Nous et le Siége Apostolique. Nous avons vu réellement avec plaisir que votre Société, qui a adopté le nom de Société scientifique, et s'est constituée à Bruxelles, depuis trois ans seulement, sous d'heureux auspices avec la bénédiction du Vicaire de Jésus-Christ, a déjà pris un grand développement et promet des fruits abondants. Certes, puisque les ennemis acharnés de la religion et de la vérité ne se lassent point et s'obstinent même de plus en plus à proclamer l'opposition entre la raison et la foi, il est opportun que partout surgissent des hommes distingués par la science et la piété, qui, attachés de cœur aux doctrines et aux enseignements de l'Église, s'appliquent à démontrer qu'*il ne peut jamais exister de désaccord réel entre la foi et la raison*, comme l'a déclaré dans la Constitution IV *de fide catholica*, le Saint Concile du Vatican affirmant la doctrine constante de l'Église et des Saints Pères. C'est pourquoi

Nous félicitons votre Société de ce qu'elle s'est d'abord proposé cette fin, et aussi de ce qu'elle a mis dans ses statuts un article défendant à ses membres toute attaque aux saines doctrines de la philosophie chrétienne ; et en même temps Nous les exhortons tous à ne jamais s'écarter de la voie excellente qui leur vaut un tel éloge, et à poursuivre continuellement, de tout l'effort de leur esprit, l'objet assigné à la Société, par d'éclatants exemples et par leurs publications. Nous prions Dieu très bon et très grand, qu'Il vous soutienne tous et vous fortifie du céleste secours : en présage duquel, et comme gage de Notre bienveillance envers vous, Nous accordons du fond du cœur à vous, chers fils, et à votre Société la bénédiction Apostolique.

Donné à Rome, à Saint-Pierre, le 15 Janvier 1879, l'An Un de Notre Pontificat.

LÉON XIII, PAPE.

II

Dilectis Filiis, Sodalibus Consociationis Bruxellensis a scientiis provehendis Bruxellas

LEO PP. XIII

DILECTI FILII, SALUTEM ET APOSTOLICAM BENEDICTIONEM

Quod, pontificatu Nostro ineunte, de Sodalitate vestra fuimus ominati, id elapso iam ab institutione eius anno quinto et vicesimo, feliciter impletum vestris ex litteris perspicimus. In provehendis enim scientiarum studiis, sive eruditorum coetus habendo, sive Annalium volumina edendo, nunquam a proposito descivistis, quod coeptum fuerat ab initio, ostendendi videlicet *nullam inter fidem et rationem dissensionem veram esse posse*. Benevolentiam Nostram ob vestras industrias testamur ; simulque hortamur, ut coeptis insistatis alacres, utpote temporum necessitati opportunis admodum. Naturæ enim cognitio, si recto quidem et vacuo praeiudiciis animo perquiratur, ad divinarum rerum notitiam conferat necesse est, divinaeque revelationi fidem adstruat. Hoc ut vobis,

vestraque opera, quam multis accidat, Apostolicam benedictionem, munerum coelestium auspicem, Sodalitati vestrae amantissime impertimus.

Datum Romae apud S. Petrum die 20 Martii Anno 1901, Pontificatus Nostri Vicesimo Quarto.

LEO PP. XIII.

A nos chers Fils, les Membres de la Société scientifique de Bruxelles, à Bruxelles

LÉON XIII, PAPE

CHERS FILS, SALUT ET BÉNÉDICTION APOSTOLIQUE

Ce qu'au début de Notre pontificat, Nous avions présagé de votre Société, aujourd'hui, vingt-cinq ans après sa fondation, vos lettres Nous en apprennent l'heureux accomplissement. En travaillant au progrès des études scientifiques, soit par vos réunions savantes, soit par la publication de vos Annales, vous ne vous êtes jamais départis de votre dessein initial, celui de montrer que *entre la foi et la raison, aucun vrai désaccord ne peut exister*. Nous vous exprimons Notre bienveillance pour vos efforts et Nous vous exhortons en même temps à poursuivre avec ardeur votre entreprise si bien en rapport avec les nécessités actuelles. Car l'étude de l'univers, si elle est menée avec droiture et sans préjugé, doit aider à la connaissance des choses de Dieu, et établir la foi à la révélation divine. Pour que ce bonheur vous advienne et par vous à beaucoup d'autres, Nous accordons avec la plus vive sympathie à votre Société, la bénédiction Apostolique, gage des faveurs célestes.

Donné à Rome, à Saint-Pierre, le 20 Mars 1901, l'An Vingt-quatrième de Notre Pontificat.

LÉON XIII, PAPE.

LETTRE

DE

S. É. LE CARD. R. MERRY DEL VAL

Secrétaire d'État de

S. S. LE PAPE PIE X

AU PRÉSIDENT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES
EN RÉPONSE A L'ADRESSE AU SAINT-PÈRE

ILLMO SIGNORE

Trasmesso da Mons. Nunzio di Bruxelles, è pervenuto al Santo Padre il nobile indirizzo della Società scientifica, di cui la S.V. Illma è degno Presidente. Per incarico quindi dell' Augusto Pontefice mi è grato significarle che Sua Santità si è vivamente compiaciuta dell' omaggio reso alla Sua Venerata Persona da cotesto illustre sodalizio, il quale stimò suo precipuo dovere di umiliare ossequio ed osservanza al Vicario di Cristo fin dalla prima assemblea tenuta sotto il novello Pontificato. La Santità Sua, bene apprezzando siffato officio, e rilevando d'altra parte con alta soddisfazione il rettissimo ed onorevole programma della sullodata Società, la cui divisa è ispirata ai principii sanciti anche nel Concilio Vaticano, ha tributato assai volontieri un particolare encomio a Lei ed a tutti i socii, e mentre ha espressi i più caldi ringraziamenti per un atto così cortese, non ha indugiato a dichiarare che integra ed anzi di gran lungua accresciuta perdura nell' animo Suo la benevolenza, onde il detto Sodalizio fu onorato da Pio IX e da Leone XIII, di sa : me : Il Santo Padre confida inoltre, che i singoli socii, del cui sapere ama nutrire la stima più lusinghiera, si studieranno incessantemente di meritare sempre meglio della Religione e delle scienze, e mentre ha invocati su di loro gli aiuti celesti, li ha di gran cuore benedetti.

Colgo poi con piacere l'opportunità per dichiararmi con sensi di distinta stima,

Di V. S. Illma

Affmo per servirla
R. Card. MERRY DEL VAL

Roma, 5 maggio 1904.

Illustrissime Seigneur

La noble adresse de la Société scientifique, dont Votre Seigneurie illustrissime est le digne Président, est parvenue au Saint-Père par l'entremise de Mgr le Nonce de Bruxelles. Il m'est agréable de vous faire savoir, au nom de l'Auguste Pontife, que Sa Sainteté a reçu avec grande joie l'hommage rendu à Sa Personne Vénérée par cette illustre association qui s'est fait un impérieux devoir de témoigner son humble et respectueuse soumission au Vicaire du Christ dès sa première assemblée tenue sous le nouveau Pontificat. Sa Sainteté appréciant justement cet hommage et considérant d'autre part avec une vive satisfaction le programme, si sage et si honorable, de votre Société, dont la devise s'inspire des principes mêmes sanctionnés par le Concile du Vatican, vous a très volontiers accordé, à vous et à tous les membres, un éloge spécial; et en même temps qu'Elle exprimait ses remerciements les plus chaleureux pour votre aimable attention, Elle n'a pas hésité à déclarer que la bienveillance dont Votre Société a été honorée par Pie IX et Léon XIII, de sainte mémoire, demeure entière et qu'elle s'est même de beaucoup accrue dans son cœur. Le Saint-Père a l'espoir fondé que tous les membres, pour le savoir desquels Il aime à nourrir l'estime la plus flatteuse, s'efforceront sans trève de mériter toujours davantage de la Religion et des sciences, et tandis qu'Il invoquait pour eux les secours célestes, Il les a bénis de grand cœur.

Je saisis avec plaisir cette occasion de me déclarer, avec des sentiments de considération distinguée,

De Votre Seigneurie illustrissime

le très affectionné serviteur
R. Card. Merry del Val.

Rome, le 5 mai 1904.

LISTES

DES

MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

ANNÉE 1907

—

Liste des membres fondateurs

—

S. É. le cardinal DECHAMPS (¹), archevêque de	Malines.
François DE CANNART D'HAMALE (¹). . . .	Malines.
Charles DESSAIN.	Malines.
Jules VAN HAVRE (¹)	Anvers.
Le chanoine MAES (¹)	Bruges.
Le chanoine DE LEYN (¹)	Bruges.
LEIRENS-ELIAERT	Alost.
Frank GILLIS (¹).	Bruxelles.
Joseph SAEY	Bruxelles.
Le Chᵉʳ DE SCHOUTHEETE DE TERVARENT . .	Saint-Nicolas.
Le Collège SAINT-MICHEL.	Bruxelles.
Le Collège NOTRE-DAME DE LA PAIX. . . .	Namur.
Le Duc D'URSEL, sénateur (¹)	Bruxelles.
Le Pᶜᵉ Gustave DE CROY (¹)	Le Rœulx (Hainaut).
Le Cᵗᵉ DE T'SERCLAES (¹)	Gand.
Auguste DUMONT DE CHASSART (¹)	Mellet (Hainaut).
Charles HERMITE, membre de l'Institut (¹) .	Paris.
L'École libre de l'IMMACULÉE-CONCEPTION. .	Vaugirard-Paris.
L'École libre SAINTE-GENEVIÈVE.	Paris.
Le Collège SAINT-SERVAIS.	Liége.
Le Cᵗᵉ DE BERGEYCK.	Beveren-Waes.
L'Institut SAINT-IGNACE	Anvers.
Philippe GILBERT (¹), correspondᵗ de l'Institut	Louvain.

(¹) Décédé.

Le R. P. Provincial de la Compagnie de Jésus en Belgique	Bruxelles.
Le Collège Saint-Jean Berchmans	Louvain.
Le Collège Saint-Joseph	Alost.
Le chanoine de Wouters (1)	Braine-le-Comte.
Antoine d'Abbadie (1), membre de l'Institut	Paris.
S. É. le cardinal Haynald (1), archevêque de Kalocsa et Bâcs	Kalocsa (Hongrie).
S. É. le cardinal Séraphin Vannutelli	Rome.
S. G. Mgr Du Roussaux (1), évêque de	Tournai.
S. É. le cardinal Goossens (1), archevêque de	Malines.
R. Bedel	Marseille.
S. G. Mgr Belin (1), évêque de	Namur.
Eugène Pecher	Bruxelles.
S. É. le cardinal Ferrata	Rome.
S. É. le cardinal Nava di Bontife	Catane.
S. Exc. Mgr Rinaldini, nonce apostolique.	Madrid.
S. Exc. Mgr Gratino di Belmonte, nonce apostolique	Vienne.
Éd. Goedseels	Uccle.

Liste des membres honoraires

S. A. R. Charles-Théodore, duc en Bavière	Possenhofen.
Antoine d'Abbadie (1), membre de l'Institut	Paris.
Amagat, membre de l'Institut	Paris.
Mgr Baunard, recteur de l'Université catholiq.	Lille.
Joachim Barrande (1)	Prague.
Barrois, membre de l'Institut	Lille.
A. Béchamp	Paris.
Aug. Béchaux, correspondant de l'Institut	Paris.
Le Prince Boncompagni (1) de l'Académie des Nuovi Lincei	Rome.
Boussinesq, membre de l'Institut	Paris.

(1) Décédé.

L. de Bussy [1], membre de l'Institut	Paris.
Desplats	Lille.
P. Duhem, correspondant de l'Institut	Bordeaux.
J.-H. Fabre	Sérignan.
Le docteur Foerster [1]	Aix-la-Chapelle.
J. Gosselet, correspondant de l'Institut	Lille.
C. Grand' Eury, correspondant de l'Institut	Saint-Étienne.
Haton de la Goupillière, membre de l'Institut	Paris.
P. Hautefeuille [1], membre de l'Institut	Paris.
Dr Heis [1]	Münster.
Charles Hermite [1], membre de l'Institut	Paris.
G. Humbert, membre de l'Institut	Paris.
Le vice-amiral de Jonquières [1], membre de l'Institut	Paris.
Camile Jordan, membre de l'Institut	Paris.
A. de Lapparent, membre de l'Institut	Paris.
G. Lemoine, membre de l'Institut	Paris.
F. Le Play [1]	Paris.
Dr W. Lossen [1]	Heidelberg.
Le général J. Newton	New-York.
D.-P. Œhlert, correspondant de l'Institut	Laval.
Louis Pasteur [1], membre de l'Institut	Paris.
R. P. Perry, S. J. [1], de la Société Royale de Londres	Stonyhurst.
É. Picard, membre de l'Institut	Paris.
Victor Puiseux [1], membre de l'Institut	Paris.
A. Barré de Saint-Venant [1], membre de l'Institut	Paris.
Paul Sabatier, correspondant de l'Institut	Toulouse.
R. P. A. Secchi, S. J. [1], de l'Académie des Nuovi Lincei	Rome.
Paul Tannery [1]	Pantin.
R. P. Wasmann, S. J.	Luxembourg.
Aimé Witz	Lille.
Wolf, membre de l'Institut	Paris.
R. Zeiller, membre de l'Institut	Paris.

(1) Décédé.

Liste générale des membres de la Société scientifique de Bruxelles (1907)

Abaurrea (Luis), Molviedro, 6. — Séville (Espagne).
Adan de Yarza (Ramon), ingénieur des mines, 7, 1°, calle de Moreto. — Madrid.
d'Adhémar (Vte Robert), professeur suppléant aux Facultés catholiques, 14, place de Genevières. — Lille (Nord — France).
Alexis-M. Gochet (Frère), rue de Bruxelles. — Namur.
Allard (François), industriel. — Châtelineau (prov. de Hainaut).
Amagat, membre de l'Institut, examinateur d'admission à l'École polytechnique, 19, avenue d'Orléans. — Paris.
André (J.-B.), inspecteur général au Ministère de l'Agriculture, 127, avenue Brugmann. — Bruxelles.
d'Annoux (Cte H.), 74, boulevard Alexandre Martin. — Orléans (Loiret — France).
Arduin (abbé Alexis), à N.-D. d'Aiguebelle, par Grignan (Drôme — France).
Ariès (lieutenant-colonel), 9, boulevard du Roi. — Versailles (Seine-et-Oise — France).
Attout-Van Cutsem, rue de Fer. — Namur.
Baclé (L.), ingénieur, ancien élève de l'École polytechnique, 57, rue de Châteaudun. — Paris.
Baivy (Dr Zénon), place Saint-Aubain. — Namur.
Balbas (Thomas), ingénieur des mines.— San-Sébastian (Espagne).
Baltus (chan.), 17, rue Simonis. — Bruxelles.
Barbé (Maurice), ingénieur des Arts et Manufactures, 19, rue des Saints-Pères. — Paris.
Barrois, membre de l'Institut, 41, rue Pascal. — Lille (Nord — France).
Baunard (Mgr), recteur de l'Université catholique, 60, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).
Bayet (Adrien), 33, Nouveau Marché-aux-Grains. — Bruxelles.

BEAUJEAN (Charles), 208, avenue de la Couronne. — Ixelles (Bruxelles).
BEAUVOIS (Eug.), à Corberon (Côte-d'Or — France).
BÉCHAMP (A.), 15, rue Vauquelin. — Paris.
BÉCHAUX (Aug.), correspondant de l'Institut, 56, rue d'Assas. — Paris.
BEDEL (abbé René), 125, boulevard National. — Marseille (Bouches-du-Rhône — France).
BEERNAERT (Auguste), Ministre d'État, membre de l'Académie royale de Belgique et associé de l'Institut de France, 11, rue d'Arlon. — Bruxelles.
BELPAIRE (Frédéric), ingénieur, 48, avenue du Margrave. — Anvers.
DE BERGEYCK (Cte), château de Beveren-Waes (Flandre orientale).
BERLEUR (Adolphe), ingénieur, 17, rue Saint-Laurent. — Liége.
BERLINGIN (Melchior), directeur des laminoirs de la Vieille-Montagne. — Penchot, par Viviers (Aveyron — France).
BERTRAND (Léon), 9, rue Crespel. — Bruxelles.
BÉTHUNE (Mgr Félix), 40, rue d'Argent. — Bruges.
BÉTHUNE (Bon Gaston), sous-lieutenant au 5e régiment d'artillerie, 27, rue Belliard. — Bruxelles.
BIBOT (D^r^), place Léopold. — Namur.
DE BIEN (Fernand), 150, rue du Trône. — Bruxelles.
BIVORT (Ild.), industriel, 92, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.
BLEUSET, S. J. (R. P. J.), 53, Tongersche straat. — Maestricht (Hollande).
BLONDEL (Alfred), ingénieur, 1, place du Parc. — Tournai.
BLONDEL (G.), 31, rue de Bellechasse. — Paris.
DE LA BOËSSIÈRE-THIENNES (Mis), 19, rue aux Laines. — Bruxelles; ou, château de Lombise, par Lens (prov. de Hainaut).
BOLSIUS, S. J. (R. P. Henri), A, 18, Kerkstraat. — Oudenbosch (Pays-Bas).
BORGINON (Dr Paul), 58, rue Dupont. — Bruxelles.
BOSMANS, S. J. (R. P. H.), professeur de mathématiques, Collège Saint-Michel, 775, boulevard Militaire. — Bruxelles.
BOSQUET (Fritz), propriétaire, administrateur de charbonnages. — Rhisnes (prov. de Namur).
BOUILLOT (C.), directeur de l'École d'horticulture et d'agriculture de l'État. — Vilvorde.

BOURGEAT (chan.), professeur aux Facultés catholiques, 15, rue Charles de Muyssart. — Lille (Nord — France).

BOUSSINESQ, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des sciences de l'Université, 22, rue Berthollet. — Paris.

DU BOYS (Paul), ingénieur en chef des ponts et chaussées. — La Combe de Lancey, par Villard-Bonnot (Isère — France).

VAN DEN BRANDEN DE REETH (S. Gr. Mgr), archevêque de Tyr, 82, rue du Bruel. — Malines.

BRANLY (Édouard), professeur à l'Institut catholique, 21, avenue de Tourville. — Paris.

BREITHOF (F.), 141, rue de la Station. — Louvain.

DE BRIEY (C[te] Renaud), place de l'Industrie. — Bruxelles.

BRIFAUT (Valentin), avocat, 131, rue de Stassart. — Bruxelles.

DE BROUWER (Michel), ingénieur, 14, rue d'Elverdingen. — Ypres.

VAN DER BRUGGEN (B[on] Maurice), Ministre de l'Agriculture. — Bruxelles.

BRUYLANTS (G.), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine, 32, rue des Récollets. — Louvain.

BULLIOT (J.), professeur à l'Institut catholique, 6, rue du Regard. — Paris.

CABEAU (abbé Charles), professeur au Collège Saint-Joseph. — Virton.

CAMBOUÉ, S. J. (R. P. Paul), missionnaire apostolique. — Tananarive (Madagascar).

CAPART (Jean), 17, avenue de la Station. — Auderghem (Brabant).

CAPELLE (abbé Éd.), 79, avenue de Breteuil. — Paris (XV[e]).

CAPPELLEN (Guillaume), commissaire d'arrondissement, 4, place Marguerite. — Louvain.

CARATHEODORY (Costa), 48, rue de la Vallée. — Bruxelles.

CARLIER (Joseph), ingénieur, 16, rue Destouvelles. — Bruxelles.

CARRARA, S. J. (R. P. B.), professeur de mathématiques supérieures à l'Université Grégorienne, 120, via del Seminario. — Rome.

CARTUYVELS (Jules), inspecteur général au Ministère de l'Agriculture, 215, rue de la Loi. — Bruxelles.

CASARÈS (Firmino), farmacia, 93, calle San Andrès. — La Coruña (Espagne).

CASTELEIN (R. P.), Collège N.-D. de la Paix, 45, rue de Bruxelles.— Namur.
S. A. R. CHARLES-THÉODORE, duc en Bavière. — Possenhofen (Allemagne).
CIRERA Y SALSE (Dr Luis), profesor libre de electroterapia, 19, prâl, calle Fontanella. — Barcelone (Espagne).
CIRERA, S. J. (R. P. Richard), Observatoire de l'Èbre. — Tortosa (Espagne).
CLAERHOUT (abbé J.), directeur des Écoles catholiques de Pitthem (Flandre occidentale).
CLOQUET (L.), professeur à l'Université, 2, rue Saint-Pierre. — Gand.
COFFEY (Denis, J.), docteur en médecine, F. R. U. I., professeur de physiologie à l'École de médecine de l'Université catholique, Medical School, Cecilia Street. — Dublin (Irlande).
COGELS (J.-B. Henri), 181, avenue des Arts. — Anvers.
COLEGIO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE DEUSTO (R. P. J. Man. Obeso, S. J.). — Bilbao (Espagne).
COLLANGETTES, S. J. (R. P.), professeur de physique à l'Université Saint-Joseph. — Beyrouth (Syrie).
COLLÈGE NOTRE-DAME DE LA PAIX, 45, rue de Bruxelles. — Namur.
COLLÈGE SAINT-FRANÇOIS-XAVIER, 10 and 11, Park Street.— Calcutta (Indes anglaises, via Brindisi).
COLLÈGE SAINT-JEAN BERCHMANS, 11, rue des Récollets.— Louvain.
COLLÈGE SAINT-JOSEPH, 13, rue de Bruxelles. — Alost.
COLLÈGE SAINT-MICHEL (R. P. H. Bosmans, S. J.), 775, boulevard Militaire. — Bruxelles.
COLLÈGE SAINT-SERVAIS, 92, rue Saint-Gilles. — Liége.
CONVENT (Alf.), docteur en médecine. — Woluwe-Saint-Lambert (Brabant).
CONWAY (Arthur, W.) M. A., F. R. U. I., professeur de physique au Collège de l'Université catholique, Cosy Hook, 100, Leinster Road. — Rathmines (Dublin-Irlande).
COOMANS (Léon), pharmacien, 5, rue des Brigittines. — Bruxelles.
COOMANS (Victor), chimiste, 5, rue des Brigittines. — Bruxelles.
COOREMAN (Gérard), 1, place du Marais. — Gand.
COPPIETERS DE STOCKHOVE (abbé Ch.), directeur des Dames de l'Instruction chrétienne. — Bruges.

CORDIER (Edmond), docteur en médecine, 95, rue de la Croix de Fer. — Bruxelles.
COSTANZO (R. P. Jean), barnabite, membre de l'Académie des Nuovi Lincei, Collège Saint-Louis. — Bologne (Italie).
COULON (H.) docteur en médecine, 9, rue des Chanoines. — Cambrai.
COUSIN (L.), ingénieur, 10, rue Simonis. — Bruxelles.
COUSOT (Dr Georges), membre de la Chambre des Représentants. — Dinant.
CRAME (Auguste), capitaine commandant d'artillerie, adjoint d'État-Major, 44, quai des Moines. — Gand.
CRANINCX (Bon Oscar), 51, rue de la Loi. — Bruxelles.
CUYLITS (Jean), docteur en médecine, 44, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.
DANIELS (Dr Fr.), professeur à l'Université catholique de Fribourg (Suisse).
DARDEL (Jean), médecin consultant aux eaux d'Aix et de Marlioz, 10, rue d'Édimbourg. — Paris; ou, Aix-les-Bains (Savoie).
DAUBRESSE (Paul), ingénieur, professeur à l'Université, 46, rue Vital Decoster. — Louvain.
DAVID (P.), docteur en droit et en sciences politiques. — Stavelot.
DE BAETS (Herman), 11, rue des Boutiques. — Gand.
DEBAISIEUX (T.), professeur à l'Université, 14, rue Léopold. — Louvain.
DE BECKER (chan. Jules), professeur à l'Université, 112, rue de Namur. — Louvain.
DE BLOO (Julien), ingénieur, 91, boulevard Frère-Orban. — Gand.
DE BROUWER (chan.), curé-doyen. — Ypres.
DE BUCK (Dr D.), médecin en chef de l'asile d'aliénés. — Froidmont (Tournai).
DECHEVRENS, S. J. (R. P. Marc), directeur de l'Observatoire du Collège Saint-Louis. — Saint-Hélier (Jersey — Iles-de-la-Manche — Angleterre).
DE COSTER (Charles), ingénieur civil des mines, 23, rue Coenraets. — Saint-Gilles (Bruxelles).
DEGIVE (A.), membre de l'Académie royale de médecine, directeur de l'École vétérinaire de l'État, boulevard d'Anderlecht. — Cureghem (Bruxelles).

DE GREEF (Jules), conseiller au Conseil des Mines, 26, rue Breydel. — Bruxelles (Q.-L.).
DE GREEFF, S. J. (R. P. Henri), professeur à la Faculté des Sciences, Collège Notre-Dame de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.
DE JAER (Camille), avocat, 56, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.
DEJAER (Jules), directeur général des mines, 75, avenue de Longchamps. — Uccle (Bruxelles).
DELAIRE (A.), secrétaire général de la Société d'économie sociale, 238, boulevard Saint-Germain. — Paris.
DE LANTSHEERE (Dr J.), oculiste, 215, rue Royale. — Bruxelles.
DE LANTSHEERE (Léon), professeur à l'Université de Louvain, membre de la Chambre des Représentants, 83, rue du Commerce. — Bruxelles.
DELATTRE, S. J. (R. P. A.-J.), ancienne abbaye. — Tronchiennes.
DELAUNOIS (Dr G.), à Bon-Secours, par Péruwelz (prov. de Hainaut).
DELCROIX (Dr A.), 18, chaussée de Louvain. — Bruxelles.
DELEMER (Jules), professeur à la Faculté libre des Sciences, 24, rue Voltaire. — Lille (Nord — France).
DELÉTREZ (Dr A.), 7, rue de la Charité. — Bruxelles.
DELEU (L.), ingénieur aux chemins de fer de l'État, 84, avenue de l'Hippodrome. — Ixelles (Bruxelles).
DELMER (Alexandre), ingénieur au Corps des mines, 14, place de la Reine. — Schaerbeek (Bruxelles).
DELVIGNE (chan. Adolphe), curé de Saint-Josse-ten-Noode, 18, rue de la Pacification. — Saint-Josse-ten-Noode (Bruxelles).
DELVOSAL (Jules), docteur en sciences physiques et mathématiques, astronome-adjoint à l'Observatoire royal de Belgique, 84, rue Rouge. — Uccle (Bruxelles).
DEMANET (chan. S.), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Université, 23, rue de Bériot. — Louvain.
DE MOOR (Dr), médecin en chef de l'Hospice Guislain, 57, rue des Tilleuls. — Gand.
DE MUNNYNCK, O. P. (R. P.), professeur à l'Université Albertinum. — Fribourg (Suisse).
DE MUYNCK (chan. R.), professeur à l'Université, 9, place Saint-Jacques. — Louvain.

DENOËL, ingénieur au Corps des mines, 86, avenue de Longchamps. — Uccle (Bruxelles).
DENYS (Dr J.), professeur à l'Université, Institut bactériologique, 96, rue Vital Decoster. — Louvain.
DE PRETER (Herman), ingénieur, 59, rue du Marais. — Bruxelles.
DEROITTE (Dr Victor), médecin de la colonie de Gheel, chef de laboratoire. — Gheel.
DESCHAMPS, S. J. (R. P. Alfred), professeur à la Faculté des Sciences, Collège Notre-Dame de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.
DE SMEDT, S. J. (R. P. Charles), président de la Société des Bollandistes, correspondant de l'Institut de France, Collège Saint-Michel, 775, boulevard Militaire. — Bruxelles.
DESPLATS (Dr), professeur aux Facultés catholiques, 56, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).
DESSAIN (Charles), libraire-éditeur, rue de la Blanchisserie. — Malines.
DE VADDER (Victor), avocat à la Cour d'appel, 16, rue Blanche. — Ixelles (Bruxelles).
DE VEER, S. J. (R. P.), directeur der Vereenigingen G. en W., 70, Wijnhaven. — Rotterdam (Pays-Bas).
DE VUYST (P.), inspecteur de l'Agriculture, 22, avenue des Germains. — Bruxelles.
DE WALQUE (François), professeur à l'Université, 26, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.
DE WILDEMAN (É.), conservateur au Jardin Botanique de l'État, 122, rue des Confédérés. — Bruxelles (N.-E.).
DIERCKX, S. J. (R. P. Fr.), professeur à la Faculté des Sciences, Collège Notre-Dame de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.
DE DORLODOT (chan. H.), docteur en théologie, professeur à l'Université, 44, rue de Bériot. — Louvain.
DE DORLODOT (Sylvain), château de Floriffoux. — Floreffe (prov. de Namur).
DRION (Bon Adolphe), avocat. — Gosselies.
DUBOIS (Ernest), directeur de l'Institut supérieur de commerce, 36, rue de Vrière. — Anvers.
DUFRANE (Dr C.), chirurgien à l'hôpital, 36, rue d'Havré. — Mons.

DUHEM (Pierre), correspondant de l'Institut, associé de l'Académie royale de Belgique, professeur de physique à la Faculté des Sciences, 18, rue de la Teste. — Bordeaux (Gironde — France).
DUMAS-PRIMBAULT (Henri), ingénieur, château de la Pierre. — Cérilly (Allier — France).
DUMEZ (abbé Robert), docteur en sciences naturelles, professeur au Petit Séminaire. — Roulers (Fl. occid.).
DUMONT (André), professeur à l'Université, 18, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.
DUMORTIER, conseiller à la Cour d'appel, 7, place Van Artevelde. — Gand.
DUPONT (Dr Émile), médecin de bataillon, chef des laboratoires de bactériologie et de radiographie à l'Hôpital militaire, 12, rue Goffart. — Bruxelles.
DUPRIEZ, professeur à l'Université, 120, rue de la Station. — Louvain.
DUQUENNE (Dr Louis), 11, rue Lonhienne. — Liége.
DUSAUSOY (Clément), professeur à l'Université, 107, chaussée de Courtrai. — Gand.
DUSMET Y ALONSO (José Maria), docteur en sciences naturelles, 7, plaza de Santa-Cruz. — Madrid.
DUTILLEUX (Maurice), ingénieur, 4, place François-Bossuet. — Bruxelles.
DUTORDOIR (Hector), ingénieur en chef, directeur du service technique provincial, 339, boulevard du Château. — Gand.
ÉCOLE LIBRE DE L'IMMACULÉE-CONCEPTION. — Vaugirard-Paris.
ÉCOLE LIBRE SAINTE-GENEVIÈVE, rue des Postes. — Paris.
EECKHOUT (G.), avocat à la Cour d'appel, 143, chaussée de Courtrai. — Gand.
EGAN, S. J. (R. P. Michel), M. A., F. R. U. I., Milltown Park. — Dublin (Irlande).
FABRE (J.-H.), naturaliste. — Sérignan, par Vaucluse (Vaucluse — France).
FABRY (Louis), docteur ès sciences, astronome à l'Observatoire, 2, place de la Corderie. — Marseille (Bouches-du-Rhône — France).
FAGNART (Émile), docteur en sciences physiques et mathématiques,

professeur à l'Université de Gand, 9, place des Gueux. — Bruxelles (N.-E.).

FAIDHERBE (Dr Alexandre), 28, rue de l'Hospice.— Roubaix (Nord — France).

FARINA (Paul) docteur en médecine. — Menton (Alpes maritimes); ou, Brides et Salins-Moutiers (Savoie — France).

FAUVEL (A.-A.), inspecteur des Services des Messageries maritimes, 31B, rue Jouvenet. — Paris (XVIe).

DE FAVEREAU DE JENNERET (Bon), Ministre des Affaires étrangères.— Bruxelles.

FENAUX (Édouard), directeur de la Prison centrale. — Louvain.

FERNANDÈS (Dr Rob.), 13, avenue Galilée. — Saint-Josse-ten-Noode (Bruxelles).

FERRATA (S. É. le cardinal). — Rome.

FITA Y COLOMÉ, S. J. (R. P. Fidel), 12, calle de Isabel la Católica.— Madrid.

DE FOOZ (Guillaume), ingénieur, 30, rue de la Croix. — Bruxelles.

FOURNIER, O. S. B. (Dom Grégoire), abbaye de Maredsous, par Maredret-Sosoye (gare : Denée-Maredsous — prov. de Namur).

DE FOVILLE (abbé), directeur du Séminaire Saint-Sulpice. — Paris.

FRANÇOIS (A.), ingénieur-agronome, 12, rue Sainte-Gertrude. — Etterbeek (Bruxelles).

FRANCOTTE (Gustave), Ministre de l'Industrie et du Travail. — Bruxelles.

FRANCOTTE (Xavier), docteur en médecine, professeur à l'Université, 15, quai de l'Industrie. — Liége.

FRANCOTTE (Henri), professeur à l'Université, 1, rue Lebeau. — Liége.

DE GARCIA DE LA VEGA (Bon Victor), docteur en droit, 37, rue du Luxembourg. — Bruxelles.

GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins. — Paris (VIe).

GAUTIER (chanoine), 21, rue Louise. — Malines.

GELIN (E.), docteur en philosophie et en théologie, professeur de mathématiques supérieures au Collège Saint-Quirin. — Huy.

GEORGETOWN COLLEGE OBSERVATORY (Rev. Director of the). — Washington D. C. (États-Unis d'Amérique).

GEORIS (Édouard), avocat, boulevard Audent. — Charleroi.
GERARD (Ern.), administrateur au Ministère des Chemins de fer, Postes et Télégraphes, 25, avenue des Arts. — Bruxelles.
GESCHÉ (L.), professeur à l'Université, 20, rue d'Egmont.— Gand.
GIELE (Frédéric), docteur en médecine. — Jette-Saint-Pierre (Brabant).
GILBERT (Paul), ingénieur. — Heer-Agimont (Namur).
GILLARD, S. J. (R. P. J.), ancienne abbaye. — Tronchiennes.
GILLÈS DE PÉLICHY (B[on] Ch.), membre de la Chambre des Représentants, château d'Iseghem (Flandre occidentale).
GILSON, professeur à l'Université, 539, boulevard du Château. — Gand.
GLIBERT (D.), docteur en médecine, inspecteur du travail. — Uccle (Bruxelles).
GLORIEUX, docteur en médecine, 36, rue Jourdan. — Bruxelles.
GODFRIND (Victor), pharmacien militaire de 1[re] classe, chimiste du Magasin central d'habillement de l'Armée, 144, avenue de la Couronne. — Ixelles (Bruxelles).
GOEDSEELS (Édouard), administrateur-inspecteur de l'Observatoire royal de Belgique. — Uccle (Bruxelles).
GOLLIER (Th.), professeur à l'Université de Liége, 92, rue Africaine. — Bruxelles.
GONZALEZ DE CASTEJON (Miguel), conde de Aybar, lieutenant-colonel d'État-Major, professeur de S. M. le Roi d'Espagne, Real palacio. — Madrid.
GORIS (Ch.), docteur en médecine, 181, rue Royale. — Bruxelles.
GOSSELET (Jules), correspondant de l'Institut, docteur honoraire de l'Université de Louvain, professeur émérite de la Faculté des Sciences, 18, rue d'Antin.— Lille (Nord — France).
GRAFFIN (Mgr), professeur à l'Institut catholique, 47, rue d'Assas. — Paris.
GRAND' EURY (Cyrille), correspondant de l'Institut, professeur honoraire à l'École des Mines, 5, Cours Victor-Hugo. — Saint-Étienne (Loire — France).
GRANDMONT (Alphonse), avocat. — Taormina (Sicile — Italie).
GRANITO DI BELMONTE (S. Exc. Mgr), nonce apostolique. — Vienne.

GRÉGOIRE (abbé Victor), professeur à l'Université, 44, rue de Bériot. — Louvain.

GREINDL (B^on), capitaine commandant d'État-Major, professeur à l'École de guerre, 19, rue Tasson-Snel. — Bruxelles.

GRINDA (Jesús), ingénieur des ponts et chaussées, Fuencarral, 74 y 76. — Madrid.

DE GROSSOUVRE (A.), ingénieur en chef des mines, 4, rue Petite Armée. — Bourges (Cher — France).

GUELTON (Georges), attaché au Ministère de l'Intérieur et de l'Instruction publique, 119, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

GUERMONPREZ (D^r), professeur aux Facultés catholiques, membre correspondant de l'Académie royale de médecine de Belgique et de la Société de chirurgie de Paris, 63, rue d'Esquermes. — Lille (Nord — France).

HACHEZ (F.), professeur à l'Université de Louvain, 19, rue de Pavie. — Bruxelles.

HAGEN, S. J. (R. P.), directeur de l'Observatoire du Vatican. — Rome.

HAIBE (Dr Achille), directeur de l'Institut provincial de Bactériologie, rue Louise. — Namur.

HALOT (Alex.), consul du Japon, secrétaire du Conseil supérieur de l'État indépendant du Congo, 318, avenue Louise. — Bruxelles.

HAMONET (abbé), professeur à l'Institut catholique, 74, rue de Vaugirard. — Paris.

HANS (Jules), sous-lieutenant d'artillerie, 86, avenue Émile Beco. — Ixelles.

HARMANT (Eugène), lieutenant adjoint d'État-Major au régiment des Grenadiers, rue Dautzenberg. — Bruxelles.

HATON DE LA GOUPILLIÈRE (J.-N.), membre de l'Institut, directeur honoraire de l'École des mines, 56, rue de Vaugirard. — Paris.

HAVENITH (J.), lieutenant adjoint d'État-Major, 128, avenue de la Couronne. — Bruxelles.

HEBBELYNCK (Mgr A.), recteur magnifique de l'Université, 110, rue de Namur. — Louvain.

HELLEPUTTE (G.), membre de la Chambre des Représentants, pro-

fesseur à l'Université de Louvain. — Vlierbeek (Louvain).

DE HEMPTINNE (Alexandre), professeur à l'Université de Louvain, 51, rue Basse des Champs. — Gand.

HENRARD (Dr Étienne), 105, avenue du Midi. — Bruxelles.

HENRARD (Dr Félix), 216, boulevard du Hainaut. — Bruxelles.

HENRY (Albert), avocat, 45, rue de la Ruche. — Bruxelles.

HENRY (comdt J.), boulevard Dolez. — Mons.

HENRY (Louis), professeur à l'Université, correspondant de l'Institut, membre de l'Académie royale de Belgique, 2, rue du Manège. — Louvain.

HENRY (Paul), professeur à l'Université, 11, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

HENSEVAL (Dr Maurice), inspecteur chargé de la direction du laboratoire du service de santé et d'hygiène, avenue Georges-Henri. — Bruxelles.

HERVIER (abbé Joseph), 31, Grande rue de la Bourse. — Saint-Étienne (Loire — France).

HERVY (Charles), avocat, 4, rue Capouillet. — Bruxelles.

HEYLEN (S. G. Mgr), évêque de Namur.

HEYMANS (J. F.), docteur en sciences, professeur à l'Université, 7, boulevard de l'Hospice. — Gand.

HEYNEN (Dr W.), membre de la Chambre des Représentants. — Bertrix (prov. de Luxembourg); ou, 85, rue du Commerce. — Bruxelles.

HUMBERT (G.), membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École polytechnique, 10, rue Daubigny. — Paris.

HUWART (Jules), directeur du laboratoire de recherches relatives à la pêche maritime. — Ostende.

HUYBERECHTS (Dr Th.), 10, rue Hôtel des Monnaies. — Bruxelles.

INIGUEZ Y INIGUEZ (Francisco), catedrático de astronomia en la Universidad, director del Observatorio astronomico. — Madrid.

INSTITUT SAINT-IGNACE, 47, Courte rue Neuve. — Anvers.

JACOBS (Fernand), président de la Société belge d'astronomie, 21, rue des Chevaliers. — Bruxelles.

JACOBS (Mgr), curé-doyen émérite de Sainte-Gudule, 246, avenue de la Couronne. — Bruxelles.

JACOPSSEN, S. J. (R. P. Raymond), Collège Notre-Dame, 30, rue des Augustins. — Tournai.

DE JOANNIS (abbé Joseph), 7, rue Coëtlogon. — Paris.

JOLY (Albert), juge au tribunal de première instance, 8, rue de la Grosse-Tour. — Bruxelles.

JOLY (Léon), conseiller au Conseil des Mines, 56, avenue Brugmann. — Bruxelles.

JORDAN (Camille), membre de l'Institut, professeur à l'École polytechnique, 48, rue de Varenne. — Paris.

JOURDAIN (Louis), ingénieur, 12, rue Montagne-aux-Herbes-Potagères. — Bruxelles.

KAISIN (Félix), professeur à l'Université, Institut géologique, 10, rue Saint-Michel. — Louvain; ou, Floreffe (Namur).

KENNIS (G.), ingénieur civil, 12, rue de Robiano. — Schaerbeek (Bruxelles).

KERSTEN (Joseph), inspecteur général des charbonnages patronnés par la Société Générale, 3, Montagne du Parc. — Bruxelles.

KIEFFER (abbé J.-Jacques), professeur au Collège Saint-Augustin. — Bitch (Lorraine — Allemagne).

KIRSCH, C. S. C. (R. P. Alexandre-M.), Université de Notre-Dame (Indiana — États-Unis).

KIRSCH (Mgr J.-P.), professeur à l'Université. — Fribourg (Suisse).

DE KIRWAN (Charles), ancien inspecteur des forêts, Villa Dalmassière. — Voiron (Isère — France).

KOLTZ (Eugène), ingénieur, 184, rue de Malines. — Louvain.

KOWALSKI (Eug.), ingénieur des arts et manufactures, 18, rue d'Alzon. — Bordeaux (Gironde — France).

KURTH (Godefroid), membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 6, rue Rouvroy. — Liége.

LAFLAMME (Mgr), Université Laval. — Québec (Canada).

LAGASSE-DE LOCHT (Charles), inspecteur général des ponts et chaussées, président de la Commission royale des monuments, 167, chaussée de Wavre. — Bruxelles.

LAHOUSSE (Dr), professeur à l'Université, 27, Coupure. — Gand.

LAMARCHE (Émile), 81, rue Louvrex. — Liége.

LAMBERT (Camille), ingénieur en chef des chemins de fer de l'État. — Woluwe-Saint-Lambert (prov. de Brabant).

LAMBERT (Maurice), ingénieur. — Woluwe-Saint-Lambert (prov. de Brabant).
LAMBIN (A.), ingénieur des ponts et chaussées, secrétaire du cabinet du Ministre des Finances et des Travaux publics, 181, avenue de Tervueren. — Woluwe-lez-Bruxelles.
LAMBIOTTE (Omer), ingénieur de charbonnages. — Anderlues (Hainaut).
LAMBIOTTE (Victor), ingénieur, directeur-gérant des charbonnages d'Oignies-Aiseau, par Tamines (prov. de Namur).
LAMBOT (Oscar), professeur à l'Athénée royal d'Ixelles, 89, chaussée Saint-Pierre. — Bruxelles.
LAMINNE (chanoine Jacques), professeur à l'Université, 7B, rue de Bériot. — Louvain.
LAMMENS, S. J. (R. P. Henri), professeur à l'Université Saint-Joseph. — Beyrouth (Syrie).
LAMY (Mgr), membre de l'Académie royale de Belgique, professeur émérite à l'Université, 153, rue des Moutons. — Louvain.
LANNOY, S. J. (R. P. J.), 11, rue des Récollets. — Louvain.
DE LAPPARENT (A.), membre de l'Institut, membre correspondant de la Société géologique de Londres, associé de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Institut catholique, 3, rue de Tilsitt. — Paris.
LARUELLE (Dr), 22, rue du Progrès. — Bruxelles.
LAURENT (Dr Camille), 5, rue Joseph Jacquet. — Bruxelles.
LEBOUTEUX (P.). — Verneuil, par Migné (Vienne — France).
LEBRUN (Dr), rue de Bruxelles. — Namur.
LEBRUN (Dr Hector), 29, rue Van Ostade. — Bruxelles.
LECHALAS (G.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, 13, quai de la Bourse. — Rouen (Seine-Inférieure — France).
LECLERCQ (Jules), vice-président au tribunal de première instance, membre de l'Académie royale de Belgique, 89, rue de la Loi. — Bruxelles.
LECONTE (Félix), installations électriques, 1, rue des Arts. — Lille (Nord-France); ou, 25, rue Royale. — Tournai.
LEFEBVRE (Mgr Ferdinand), professeur à l'Université, 34, rue de Bériot. — Louvain.
LEFEBVRE (R. P. Maurice), docteur en sciences naturelles, mission-

naire Si-Wan-treu c/o Rom. cathol. mission. Kalgan. — China.

LEGRAND (chanoine Alfred), 37, rue de Bruxelles. — Namur.

LEIRENS-ELIAERT, rue du Pont. — Alost.

LEJEUNE DE SCHIERVEL (Charles), ingénieur des mines, 23, rue du Luxembourg. — Bruxelles.

LEJEUNE-SIMONIS, château de Sohan.— Pepinster (prov. de Liége).

LEMOINE (Georges), membre de l'Institut, inspecteur général des ponts et chaussées, professeur de chimie à l'École polytechnique, 76, rue Notre-Dame des Champs. — Paris.

LENOBLE, professeur aux Facultés catholiques, 28ter, rue Négrier.— Lille (Nord-France).

LE PAIGE (C.), membre de l'Académie royale de Belgique, Administrateur-Inspecteur de l'Université, Plateau de Cointe. — Liége.

LEPLAE (E.), professeur à l'Université, 74, rue de Namur. — Louvain.

LHOEST (Henri), ingénieur, directeur des travaux des charbonnages Gosson-Lagasse. — Montegnée (prov. de Liége).

DE LIEDEKERKE DE PAILHE (Cte Éd.), 47, avenue des Arts.— Bruxelles.

DU LIGONDÈS (Vte), colonel du 16e régiment d'artillerie.— Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme — France).

DE LIMBURG-STIRUM (Cte Adolphe), membre de la Chambre des Représentants, 15, rue du Commerce. — Bruxelles.

LIMPENS (Émile), avocat. — Termonde.

DE LOCHT (Léon), professeur à l'Université de Liége, château de Trumly. — Trooz (prov. de Liége).

LUCAS, S. J. (R. P. J.-D.), professeur à la Faculté des Sciences, Collège Notre-Dame de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

MAES (abbé), curé de Saint-Job. — Uccle.

MANSION (Paul), professeur à l'Université, inspecteur des Études à l'École préparatoire du génie civil et des Arts et Manufactures, membre de l'Académie royale de Belgique, 6, quai des Dominicains. — Gand.

MARÉCHAL, S. J. (R. P. J.), docteur en sciences naturelles, 11, rue des Récollets. — Louvain.

MARTIN (Dr), 9, boulevard Ad aquam. — Namur.
MARTINEZ Y SAEZ (Francisco de Paula), catedratico en la Universidad Central, San Quintin, 6 pral. — Madrid.
MASEN (Aimé), docteur en médecine, 30, rue Middelbourg. — Boitsfort.
MATAGNE (Henri), docteur en médecine, 31, avenue des Courses. — Bruxelles.
MAUBERT (Frère), des Frères des Écoles chrétiennes, au scolasticat de Jesu Placet. — Louvain.
DE MAUPEOU (Cte), ingénieur, directeur du Génie maritime, 4, place du Gast. — Laval (Mayenne — France).
MEESSEN (Dr Wilhelm), 28, rue Froissard. — Bruxelles.
DE MEEUS (Cte Henri), ingénieur, rue du Vert-Bois. — Liége.
MERCIER (Mgr D.), archevêque de Malines.
DE MÉRODE-WESTERLOO (Cte), président du Sénat, rue aux Laines. — Bruxelles.
MERTEN (Albert), ingénieur, 83, rue Digue de Brabant. — Gand.
MEUNIER (abbé Alph.), professeur à l'Université, Collège Juste-Lipse. — Louvain.
MEUNIER (Fernand), 21, rue du Moulin. — Contich (prov. d'Anvers).
MEURS, S. J. (R. P. V.), 11, rue des Récollets. — Louvain.
MIRANDA BISTUER (S. G. Mgr), évêque de Ségovie (Espagne).
MŒLLER (Dr A.), membre de l'Académie royale de médecine, 1, rue Montoyer. — Bruxelles.
MŒLLER (Dr Nicolas), 18, rue Ortélius. — Bruxelles.
DE MOFFARTS (Bon Paul), château de Botassart, par Noirefontaine (prov. de Luxembourg).
MONCHAMP (Mgr Georges), membre de l'Académie royale de Belgique, vicaire général de l'Évêché. — Liége.
DE MONTCHEUIL (abbé M.), 9, rue du Languedoc. — Toulouse (Haute-Garonne — France).
DE MONTESSUS DE BALLORE (Cte F.), commandant le Bureau de recrutement, 20, rue Boucher de Perthes. — Abbeville (Somme — France).
DE MONTESSUS DE BALLORE (Vte Robert), professeur suppléant à l'Université catholique, 8, place de Genevières. — Lille (Nord — France).
DE MOREAU D'ANDOY (Bon), 11, rue Archimède. — Bruxelles.

MORELLE (Dr Aimé), chef du Service d'urologie et de dermatologie à l'Institut chirurgical, 26, rue Archimède. — Bruxelles.

MOREUX (abbé Th.), professeur au Collège Saint-Célestin. — Bourges (Cher — France).

MULLIE (Gilbert), inspecteur vétérinaire adjoint au Ministère de l'Agriculture, 23, avenue Jean Linden. — Bruxelles.

NAVA DI BONTIFÉ (S. É. le cardinal), archevêque de Catane (Sicile — Italie).

NAVAS, S. J. (R. P. Longin), Colegio del Salvador. — Zaragoza (Espagne).

NERINCX (Alfred), professeur à l'Université de Louvain, secrétaire de l'Institut de Droit international, 8, rue Bosquet. — Saint-Gilles (Bruxelles).

NEUBERG (J.), membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 6, rue de Sclessin. — Liége.

NEWTON (général John), 279, Adelphi street. — Brooklyn (New-York — États-Unis).

NICKERS (abbé), curé de Notre-Dame. — Namur.

NOGUIER DE MALIJAY (abbé N.), professeur de sciences, 14, rue de Bagneux. — Paris.

NOLLÉE DE NODUWEZ, membre honoraire du Corps diplomatique de S. M. le Roi des Belges, camérier secret de S. S. Pie X, 14, avenue de Marnix. — Bruxelles.

NYSSENS (Julien), ingénieur, 44, rue Juste-Lipse. — Bruxelles.

NYSSENS (Pierre), directeur du Laboratoire agricole de l'État, 16, rue du Jambon. — Gand.

D'OCAGNE (Maurice), professeur à l'École des ponts et chaussées, répétiteur à l'École polytechnique, 30, rue de la Boëtie. — Paris.

ŒHLERT (D.-P.), correspondant de l'Institut, conservateur du Musée d'histoire naturelle, 29, rue de Bretagne. — Laval (Mayenne — France).

PASQUIER (Alfred), docteur en médecine. — Châtelet (Hainaut).

PASQUIER (Ern.), professeur à l'Université, 22, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

PAUWELS, S. J. (R. P. J.), professeur de chimie au Collège Saint-Jean-Berchmans, 11, rue des Récollets. — Louvain.

PECHER (Eugène), 379, avenue Louise. — Bruxelles
PEETERS (Jules), docteur en droit, 51, rue Saint-Martin. — Tournai.
PEPIN (abbé Théophile), 15, rue Pierre Corneil. — Lyon (Rhône — France).
PICARD (E.), membre de l'Institut, professeur à la Sorbonne, 4, rue Bara. — Paris (VIe).
PIERAERTS (chan.), directeur de l'Institut Saint-Louis, rue du Marais. — Bruxelles.
DE PIERPONT (Édouard), château de Rivière. — Profondeville (prov. de Namur); ou, 92, rue Souveraine. — Bruxelles.
PIERRE (abbé Oscar), professeur au Collège de Belle-Vue. — Dinant.
POULLET (Prosper), associé de l'Institut de Droit international, professeur à l'Université, 28, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.
DE POULPIQUET, O. P. (R. P. Ambroise), couvent des RR. PP. Dominicains, rue Juste-Lipse. — Louvain.
PROOST (Alphonse), directeur général de l'Agriculture, 36, chaussée de Wavre. — Bruxelles; ou, Mousty-lez-Ottignies (Brabant).
PROOST (chanoine), aumônier de la Cour, rue Mercelis. — Ixelles (Bruxelles).
PROVINCIAL (R. P.) de la Compagnie de Jésus, 165, rue Royale. — Bruxelles.
PULIDO GARCIA (José), 71, rua de San Mamede. — Lisbonne.
QUAIRIER, 28, boulevard du Régent. — Bruxelles.
RACHON (abbé Prosper), curé de Ham, par Longuyon (Meurthe-et-Moselle — France).
RACLOT (abbé V.), aumônier des Hospices et directeur de l'Observatoire. — Langres (Haute-Marne — France).
RECTOR (R. P.) del Colegio del Jesus. — Tortosa (Tarragona — Espagne).
RENIER (Armand), ingénieur au Corps des mines, 74, rue Fabri. — Liége.
DE REUL (Gustave), ingénieur, directeur de l'École industrielle, 10, boulevard Cauchy. — Namur.
REUTHER (Guillaume), 12, avenue Brugmann. — Bruxelles.
REYNAERT (abbé Dorsan), professeur au Collège Saint-Louis. — Bruges.

DE RIBAUCOURT (Cte), 27, rue de Loxum. — Bruxelles; ou, château de Perck, par Vilvorde (Brabant).
RICHALD (Jos.), ingénieur principal des ponts et chaussées, 69, rue Archimède. — Bruxelles.
RINALDINI (S. Exc. Mgr), nonce apostolique. — Madrid.
ROBERTI (Max), notaire, rue de Namur. — Louvain.
RODRIGUEZ RISUENO (Emiliano), catedrático de historia natural en la Universidad, 16, prâl, calle Duque de la Victoria. — Valladolid (Espagne).
ROERSCH (A.), professeur à l'Université, 75, rue de l'Avenir. — Gand.
ROLAND, Pierre, ingénieur, 55, rue Vital Decoster. — Louvain.
ROUX (Cl.), professeur aux Facultés catholiques, 25, rue du Plat.— Lyon (Rhône — France).
RUTTEN (S. G. Mgr), évêque de Liége.
RYAN (Hugh), M. A., F. R. U. I., membre de l'Académie royale irlandaise, professeur de chimie à l'École de médecine de l'Université catholique, au Collège de l'Université de Dublin et au Collège Saint-Patrik de Maynooth, Medical School, Cecilia Street. — Dublin (Irlande).
SABATIER (Paul), professeur de chimie à l'Université. — Toulouse.
DE SAINTIGNON (Cte), maître de Forges. — Longwy (Meurthe-et-Moselle — France).
DE SALVERT (Vte), professeur aux Facultés catholiques de Lille. 39, rue des Missionnaires. — Versailles (Seine-et-Oise — France); ou, château de Villebeton, par Châteaudun (Eure-et-Loir — France).
SANZ (Pelegrin), ingeniero de caminos, Oficina de Obras públicas. — Zaragoza (Espagne).
SARRET (Jean), agrégé de l'Université, professeur de physique au Lycée Impérial Ottoman, 13, rue Aïnali tchesmé. — Constantinople (Turquie).
SCHAFFERS, S. J. (R. P. V.), docteur en sciences physiques et mathématiques, 11, rue des Récollets. — Louvain.
SCHEUER, S. J. (R. P. P.) 11, rue des Récollets. — Louvain.
SCHMIDT (Alfred), chimiste de la maison E. Leybold's Nachfolger, 7, Bruderstrasse. — Cologne (Allemagne).
SCHMITZ, S. J. (R. P. G.), directeur du Musée géologique des bas-

sins houillers belges, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Schmitz (Théodore), ingénieur civil des mines, 31, rue Jordaens. — Anvers.

Schockaert (R.), professeur à l'Université, 13, place du Peuple. — Louvain.

Schollaert, président de la Chambre des Représentants. — Vorst (prov. d'Anvers).

Schoonjans, S. J. (P. Ch.) Milltown Park. — Milltown, Co Dublin (Irlande).

de Schoutheete de Tervarent (Ch^er^). — Saint-Nicolas.

Schreiber, agronome de l'État. — Hasselt.

Schul (R. P. J.), S. J., Institut Saint-Ignace, 47, courte rue Neuve. — Anvers.

de Selliers de Moranville (Ch^er^ A.), colonel d'État-Major, 46, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.

Grand Séminaire de Bruges.

Sépulchre (Émile), ingénieur, château d'Awans. — Bierset-Awans (prov. de Liége).

Sibenaler (N.), professeur à l'Université, 106, rue de Namur. — Louvain.

Simonart (D^r^), 33^A^, rue du Canal. — Louvain.

de Sinéty, S. J. (R. P. Robert), maison d'études S. J. — Gemert (Hollande).

Siret (Henri), ingénieur, directeur général de la Cie des Chemins de fer du Congo Supérieur aux grands lacs africains, 27, avenue Brugmann. — Bruxelles.

Siret (Louis), ingénieur. — Cuevas (prov. Almeria — Espagne).

Smekens (Théophile), président honoraire du tribunal de 1re instance, 34, avenue Quentin Metsys. — Anvers.

Smets (D^r^), 104, rue Van de Weyer. — Bruxelles.

Smits (Eugène), ingénieur, rue Marie-Thérèse. — Bruxelles.

Soisson (G.), ingénieur, docteur en sciences, professeur à l'Athénée grand-ducal, 19, rue Joseph II. — Luxembourg (Grand-Duché).

Solano y Eulate (José Maria), Marqués del Socorro, professeur de géologie au Musée d'histoire naturelle, 41, bajo, calle de Jacometrezo. — Madrid.

SOMVILLE (Oscar), docteur en sciences physiques et mathématiques, 120, rue Beeckman. — Uccle (Bruxelles).
SOREIL, ingénieur. — Maredred-Sosoye, par Anthée (prov. de Namur).
DE SPARRE (Cte), professeur aux Facultés catholiques de Lyon, château de Vallière. — Saint-Georges-de-Reneins; ou, 7, avenue de l'Archevêché. — Lyon (Rhône — France).
SPINA, S. J. (R. P. Pedro), Colegio catolico del Sagrado Corazón de Jesús, 5, sacristia de Capuchinas. — Puebla (Mexique).
SRINGAEL (Auguste), ingénieur, 22, boulevard de la Toison d'or. — Bruges.
STAINIER (Xavier), professeur à l'Université de Gand, membre de la commission géologique de Belgique, rue Pierquin. — Gembloux.
VAN DEN STEEN DE JEHAY (Cte Frédéric), chef du Cabinet du Ministre des Affaires Étrangères, château de Bassinnes, par Avins-en-Condroz (prov. de Namur).
STILLEMANS (S. G. Mgr), évêque de Gand.
STINGLHAMBER (Émile), docteur en droit, 13, avenue Ernestine. — Bruxelles.
STORMS (abbé Camille), curé de Ganshoren, par Jette (prov. de Brabant).
STORMS (Ernest), ingénieur, 6, rue du Receveur. — Bruges.
STOUFFS (Dr), rue de Charleroi. — Nivelles.
STOUFFS (Dr Jules), 205, avenue Louise. — Bruxelles.
VAN DER STRATEN-PONTHOZ (Cte François), 23, rue de la Loi. — Bruxelles.
STRUELENS (Alfred), docteur en médecine, 18, rue Hôtel des Monnaies. — Saint-Gilles (Bruxelles).
SUPÉRIEUR du Collège des Joséphites, Vieux-Marché. — Louvain.
SUTTOR, ingénieur honoraire des ponts et chaussées, 19, rue des Bogards. — Louvain.
SWOLFS (chan.), inspecteur diocésain, 46, avenue Henri Speecq. — Malines.
SWOLFS (Dr Oscar), 59, rue Vilain XIIII. — Bruxelles.
TAYMANS (Émile), notaire. — Tubize (Brabant).
THÉRON (Joseph), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Athénée, 26, rue Marnix. — Gand.

THIÉBAUT (Fernand), industriel, bourgmestre de Monceau-sur-Sambre (prov. de Hainaut).
THIÉRY (chan. Armand), Institut des Hautes-Études, 1, rue des Flamands. — Louvain.
THIRION, S. J. (R. P. J.), 11, rue des Récollets. — Louvain.
TIMMERMANS (François), ingénieur, directeur-gérant de la Société anonyme des ateliers de construction de la Meuse, 22, rue de Fragnée. — Liége; ou, Seraing (prov. de Liége).
TITS (A.), oculiste, 49, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.
TITS (abbé Léon), docteur en sciences physiques et mathématiques, Collège Saint-Rombaut. — Malines.
TORROJA CABALLE (Eduardo), architecte, professeur de géométrie descriptive à la Faculté des sciences de l'Université, membre correspondant de l'Académie royale des Sciences, 9-11e rue Requena. — Madrid.
DE TRAZEGNIES (Mis). — Corroy-le-Château, par Mazy (prov. de Namur); ou, 23, rue de la Loi. — Bruxelles.
DE T'SERCLAES (Mgr Charles), président du Collège belge. — Rome.
DE T'SERCLAES (Cte Jacques), colonel, chef d'État-Major, professeur à l'École de guerre, 34, rue Jordaens. — Ixelles. (Bruxelles).
T'SERSTEVENS (Gaston), château de Baudemont, par Virginal (prov. de Brabant); ou, 43, boulevard Bischoffsheim. — Bruxelles.
D'URSEL (Cte Aymard), capitaine d'artillerie, château de Bois-de-Samme, par Wauthier-Braine (Brabant); ou, 25, rue de la Science. — Bruxelles.
DE LA VALLÉE POUSSIN (Ch.-J.), correspondant de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 38, rue Léopold. — Louvain.
VAN AUBEL (Dr Ch.), directeur de la Maternité Sainte-Anne, 43, rue Boduognat. — Bruxelles.
VAN BALLAER (chanoine), curé de N. D. du Sablon, 6, rue Bodenbroeck. — Bruxelles.
VAN BASTELAER (Léonce), 24, rue de l'Abondance. — Bruxelles.
VAN BIERVLIET (J.), professeur à l'Université, 5, rue Metdepenningen. — Gand.

VAN CAENEGHEM (abbé F.), directeur de l'École Supérieure commerciale et consulaire. — Mons.
VAN DEN BOSSCHE (G.), avocat, 31, rue Baudeloo. — Gand.
VAN DEN GHEYN (chan. Gabriel), supérieur de l'Institut Saint-Liévin. — Gand.
VAN DEN GHEYN, S. J. (R. P. Joseph), bollandiste, conservateur à la Bibliothèque royale, 14, rue des Ursulines. — Bruxelles.
VANDENPEEREBOOM (E.), ingénieur, 15, rue d'Artois. — Liége.
VANDERLINDEN, ingénieur en chef des ponts et chaussées, administrateur-inspecteur de l'Université, 27, Cour du Prince. — Gand.
VANDERLINDEN (E.), assistant au service météorologique de l'Observatoire royal. — Uccle (Bruxelles).
VAN DER MENSBRUGGHE (G.), membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 131, Coupure. — Gand.
VAN DER SMISSEN (Édouard), avocat, professeur à l'Université de Liége et à l'École de Guerre, 13, rue des Cultes. — Bruxelles.
VANDERSTRAETEN (Dr A.), 68, rue du Trône. — Bruxelles.
VANDERYST (Hyac.), ingénieur agricole, inspecteur au Ministère de l'Agriculture. — Tongres.
VANDEVYVER, professeur à l'Université, 63, boulevard de la Citadelle. — Gand.
VAN DURME, docteur en médecine, professeur à l'Université, 5, rue du Séminaire. — Gand.
VAN GEHUCHTEN (A.), professeur à l'Université, 36, rue Léopold. — Louvain.
VAN HOECK (Dr Ém.), 13, rue Traversière. — Bruxelles.
VAN KEERBERGHEN, docteur en médecine, 21, rue du Trône. — Bruxelles.
VANNUTELLI (S. É. le cardinal Séraphin). — Rome.
VAN ORTROY (Fernand), professeur à l'Université, 37, quai des Moines. — Gand.
VAN OVERBERGH (Cyrille), directeur général de l'Enseignement supérieur, 102, chaussée de Vleurgat. — Bruxelles.
VAN SWIETEN (Raymond), 80, avenue de la Toison d'Or. — Bruxelles.
VAN VELSEN, docteur en médecine, 270, rue Royale. — Bruxelles.

Van Ysendyck (William), docteur en médecine, 77, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.

Vaultrin, inspecteur des forêts, 2, rue de Lorraine. — Nancy (Meurthe-et-Moselle — France).

Verhelst (abbé F.), aumônier du Pensionnat du Sacré-Cœur, 82, rue d'Oultremont. — Bruxelles.

Vermeersch, S. J. (R. P. A.), docteur en droit et en sciences politiques et administratives, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Verriest (G.), docteur en médecine, professeur à l'Université, 40, rue du Canal. — Louvain.

Verriest, docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Université, 40, rue du Canal. — Louvain.

Verschaffel (A.), chargé des travaux astronomiques à l'Observatoire d'Abbadia, par Hendaye (Basses-Pyrénées — France).

Versteylen, membre de la Chambre des Représentants, rue d'Herenthals. — Turnhout.

Vervaeck, docteur en médecine, 4, place de la Chapelle. — Bruxelles.

Vicent, S. J. (R. P. Antonio), Colegio de San José. — Valencia (Espagne).

Vignon (Paul), préparateur de zoologie à la Sorbonne, 9, boulevard Latour-Maubourg. — Paris.

Visart de Bocarmé, avocat, 10, rue Grandgagnage. — Namur.

Visart de Bocarmé (Cte Amédée), membre de la Chambre des Représentants, bourgmestre de Bruges.

Vollen (E.), avocat avoué, 98, rue de Paris. — Louvain.

de Vorges (Albert), 4, avenue Thiers. — Compiègne (Oise — France).

de Vorges (Cte E. Domet), 46, rue du Général Foy. — Paris.

de Vregille, S. J. (R. P.), Ore place. — Hastings (Angleterre).

Waffelaert (S. G. Mgr), évêque de Bruges.

Walravens (S. G. Mgr), évêque de Tournai.

Warlomont (René), docteur en médecine et en sciences naturelles, médecin de régiment au 1er Guides, 66, avenue de Cortenberg. — Bruxelles.

Wasmann (R. P.), S. J., Bellevue. — Luxembourg.

Wasteels (C.), répétiteur à l'Université, 17, rue d'Akkergem. — Gand.

WAUCQUEZ (Victor), avocat, 65, rue des Tanneurs. — Bruxelles.
DE WAVRIN (Mis), château de Ronsele, par Somergem (Flandre orientale); ou, 3, place du Comte de Flandre. — Gand.
WÉRY (Dr Aug.). — Sclayn (prov. de Namur).
WILLAERT, S. J. (R. P. Fernand), docteur en sciences physiques et mathématiques, 11, rue des Récollets. — Louvain.
WILLAME (Aimé), ingénieur, 21, place Dailly. — Schaerbeek.
WILMOTTE (abbé), à Saint-Servais (Namur).
WITZ (Aimé), professeur aux Facultés catholiques, 29, rue d'Antin. — Lille (Nord — France).
WODON (Jules), ingénieur, rue de Bruxelles. — Namur.
WOLF (C.), membre de l'Institut, 36, avenue de l'Observatoire. — Braine (Aisne — France).
WOLTERS (Frédéric), professeur à l'Université, 55, rue du Jardin.— Gand.
WOLTERS (G.), administrateur-inspecteur honoraire de l'Université de Gand, inspecteur général honoraire des ponts et chaussées, 192, rue des Entrepreneurs. — Mont-Saint-Amand (Gand).
WOUTERS (chan.), inspecteur principal de l'Enseignement, 73, rue de l'Empereur. — Anvers.
DE WOUTERS D'OPLINTER (Ch^er Fernand), 9, rue du Commerce. — Bruxelles.
WULF, S. J. (R. P. Th.), professeur de physique au Collège Saint-Ignace. — Fauquemont (Limbourg Hollandais).
ZEILLER (René), membre de l'Institut, professeur à l'École supérieure des mines, 8, rue du Vieux-Colombier.—Paris.

Liste géographique des membres de la Société scientifique de Bruxelles (1907)

BELGIQUE

Flandre occidentale : **Bruges** : Mgr F. Béthune. — Coppieters de Stockhove (abbé Ch.). — Reynaert (abbé Dorsan). — Grand Séminaire. — Springael (Aug.). — Visart de Bocarmé (Cte A.). — S. G. Mgr Wa elaert.

Iseghem : Gillès de Pélichy (B^{on} Ch.). — **Ostende** : Huwart. — **Pitthem** : Claerhout (abbé J.). — **Roulers** : Dumez (abbé R.). — **Ypres** : De Brouwer (Mich). — De Brouwer (chan.).

Flandre orientale : **Gand** : Cloquet (L.). — Cooreman (G.). — Crame (Aug.). — De Baets (H.). — De Bloo (J.). — De Moor (D^r). — Dumortier. — Dusausoy (Cl.) — Dutordoir (H.). — Eeckhout (G.). — Gesché (L.). — Gilson. — de Hemptinne (A.). — Heymans (J. F.). — Lahousse (D^r). — Mansion (P.). — Merten (Alb.). — Nyssens (P.). — Roersch (A.). — S. G. Mgr Stillemans. — Théron (J.). — Van Biervliet (J.). — Van den Bossche (G.). — Van den Gheyn (chan. G.). — Vanderlinden. — Van der Mensbrugghe. — Vandevyver. — Van Durme (D^r). — Van Ortroy (F.). — Wasteels (C.). — de Wavrin (Mis). — Wolters (F.).

Alost : Collège Saint-Joseph. — Leirens-Eliaert. — **Beveren-Waes** : de Bergeyck (Cte). — **Mont-Saint-Amand** (Gand) : Wolters (G.). — **Saint-Nicolas** : de Schoutheete de Tervarent (Ch^{er}) — **Somergem** : de Wavrin (Mis). — **Termonde** : Limpens (Émile). — **Tronchiennes** (Gand) : Delattre, S. J. (R. P. A.-J.). — Gillard, S. J. (R. P. J.).

Province d'Anvers : **Anvers** : Belpaire (F.). — Cogels (J.-B.-Henri). — Dubois (E.). — Institut Saint-Ignace. — Schmitz (Th.). — Schul S. J. (R. P. J.). — Smekens (Th.). — Wouters (chan.).

Contich : Meunier (F.). — **Gheel** : Deroitte (Dr V.). — **Malines** : S. G. Mgr van den Branden de Reeth. — Dessain (Ch.). — Gautier (chan.). — S. G. Mgr Mercier, archevêque. — Swolfs (chan.). — Tits (abbé L.). — **Turnhout** : Versteylen. — **Vorst** : Schollaert.

Limbourg : **Hasselt** : Schreiber.
Tongres : Vanderyst.

Luxembourg : **Bertrix** : Heynen (W.). — **Noirefontaine** : de Moffarts (Bon P.).

Brabant : **Bruxelles** : André (J.-B.). — Baltus (chan.). — Bayet (A.). — Beernaert (Aug.). — Bertrand (L.). — Béthune (Bon G.). — de Bien (F.). — Bivort (Ild.). — de la Boëssière-Thiennes (Mis). — Borginon (Dr P.). — de Briey (Cte R.). — Brifaut. — van der Bruggen (Bon M.). — Carathéodory (C.). — Carlier (J.). — Cartuyvels (J.). — Collège Saint-Michel (R. P. H. Bosmans, S. J.). — Coomans (L.). — Coomans (V.). — Cordier (Dr). — Cousin (L.). — Craninex (Bon O.). — Cuylits (Dr J.). — Davignon (J.). — De Coster (C.). — De Greef. — De Jaer (C.). — De Lantsheere (Dr J.). — De Lantsheere (L.). — Delcroix (Dr A.). — Delétrez (Dr A.). — De Preter (H.). — De Smedt, S. J. (R. P. Ch.). — De Vuyst (P.). — De Wildeman (É.). — Dupont (E.). — Dutillieux (M.). — Fagnart (E.). — de Favereau de Jenneret (Bon). — Fernandès (Dr R.). — de Fooz (G.). — Francotte (G.). — de Garcia de la Vega (Bon V.). — Gerard (E.). — Glorieux (Dr). — Gollier (Th.). — Goris (Ch.). — Greindl (Bon). — Hachez (F.). — Halot (A.). — Harmant (Eug.). — Havenith. — Henrard (Dr E.). — Henrard (Dr F.). — Henry (A.). — Henseval (Dr M.). — Hervy (Ch.). — Heynen (W.). — Huyberechts (Dr Th.). — Mgr Jacobs. — Jacobs (F.). — Joly (A.). — Joly (L.). — Jourdain (L.). — Kersten (J.). — Lagasse-de Locht (Ch.). — Lambot (O.). — Laruelle (Dr). — Laurent (Dr C.). — Lebrun (Dr H.). — Leclercq (J.). — Lejeune de Schiervel (Ch.). — de Liedekerke de Pailhe (Cte Éd.). — de Limburg-Stirum (Cte Ad.). — Matagne (Dr H.). — Meessen (Dr W.). — de Mérode-Westerloo (Cte). — Moeller (Dr). — Moeller (Dr N.). — de Moreau d'Andoy (Bon). — Morelle (Dr A.). — Mullie (G.). — Nollée de Noduwez. — Nyssens (J.). — Pecher (E.). — Pieraerts (chan.). — de Pierpont (Éd.). — Proost (A.). — Provincial (R. P.) de la Compagnie de Jésus. — Quairier. —

Reuther (G.). — de Ribaucourt (Cte). — Richald (J.). — de Selliers de Moranville (Cher A.). — Siret (H.). — Smets (Dr). — Smits (E.). — Stinglhamber (É.). — Stouffs (Dr J.). — van der Straten-Ponthoz (Cte F.). — Swolfs (Dr O.). — de Trazegnies (Mis). — T'Serstevens (G.). — d'Ursel (Cte A.). — Van Aubel (Ch.). — Van Ballaer (chan.). — Van Bastelaer (L.). — Van den Gheyn, S. J. (R. P. J.). — Van der Smissen (Éd.). — Vanderstraeten (Dr A.). — Van Hoeck (Dr Ém.).— Van Keerberghen (Dr). — Van Overbergh (Cyr.). — Van Swieten (R.). — Van Velsen (Dr). — Van Ysendyck (Dr). — Verhelst (abbé F.). — Vervaeck (Dr). — Warlomont (Dr R.). — Wauquez (V.). — de Wouters d'Oplinter (Cher F.).

Auderghem : Capart (J.). — **Boitsfort** : Masen (Dr). —. **Cureghem** (Bruxelles) : Degive (A.). — **Etterbeek** : François. — **Ganshoren** (Jette) : Storms (abbé C.). — **Ixelles** (Bruxelles) : Beaujean (Ch.). — Deleu (L.). — De Vadder (V.). — Godfrind (V.). — Hans (J.). — Proost (chan.). — de T'Serclaes (Cte J.). — **Jette-Saint-Pierre** : Giele (Dr Fréd.).

Louvain : Breithof (F.). — Bruylants. — Cappellen (G.). — Collège Saint-Jean-Berchmans. — Daubresse (P.). — Debaisieux. — De Becker (chan. J.). — Demanet (chan.). — De Muynck (chan. R.). — Denys (Dr J.). — De Walque (F.). — de Dorlodot (chan. H.). — Dumont (A.). — Dupriez. — Fenaux (Éd.). — Grégoire (abbé V.). — Guelton (G.). — Mgr A. Hebbelynck. — Henry (L.). — Henry (P.). — Kaisin (F.). — Koltz (E.). — Laminne (chan. J.). — Mgr Lamy. — Lannoy, S. J. (R. P. J.). — Mgr F. Lefebvre. — Leplae (E.). — Maréchal, S. J. (R. P. J.). — Maubert (Frère). — Meunier (abbé Alph.). — Meurs, S. J. (R. P. V.). — Micha. — Pasquier (Ern.). — Pauwels, S. J. (R. P. J.). — Poullet (Pr.). — de Poulpiquet, O. P. (R. P. A.). — Roberti (M.). — Roland (P.). — Schaffers, S. J. (R. P. V.). — Scheuer, S. J. (R. P. P.). — Schmitz, S. J. (R. P. G.). — Schockaert (R.). — Sibenaler (N.). — Simonart (Dr). — Supérieur du Collège des Joséphites. — Suttor. — Thiéry (abbé A.). — Thirion, S. J. (R. P. J.). — Tits (Dr A.). — de la Vallée Poussin (Ch.-J.). — Van Gehuchten. — Vermeersch, S. J. (R. P. A.). — Verriest (Dr G.). — Verriest. — Vollen (E.). — Willaert, S. J. (R. P. F.).

Mousty-lez-Ottignies : Proost (A.). — **Nivelles** :

Stouffs (Dr). — **Perck** (par Vilvorde) : de Ribaucourt (Cte). — **Saint-Gilles** (Bruxelles) : Nerincx (A.). — Struelens (Dr). — **Saint-Josse-ten-Noode** (Bruxelles) : Delvigne (chan. A.). — **Schaerbeek** (Bruxelles) : Delmer. — Kennis (G.). — Willame (A.). — **Tubize** : Taymans (É.) — **Uccle** (Bruxelles) : Dejaer (J.). — Delvosal (J.). — Denoël. — Glibert (Dr D.). — Goedseels (Éd.). — Maes (abbé). — Somville (O.). — Vanderlinden (E.). — **Vilvorde** : Bouillot (C.). — **Virginal** : T'Serstevens (G.). — **Vlierbeek** (Louvain) : Helleputte (G.). — **Wauthier-Braine** : d'Ursel (Cte A.). — **Woluwe-lez-Bruxelles** : Lambin (A.). — **Woluwe-Saint-Lambert** : Convent (Dr A.). — Lambert (C.). — Lambert (M.).

Province de Liége : **Liége** : Berleur (Ad.). — Collège Saint-Servais. — Duquenne (Dr L.). — Francotte (H.). — Francotte (Dr X.). — Kurth (G.). — Lamarche (E.). — Le Paige (C.). — de Meeus (Cte H.). — Mgr G. Monchamp. — Neuberg (J.) — Renier (A.). — S. G. Mgr Rutten. — Timmermans (F.). — Vandenpeereboom (E.).

Bierset-Awans : Sépulchre (É.). — **Huy** : Gelin (abbé E.). — **Montegnée** : Lhoest (H.). — **Pepinster** : Lejeune-Simonis. — **Seraing** : Timmermans (F.). — **Stavelot** : David (P.). — **Trooz** : de Locht (L.).

Hainaut : **Mons** : Dufrane (Dr). — Henry (comdt J.). — Van Caeneghem (abbé F.).

Anderlues : Lambiotte (O.). — **Ath** : Clément (abbé H.). — **Charleroi** : Georis (Éd.). — **Châtelet** : Pasquier (Dr A.). — **Châtelineau** : Allard (F.). — **Froidmont** (Tournai) : De Buck (Dr D.). — **Gosselies** : Drion (Bon Ad.). — **Monceau-sur-Sambre** : Thiébaut (F.). — **Pecq** : Thiry (Fr.). — **Péruwelz** : Delaunois (Dr G). — **Tournai** : Blondel (A.). — Jacopssen, S. J. (R. P. R.). — Leconte (F.). — Peeters (J.). — S. G. Mgr Walravens.

Province de Namur : **Namur** : Alexis-M. Gochet (Frère). — Atout-Van Cutsem. — Baivy (Dr). — Bibot (Dr). — Collège Notre-Dame de la Paix. — Castelein, S. J. (R. P.). — De Greeff, S. J. (R. P. H.). — Deschamps, S. J. (R. P. A.). — Dierckx, S. J. (R. P. Fr.). — Haibe (Dr). — S. G. Mgr. Heylen. — Lebrun (Dr). —

Legrand (abbé A.). — Lucas, S. J. (R. P. J.-D.) — Martin (D^r^). — Nickers (abbé). — de Reul (G.). — Visart de Bocarmé. — Wodon (J.).

Bassinnes (Avins-en-Condroz) : van den Steen de Jehay (Cte Fréd.). — **Corroy-le-Château** (Mazy) : de Trazegnies (Mis). — **Dinant** : Cousot (D^r^). — Pierre (abbé O.). — **Floreffe** : de Dorlodot (S.). — **Gembloux** : Stainier (X.). — **Heer-Agimont** : Gilbert (P.). — **Maredret-Sosoye** : Fournier, O. S. B. (Dom Gr.). — Soreil. — **Profondeville** : de Pierpont (Éd.). — **Rhisnes** : Bosquet (F.). — **Saint-Servais** : Wilmotte (abbé). — **Sclayn** : Wéry (Dr A.). — **Tamines** : Lambiotte (V.). — **Virton** : Cabeau (abbé Ch.).

FRANCE

Paris : Amagat. — Baclé (L.). — Béchamp (A.). — Béchaux. — Blondel. — Boussinesq. — Branly (Éd.). — Bulliot (J.). — Capelle (abbé Éd.). — Dardel (D^r^). — Delaire (A.). — École libre de l'Immaculée-Conception. — École libre de Sainte-Geneviève. — Fauvel (A.-A.). — de Foville (abbé). — Gauthier-Villars. — Mgr Graffin. — Hamonet (abbé). — Haton de la Goupillière (J.-N.). — Humbert (G.). — de Joannis (abbé). — Jordan (C.). — de Lapparent (A.). — Lemoine (G.). — Noguier de Malijay (abbé N.). — d'Ocagne (M.). — Picard (É.). — Vignon (P.). — de Vorges (Cte E. Domet). — Zeiller (R.).

Départements : *Aisne :* **Braine** : Wolf. — *Allier :* **Cérilly** : Dumas-Primbault (H.). — *Alpes-Maritimes :* **Menton** : Farina (D^r^). — *Aveyron :* **Penchot** (par Viviers) : Berlingin (M.). — *Basses-Pyrénées :* **Abbadia** (par Hendaye) : Verschaffel (A.). — *Bouches-du-Rhône :* **Marseille** : Bedel (abbé R.). — Fabry (L.). — *Cher :* **Bourges** : de Grossouvre (A.). — Moreux (abbé Th.). — *Côte-d'Or :* **Corberon** : Beauvois (Eug.). — *Drôme :* **Aiguebelle** (par Grignan) : Arduin (abbé A.). — *Eure-et-Loire :* **Villebeton** (par Châteaudun) : de Salvert (Vte). — *Gironde :* **Bordeaux** : Duhem (P.). — Kowalski (Eug.). — *Haute-Garonne :* **Toulouse** : de Montcheuil (abbé M.). — Sabatier (P.). — *Haute-Marne :* **Langres** : Raclot (abbé V.). — *Isère :* **La Combe de Lancey** (par Villard-

Bonnot) : du Boys (P.). — **Voiron** : de Kirwan (Ch.). — *Loire* : **Saint-Étienne** : Grand'Eury (C.). — Hervier (abbé J.). — *Loiret* : **Orléans** : d'Annoux (Cte H.). — *Mayenne* : **Laval** : de Maupeou (Cte). — Œhlert (D.-P.). — *Meurthe-et-Moselle* : **Ham** (par Longuyon) : Rachon (abbé P.). — **Longwy** : de Saintignon (Cte). — **Nancy** : Vaultrin. — *Nord* : **Cambrai** : Coulon (Dr). — **Lille** : d'Adhémar (Vte R.). — Barrois. — Mgr Baunard. — Bourgeat (chan.). — Delemer (J.). — Desplats (Dr). — Gosselet (J.). Guermonprez (Dr). — Leconte (F.). — Lenoble. — de Montessus de Ballore (Vte R.) — Witz (A.). — **Roubaix** : Faidherbe (Dr A.). *Oise* : **Compiègne** : de Vorges (A.). — *Puy-de-Dôme* : **Clermont-Ferrand** : du Ligondès (Vte). — *Rhône* : **Lyon** : Pepin (abbé Th.). — Roux (Cl.). — de Sparre (Cte). — **Saint-Georges-de-Reneins** : de Sparre (Cte). — *Savoie* : **Aix-les-Bains** : Dardel (Dr). — *Seine-et-Oise* : **Versailles** : Ariès (lieutt-colonel). — de Salvert (Vte). — *Seine-Inférieure* : **Rouen** : Lechalas (G.). — *Somme* : **Abbeville** : de Montessus de Ballore (Cte F.). — *Vaucluse* : **Sérignan** (par Vaucluse) : Fabre (J.-H.). — *Vienne* : **Verneuil** (par Migné) : Lebouteux (P.).

ESPAGNE

Madrid : Adan de Yarza (R.). — Dusmet y Alonso (J. M.). — Fita y Colomé, S. J. (R. P. F.). — Gonzalez de Castejon. — Grinda (J.). — Iniguez y Iniguez (Fr.). — Martinez y Saez (Fr.). — S. Exc. Mgr Rinaldini. — Solano y Eulate (Mis). — Torroja Caballé (Ed.). — **Barcelone** : Cirera y Salse (Dr L.). — **Bilbao** : Colegio de Estudios Superiores de Deusto (R. P. J. Man. Obeso, S. J.). — **Cuevas** (prov. Almeria) : Siret (L.). — **La Coruña** : Casarès (F.). — **San Sebastian** : Balbas (Th.). — **Segovia** : S. G. Mgr Miranda Bistuer. — **Séville** : Abaurrea (L.). — **Tortosa** (Tarragona) : Cirera, S. J. (R. P. R.). — R. P. Rector del Colegio del Jesùs. — **Valencia** : Vicent, S. J. (R. P.). — **Valladolid** : Rodriguez Risueno (E.). — **Zaragoza** : Navas, S. J. (R. P. L.). — Sanz (P.).

PAYS DIVERS

ALLEMAGNE : **Bitch** (Lorraine) : Kieffer (abbé J.-J.). — **Cologne** : Schmidt (A.). — **Possenhofen** : S. A. R. Charles-Théodore, duc en Bavière.

ANGLETERRE : **Hastings** : de Vregille, S. J. (R. P. P.). — **Dublin** (Irlande) : Coffey (D. J.). — Conway (A. W.). — Egan, S. J. (R. P. M.). — Ryan (H.). — Schoonjans, S. J. (R. P.). — **Saint-Hélier** (Jersey — Iles-de-la-Manche) : Dechevrens, S. J. (R. P. M.).

AUTRICHE : **Vienne** : S. Exc. Mgr Granito di Belmonte.

ITALIE : **Rome** : Carrara, S. J. (R. P. B.). — S. É. le cardinal Ferrata. — Hagen, S. J. (R. P.). — Mgr Ch. de T'Serclaes. — S. É. le cardinal S. Vannutelli. — **Bologna** : Costanzo (R. P. J.). — **Catane** (Sicile) : S. É. le cardinal Nava di Bontifé. — **Taormina** : Grandmont (Alph.).

PAYS-BAS : **Fauquemont** (Limbourg hollandais) : Wulf, S. J. (R. P. Th.). — **Gemert** : de Sinéty, S. J. (R. P. R.). — **Maestricht** : Bleuset, S. J. (R. P. J.). — **Oudenbosch** : Bolsius, S. J. (R. P. H.). — **Rotterdam** : De Veer, S. J. (R. P.).

GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG : **Luxembourg** : Soisson (G.). — Wasmann, S. J. (R. P.).

PORTUGAL : **Lisbonne** : Pulido Garcia (J.).

SUISSE : **Fribourg** : Daniels (Dr Fr.) — De Munnynck, O. P. (R. P.). — Kirsch (Mgr J.-P.).

TURQUIE : **Constantinople** : Sarret (J.).

CANADA : **Québec** : Mgr Laflamme.

ÉTATS-UNIS : **Brooklyn** (New-York) : Newton (génér. J.). — **Notre-Dame** (Indiana) : Kirsch (R. P. Al.-M.). — **Washington** : Georgetown College Observatory.

MEXIQUE : **Puebla** : Spina, S. J. (R. P. P.).

INDES ANGLAISES : **Calcutta** : Collège Saint-François-Xavier.

SYRIE : **Beyrouth** : Collangettes, S. J. (R. P). — Lammens, S. J. (R. P. H.).

CHINE : Lefebvre (R. P. Maurice).

MADAGASCAR : **Tananarive** : Camboué, S. J. (R. P. P.).

Membres décédés

ABBELOOS (Mgr).	Louvain.
DI BARTOLO (can.)	Palermo (Sicile).
DE TILLY (lieutenant-général) . .	Bruxelles.
GOOSSENS (S. É. le card.). . . .	Malines.
GOOSSENS, S. J. (R. P.)	Congo.
LOSSEN	Heidelberg (Allemagne).
MULLENDERS.	Liége.
DE OLAVARRIA	Madrid.
PATRONI (Mgr)	Rome.
DE RIDDER	Bruxelles.
SCHOBBENS	Anvers.
VENNEMAN (Dr).	Louvain.

Listes des membres inscrits dans les sections

1re Section

Mathématiques, Astronomie, Géodésie. — Mécanique

MM. Adan de Yarza.
Vte d'Adhémar.
Balbas.
Belpaire.
Berlingin.
de Bien.
Bivort.
R. P. H. Bosmans, S. J.
Boussinesq.
du Boys.
Carathéodory.
Abbé Coppieters de Stockhove.
R. P. J. Costanzo.
Daniels.
De Bloo.
Jules Dejaer.
Delvosal.
Dusausoy.
Dutordoir.
R. P. M. Egan, S. J.
Fabry.
Fagnart.
Gauthier-Villars.
Abbé Gelin.
R. P. Gillard, S. J.
Goedseels.
Gonzalez de Castejon.
Grinda.
de Grossouvre.
R. P. Hagen, S. J.
Havenith.
Humbert.
Iniguez.
Fern. Jacobs.
MM. Camille Jordan.
Jourdain.
Lamarche.
Lambin.
R. P. J. Lannoy, S. J.
Le Paige.
Vte du Ligondès.
Mansion.
Cte de Meeus.
Vte R. de Montessus.
Abbé Moreux.
Neuberg.
E. Pasquier.
Abbé Pepin.
E. Picard.
Abbé D. Reynaert.
de Ridder.
Vte de Salvert.
Pelegrin Sanz.
R. P. Schul, S. J.
Sépulchre.
Soisson.
Soreil.
Cte de Sparre.
R. P. Spina, S. J.
Suttor.
Théron.
Thiébaut.
Timmermans.
Torroja Caballé.
Cte Jacques de T'Serclaes.
Cte Aymard d'Ursel.
Ch.-J. de la Vallée Poussin.
E. Vandenpeereboom.

MM. Vanderlinden.
Verriest.
Verschaffel.
Wasteels.

MM. R. P. F. Willaert, S. J.
Wodon.
Wolf.
F. Wolters.

Sous-section des Sciences techniques

MM. André.
Baclé.
Barbé.
Beaujean.
Berleur.
G. Béthune.
Bosquet.
F. Breithof.
Carlier.
Cousin.
Crame.
Daubresse.
De Coster.
Deleu.
Delmer.
De Preter.
Dumont.
Dutillieux.
de Fooz.
Gerard.
Gilbert.
Godfrind.
Hachez.
Hans.
Haton de la Goupillière.
Helleputte.
Kennis.

MM. Kersten.
de Kirwan.
Koltz.
Lagasse-de Locht.
C. Lambert.
M. Lambert.
Omer Lambiotte.
Victor Lambiotte.
Lechalas.
Lhoest.
C[te] de Maupeou.
Merten.
Abbé de Montcheuil.
J. Nyssens.
d'Ocagne.
Renier.
De Reul.
Richald.
de Selliers de Moranville.
Sibenaler.
H. Siret.
Smits.
Springael.
E. Storms.
Witz.
G. Wolters.

2e Section

Physique. — Chimie. — Métallurgie. — Météorologie et Physique du globe

MM. Abaurrea.
Allard.
Amagat.
Ariès.
Bayet.
R. P. Bleuset, S. J.

MM. Blondel.
Branly.
Bruylants.
Bulliot.
Abbé Capelle.
R. P. Carrara, S. J.

MM. Carlier.
Casarès.
R. P. Cirera, S. J.
R. P. Collangettes, S. J.
Conway.
R. P. Dechevrens, S. J.
R. P. De Greeff, S. J.
Delemer.
Chanoine Demanet.
Abbé De Muynck.
De Preter.
François De Walque.
Duhem.
Dumas-Primbault.
Chanoine Gautier.
Gesché.
Abbé Hamonet.
Harmant.
de Hemptinne.
Louis Henry.
Paul Henry.
R. P. Jacopssen, S. J.
Abbé de Joannis.
Kowalski.
Lambot.
Chanoine Laminne
Leconte.
Lemoine.
Lenoble.
de Locht.
R. P. Lucas, S. J.

MM. Abbé Maes.
Frère Maubert.
R. P. Meurs, S. J.
Abbé Noguier de Malijay.
R. P. Pauwels, S. J.
Chanoine Pieraerts.
Abbé Pierre.
Abbé Raclot.
de Reul.
Roland.
Ryan.
Sabatier.
Cte de Saintignon.
Sarret.
R. P. Schaffers, S. J.
R. P. Scheuer, S. J.
Schmidt.
R. P. Ch. Schoonjans, S. J.
Somville.
Chanoine Thiéry.
R. P. Thirion, S. J.
Abbé Tits.
E. Vanderlinden.
Van der Mensbrugghe.
Vandevyver.
Van Overbergh.
Abbé Verhelst.
R. P. de Vregille, S. J.
Willame.
Abbé Wilmotte.
Witz.
R. P. Th. Wulf, S. J.

3e Section

Géologie, Minéralogie. — Zoologie. — Paléontologie. — Anthropologie Ethnographie, Science du langage. — Géographie

Frère Alexis.
MM. Abbé Arduin.
Chanoine Baltus.
Beauvois.
Abbé Bedel.
Mis de la Boëssière-Thiennes.
R. P. H. Bolsius, S. J.
Bouillot.
Chanoine Bourgeat.

MM. M. de Brouwer.
Abbé Cabeau.
R. P. Camboué, S. J.
J. Capart.
Cicioni.
Abbé J. Claerhout.
Cloquet.
L. Coomans.
V. Coomans.

MM. Chanoine De Brouwer.
R. P. Delattre, S. J.
Chanoine Delvigne.
R. P. De Munnynck, O. P.
Denoël.
R. P. A. Deschamps, S. J.
De Wildeman.
R. P. Fr. Dierckx, S. J.
Chanoine H. de Dorlodot.
S. de Dorlodot.
Bon Drion.
Abbé Dumez.
Dusmet y Alonso.
J.-H. Fabre.
Fauvel.
R. P. Fita, S. J.
Dom Grég. Fournier, O. S. B.
Abbé de Foville.
Georis.
Bon Gillès de Pélichy.
Gollier.
Gosselet.
Mgr Graffin.
Grand' Eury.
Abbé Grégoire.
Bon Greindl.
Mgr Hebbelynck.
J. Henry.
Henseval.
Abbé Hervier.
Heynen.
Huwart.
Kaisin.
Kersten.
Abbé Kieffer.
R. P. A.-M. Kirsch.
Mgr J.-P. Kirsch.
de Kirwan.
Kurth.
Mgr Lamy.
R. P. Lammens, S. J.
A. de Lapparent.
Dr H. Lebrun.
Leclercq.
Mgr Ferdinand Lefebvre.
R. P. M. Lefebvre.

MM. Lejeune de Schiervel.
Cte Adolphe de Limburg-Stirum.
R. P. J. Maréchal, S. J.
Martinez y Saez.
Abbé Meunier.
Ferdinand Meunier.
Mgr Monchamp.
Cte F. de Montessus.
R. P. L. Navás, S. J.
Abbé Nickers.
Nollée de Noduwez.
P. Nyssens.
D.-P. OEhlert.
de Pierpont.
R. P. A. de Poulpiquet, O. P.
Abbé Rachon.
Cte de Ribaucourt.
Rodriguez Risueno.
Roux.
R. P. Schmitz, S. J.
Th. Schmitz.
Schreiber.
R. P. de Sinéty, S J.
L. Siret.
Solano y Eulate.
Stainier.
Abbé Storms.
Chanoine Swolfs.
Mis de Trazegnies.
G. t'Serstevens.
Van Bastelaer.
Abbé F. Van Caeneghem.
Chan. G. Van den Gheyn.
R. P. Van den Gheyn, S. J.
Vanderyst.
Van Ortroy.
Vaultrin.
R. P. Vicent, S. J.
Vignon.
Albert de Vorges.
R. P. Wasmann, S. J.
Mis de Wavrin.
Chanoine Wouters.
Cher F. de Wouters.
Zeiller.

4e Section

Anatomie, Physiologie. — Hygiène. — Pathologie, Thérapeutique, etc.

MM. Baivy.
Bibot.
Borginon.
L. Cirera y Salse.
Coffey.
Convent.
Cordier.
Coulon.
Cousot.
J. Cuylits.
Dardel.
Debaisieux.
De Buck.
Degive.
J. De Lantsheere.
Delaunois.
Delcroix.
Delétrez.
De Moor.
Denys.
Deroitte.
Desplats.
Dufrane.
Dupont.
Duquenne.
Faidherbe.
Farina.
Rob. Fernandès.
X. Francotte.
Giele.
Gilson.
Glibert.
Glorieux.
Goris.
Guermonprez.
Haibe.
Étienne Henrard.
Félix Henrard.

MM. Heymans.
Huyberechts.
Lahousse.
Laruelle.
Laurent.
Lebrun.
Martin.
Masen.
Matagne.
Meesen.
A. Moeller.
Nicolas Moeller.
Morelle.
Mullie.
A. Pasquier.
Proost.
Schockaert.
Simonart.
Smets.
Stouffs.
J. Stouffs.
Struelens.
O. Swolfs.
Tits.
Ch. Van Aubel.
Van Biervliet.
Vanderstraeten.
Van Durme.
Van Gehuchten.
Van Hoeck.
Van Keerberghen.
Van Swieten.
Van Velsen.
Van Ysendyck.
Verriest.
Vervaeck.
Warlomont.
Aug. Wéry.

5e Section

Agronomie. — Économie sociale, Statistique. — Sciences commerciales
Économie industrielle

MM. Cte d'Annoux.
Attout-Van Cutsem.
Beaujean.
Béchaux.
Aug. Beernaert.
Cte de Bergeyck.
Berleur.
Bertrand.
Mgr Béthune.
G. Blondel.
de Briey.
Brifaut.
Cappellen.
Cartuyvels.
R. P. Castelein, S. J.
Cooreman.
Craninex.
David.
Herman De Baets.
Chanoine De Becker.
De Greef.
Camille De Jaer.
Delaire.
Léon De Lantsheere.
De Vadder.
De Vuyst.
Ernest Dubois.
Dumortier.
Dupriez.
Eeckhout.
Fenaux.
François.
G. Francotte.
H. Francotte.
Grandmont.
Guelton.

MM. Halot.
Albert Henry.
Hervy.
Albert Joly.
Léon Joly.
Lebouteux.
Chanoine Legrand.
Leplae.
Cte Édouard de Liedekerke.
Limpens.
Cte de Mérode-Westerloo.
Bon de Moreau d'Andoy.
Nerincx.
Pecher.
Jules Peeters.
Poullet.
Chanoine Proost.
Pulido Garcia.
Reuther.
Roberti.
Roersch.
Chev de Selliers de Moranville.
Smekens.
Cte van den Steen de Jehay.
Stinglhamber.
Cte Fr. van der Sraten-Ponthoz.
Taymans.
Van den Bossche.
Van der Smissen.
R. P. Vermeersch, S. J.
Versteylen.
Cte Amédée Visart de Bocarmé.
Visart de Bocarmé.
Vollen.
Cte Domet de Vorges.
Waucquez.

MEMBRES DU CONSEIL

1905-1906

Président, M. le Lieutenant Général J. De Tilly (¹).
1er Vice-Président, M. A. Witz.
2e Vice-Président, M. Éd. Van der Smissen.
Secrétaire, M. P. Mansion.
Trésorier, M. Éd. Goedseels.
Membres, MM. le Marquis de la Boëssière-Thiennes.
L. Cousin.
L. De Lantsheere.
Chanoine Delvigne.
Fr. De Walque.
G. De Walque (²).
Ch. Lagasse-de Locht.
E. Pasquier.
A. Proost.
Comte Fr. van der Straten-Ponthoz.
Chanoine Swolfs.
Ch.-J. de la Vallée Poussin.
G. Van der Mensbrugghe.
Dr A. Van Gehuchten.
Dr R. Warlomont.

(¹) Décédé le 4 août 1906.
(²) Décédé le 3 décembre 1905.

MEMBRES DU CONSEIL [1]

1906-1907

Président, M. A. Witz (1910).
1re Vice-Président, M. L. Cousin (1909).
2e Vice-Président, M. Ch. de la Vallée Poussin (1910).
Secrétaire, M. P. Mansion (1907).
Trésorier, M. Éd. Goedseels (1908)
Membres, MM. le Marquis de la Boëssière-Thiennes (1910).
L. De Lantsheere (1910).
Chanoine Delvigne (1907).
Lieutenant Général J. De Tilly (1908) [2].
Fr. De Walque (1910).
Dr X. Francotte (1908).
Ch. Lagasse-de Locht (1909).
E. Pasquier (1909).
A. Proost (1910).
Éd. Van der Smissen (1907).
Comte Fr. van der Straten-Ponthoz (1908).
Chanoine Swolfs (1909).
G. Van der Mensbrugghe (1907).
Dr A. Van Gehuchten (1908).
Dr R. Warlomont (1907).

---

(1) Le nom de chaque membre est suivi de l'indication de l'année où expire son mandat.
(2) Décédé le 4 août 1906.

BUREAUX DES SECTIONS

1906-1907

1re Section

Président, M. G. Humbert.
Vice-Présidents, MM. Ch.-J. de la Vallée Poussin.
le Vicomte R. d'Adhémar.
Secrétaire, M. H. Dutordoir.

Sous-Section Technique

Président, M. Ch. Lagasse-de Locht.
Vice-Présidents, MM. A. Witz et C. Beaujean.
Secrétaire, M. G. de Fooz.

2e Section

Président, M. A. de Hemptinne.
Vice-Présidents, MM. Willame et Vandevyver.
Secrétaire, R. P. Lucas, S. J.

3e Section

Président, M. le Cte A. de Limburg-Stirum.
Vice-Présidents, MM. l'abbé Claerhout et Éd. De Wildeman.
Secrétaire, M. F. Van Ortroy.

4e Section

Président, M. Matagne.
Vice-Présidents, MM. Struelens et Dufrane.
Secrétaire, M. J. De Lantsheere.

5e Section

Président, M. Beernaert.
Vice-Présidents, MM. Leplae et Alfred Nérinckx,
Secrétaire, M. Éd. Van der Smissen.

QUESTIONS DE CONCOURS PROPOSÉES EN 1906.

Première section. — *Trouvez les caractères distinctifs des maxima ou minima d'une fonction de trois variables $f(x, y, z,)$, dans le cas où l'ensemble des termes du second ordre, dans le développement de $f(a+h, b+k, c+l) - f(a, b, c,)$ peut s'annuler sans changer de signe.*

Deuxième section. — 1° *Nouvelles recherches sur le sélénium.*

2° *Nouvelles recherches sur les drosomètres.*

Troisième section. — *Établissement d'une carte de l'État Indépendant du Congo.*

Quatrième section. — *On demande une étude expérimentale sur la tuberculose et son bacille.*

Les mémoires en réponse à ces questions doivent être envoyés au secrétariat avant le 1er octobre 1907 (art. 14 du règlement).

SESSION DU 25 OCTOBRE 1906

A BRUXELLES

—

SÉANCE DES SECTIONS

—

Première section

—

M. Mansion fait la communication suivante *Sur une note de géométrie générale de M. Blichfeldt.*

La géométrie non euclidienne de Lobatchefsky et de Bolyai a été créée par ces géomètres en admettant les définitions, les axiomes et les postulats d'Euclide, un seul excepté, le 5e (postulat des trois droites). De même, la géométrie non euclidienne de Riemann a été construite en ne rejetant d'Euclide que son 6e postulat (postulat des deux droites).

Mais Lobatchefsky, De Tilly, Veronese, Pieri et d'autres géomètres ont poussé plus loin l'étude des premiers principes de la géométrie. De Tilly en particulier, reprenant à son insu une idée de Leibniz et de Cauchy, a basé la géométrie entière sur les idées de points et de distance. En adoptant son mode d'exposition, on part de ces notions premières irréductibles ; on s'en sert pour définir la sphère, la circonférence, le plan, la droite, les longueurs, les aires, les volumes ; on trouve en géométrie euclidienne et en géométrie non euclidienne, les relations qui caractérisent la droite, le plan, l'espace à trois dimensions. Réciproquement de ces relations, on peut redescendre, par l'analyse, à tous les résultats de l'exposé élémentaire, ce qui prouve que les définitions, les axiomes et les postulats admis explicitement ou implicitement dans l'exposé élémentaire sont compatibles entre eux. Réunis, l'exposé élémen-

taire et l'exposé analytique inverse constituent un système de géométrie à la fois inattaquable au point de vue de la rigueur et traduisant de trois manières, *pratiquement équivalentes*, les phénomènes de la géométrie physique.

Riemann, Helmholtz, Lie et d'autres, après eux, ont essayé de pénétrer plus profondément dans l'étude des premiers principes de la géométrie par une voie purement analytique, sans recourir aucunement à la méthode élémentaire d'Euclide. Au dire des connaisseurs, Riemannn et Helmholtz ont esquissé et Lie a trouvé complètement la solution d'un problème d'analyse qui, pour d'éminents mathématiciens, se confond avec l'établissement des principes fondamentaux de la science de l'espace. Cependant, il faut bien le reconnaître, ni Lie, ni ses devanciers, n'ont donné une signification *géométrique* proprement dite aux coordonnées des êtres analytiques qu'ils appellent points, ou aux paramètres qui entrent dans les formules de transformation employées. Par suite, les recherches dont nous venons de parler ne semblent avoir de géométrique que la terminologie.

Il en est autrement d'un travail que M. F.-H. Blichfeldt a publié, il y a quelques années, sous le titre : *On the Determination of the Distances between two Points in Space of n Dimensions* (TRANSACTIONS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, october 1902, vol. 3, n° 4, pp. 467-481) et qui est écrit à la fois dans le sens des recherches de Lie et de celles de De Tilly. Pour M. Blichfeldt, les coordonnées d'un point dans un espace à trois dimensions, par exemple, sont les distances de ce point à trois points fixes de cet espace ou des fonctions de ces distances, ce qui donne immédiatement un sens géométrique à tous ses résultats. Moyennant un certain nombre de définitions et d'axiomes dont le plus caractéristique est le suivant : *la distance de deux points est une fonction algébrique de leurs coordonnées,* et en s'aidant des recherches de Lie, M. Blichfeldt détermine la distance de deux points en fonction de leurs coordonnées, dans les espaces à 1, 2, 3, 4-dimensions. Il retrouve ainsi l'expression de la distance dans l'espace euclidien et dans l'espace non euclidien à trois dimensions, *puis quatre autres expressions analogues et quatre systèmes de géométrie correspondants,* auxquels Lie était aussi arrivé sous forme purement analytique.

D'après les formules mêmes qui donnent les distances dans ces espaces nouveaux, *ces espaces ne sont pas homogènes et deux d'entre eux jouissent d'autres propriétés singulières quand deux points tendent l'un vers l'autre.* Par suite, ils ne semblent pas devoir entrer en ligne de compte quand on étudie la géométrie physique.

Le R. P. Bosmans, S. J., analyse *une note historique sur le triangle arithmétique de Pascal* dont voici le texte :

Les erreurs commises à propos des noms propres attribués à certains théorèmes ne se comptent plus. Mais l'une des plus courantes et des moins justifiées est bien celle qui consiste à baptiser le triangle arithmétique des coefficients du binôme du nom de triangle de Pascal. Je l'ai déjà signalée, en passant, dans un autre mémoire (*) et je n'y reviendrais pas aujourd'hui si M. Cantor lui-même ne parlait pas sur le sujet d'une manière équivoque (**). D'après l'éminent historien des mathématiques, le triangle arithmétique serait bien, il est vrai, imaginé par Stifel (***), mais la disposition donnée par Pascal (IV) à son triangle différerait trop de celle

---

(*) *Le Fragment du Commentaire d'Adrien Romain sur l'Algèbre de Muhamed ben Musa el-Chowârezmi.* ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE. Bruxelles, 1906, t. 30, p. 20, en note.

(**) *Vorlesungen ueber Geschichte der Mathematik,* 2e éd. Leipzig, Teubner, 1900, p. 750.

Il convient de citer la conclusion du passage. Après avoir décrit les différences caractéristiques des triangles de Stifel et de Pascal, M. Cantor s'énonce comme suit : « Es wäre also in höchsten Grade ungerecht, eine Abhängigkeit Pascal's von Stifel zu vermuthen. Selbst wenn Pascal die Arithmetica integra gekannt hat, was wir noch sehr bezweifeln, war das arithmetische Dreieck durchaus sein geistiges Eigenthum. »

Oui, mais comme nous le dirons tantôt, il n'y avait pas que l'*Arithmetica integra*, pour faire connaître à Pascal le triangle de Stifel. Ne pouvait-il pas l'avoir lu, par exemple dans une des nombreuses éditions de l'*Arithmetique* de Jacques Peletier du Mans; petit traité qui fut si répandu en France et qui y jouit d'une vogue si méritée ?

(***) *Arithmetica Integra Authore Michaele Stifelio. Cum praefatione Philippi Melanchthonis.* Norimbergæ apud Iohan. Petreium. Anno Christi M.D.XLIIII, Cum gratia & priuilegio Cæfareo atq; Regio ad Sexennium (Univ. de Louvain, Scienc. 244), f° 44 v°.

(IV) *Traité Dv Triangle Arithmetiqve, Avec Qvelqves Avtres Petits Traitez Svr La Mesme Matiere. Par Monsieur Pascal.* A Paris, Chez Gvillavme Desprez,

du triangle de Stifel, pour ne pas regarder cette deuxième disposition comme absolument distincte de la première.

Si cette remarque de M. Cantor était fondée, le nom de triangle de Pascal serait évidemment justifié. Mais il n'en est rien, car malgré sa compétence hors pair et son autorité, l'illustre professeur d'Heidelberg pose mal, semble-t-il, le problème.

En effet, de Stifel à Pascal, le triangle arithmétique se rencontre fréquemment dans les traités d'arithmétique et d'algèbre, où les auteurs lui donnent à l'envi les formes les plus diverses.

Voilà un fait important, dont il faut tenir compte. Sans doute, ce fait ne peut guère avoir échappé à l'érudition de Cantor, mais le savant historien paraît cependant le perdre ici un peu trop de vue. Ce n'est pas au seul triangle de Stifel qu'il convient de comparer le triangle de Pascal. De l'*Arithmetica Integra* au *Traité du Triangle Arithmétique* il s'écoule cent vingt et un ans, plus d'un siècle. Or, si l'on tient compte des modifications subies dans l'intervalle par le triangle arithmétique, il serait bien difficile d'indiquer en quel détail un peu notable la forme de Pascal diffère de celle de ses prédécesseurs.

Pour le faire voir commençons par mettre sous les yeux du lecteur les deux formes extrêmes en discussion, les triangles de Stifel et de Pascal.

Le triangle de Stifel est parfois reproduit sans modifications, par les arithméticiens du XVI[e] siècle, sous cette première forme. C'est sous celle-là, qu'on le lit, entre autres, dans l'*Arithmétique* (*) de Jacques Peletier du Mans.

---

ruë Saint Iacques, à Saint Prosper. M.DC.LXV. (Bibl. Royale de Belgique V. H. 8135). C'est l'édition originale qui est très rare. Le triangle y est donné sur une planche hors texte.

Dans les rééditions on a, avec raison, abandonné cette disposition. Ainsi dans les *Œuvres complètes de Blaise Pascal*, t. 3, Paris, Hachette, 1864, le triangle se trouve p. 244.

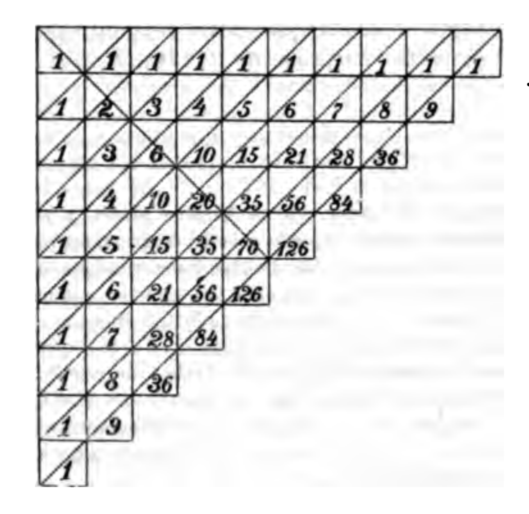
(*) *L'Aritmetiqve de Iaqves Peletier dv Mans, Departie en quatre liures, Troisieme edition, reueuë & augmentee*. Par Iean De Tovrnes. M.DC.VII. A Cologni (Univ. de Louvain, Scienc. 570), p. 178.

Je n'ai que cette seule édition sous la main, mais il y en a plusieurs autres, notamment : Poitiers, 1548, 1549 et 1552; Lyon, 1554 et 1570.

Triangle de Stifel

1							
2							
3	3						
4	6						
5	10	10					
6	15	20					
7	21	35	35				
8	28	56	70				
9	36	84	126	126			
10	45	120	210	252			
11	55	165	330	462	462		
12	66	220	495	792	924		
13	78	286	715	1287	1716	1716	
14	91	364	1001	2002	3003	3432	
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310

Triangle de Pascal



Je dis intentionnellement : « reproduit sous cette *première* forme ». Car neuf ans plus tard, en 1553, dans son édition de la *Coss* de Christophe Rudolff de Jauer (*), Stifel lui-même en adopte une autre se rapprochant déjà beaucoup de celle de Pascal.

Triangle de la Coss de Christophe Rudolff de Jauer

x^2	2	1					
x^3	3	3	1				
x^4	4	6	4	1			
x^5	5	10	10	5	1		
x^6	6	15	20	15	6	1	
x^7	7	21	35	35	21	7	1

Cette nouvelle forme a ses partisans, comme la première et semble plaire notamment à certains géomètres des Pays-Bas. Il est d'ailleurs remarquable que si de nombreux géomètres antérieurs à Pascal ont employé le triangle arithmétique, aucun d'eux ne semble attacher la moindre importance aux diverses dispositions qu'il affecte. Quoi qu'il en soit c'est sous la forme de la *Coss* de Christophe Rudolff que nous rencontrons le triangle, par exemple dans les éditions de la *Practicque om te leeren*

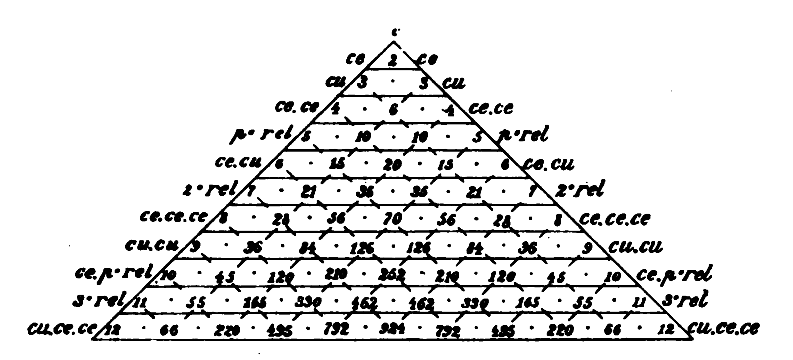
(*) Je n'ai pas le volume à ma disposition. J'en transcris le titre, d'après Terquem : *Christophe Rudolf.* BULLETIN DE BIBLIOGRAPHIE D'HISTOIRE ET DE BIOGRAPHIE MATHÉMATIQUES, t. 1, Paris, 1835, p. 71. *Die cosz Christorfs Rudolfs mit schönen Exemplen der cosz, durch Michael Stiffel, gebessert und sehr gemehrt, 1571.* Le titre porte 1571 ; mais à la fin de l'ouvrage on lit : « Gedruckt zu Königsperg in Preussen, durch Alexandrum Behm von Lu'homissel ; vollendet am dritten Tag des herbstmonnats als man zalt nach der geburt Unsers Lieben Herren Jesu Christi 1554 ». L'ouvrage existe au British Museum.

Le tableau que je reproduis ici est emprunté aux *Vorlesungen* de Cantor, t. 2, p. 445. On le trouve également dans : *Die deutsche Coss. von P. Treutlein, Professor am Gymnasium zu Karlsruhe.* ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK, t. 2. Leipzig, 1879, p. 43. Pour éviter les embarras typographiques, j'y ai remplacé, dans la première colonne, les signes cossiques anciens par la notation moderne équivalente.

Cypheren, de Nicolas Peetersen de Deventer (*), ouvrage qui fut longtemps le manuel classique d'arithmétique et d'algèbre dans les écoles des Pays-Bas (**).

Passons au *General Trattato di Numeri et Misure* de Tartaglia (***) qui parut à Venise de 1556 à 1560. Le triangle y affecte la forme suivante :

Triangle de Tartaglia



(*) *Practicqve Om te Leeren Rekenen Cypheren ende Boeckhouwen | met die Regel Coss | ende Geometrie seer profytelijcken voor allen Coopluyden. Van nieus Ghecorrigeert ende vermeerdert | Deur Nicolaum Petri Dauentriensem* (Beau portrait de l'auteur, avec la devise : « L'homme propose et Dieu dispose A° 1583 ».) Anno M. D. XCI.— A la dernière page : t'Amstelredam, By Barendt Adriaensz. Wonende inde Waermoestraet | Int Gulden Schrijff-boeck. A° M. D. XCI. Ende men vintse te coop by Claes Pietersz. Schoolmeester | wonende op de Oude-Zijdts Burch-wal | Int Gulden Claver-blat (Univ. de Louvain. Sciences 293); f° 130 v°.

Même titre : t'Amsterdam | by Cornelis Claesz. opt Water int Schrijf-boeck. Anno 1605 (Univ. de Louvain, Sciences 573); f° 130 v°.

Même titre t'Amstelredam, Door Hendrick Laurentsz. Boeckvercooper op het water int Schrijf-boeck. Anno 1635 (Univ. de Louvain, Sciences 574); f° 135 v°.

La première édition est de 1583. Je ne l'ai pas vue.

(**) « Nicolaus Peetersen, dit Adrien Romain, arithmeticae etiam secretioris algebraïcae peritissimus, cujus Arithmetica Belgica lingua conscripta *omnium teritur manibus,* discipulosque e suâ scholâ emittit doctissimos ». *Ideae Mathematicae pars prima, sive Methodvs Polygonorvm... Authore Adriano Romano Lovaniensi Medico et Mathematico.* Lovanii, Apud Ioannem Masium. Typogr. Iur. Anno ch. CIↃ. IↃ. XCIII. Dans l'avis au lecteurs, f° ** v°.

(***) *La seconda Parte Del General Trattato Di Nvmeri Et Misvre Di*

Faites tourner le triangle de Tartaglia d'un angle de 45 degrés de manière à rendre la suite des nombres naturels horizontale en ramenant le chiffre 2 au coin supérieur de gauche; remplacez-y les signes cossiques par l'unité, vous aurez le triangle de Pascal.

Cette forme eut autant de vogue que celles de Stifel. On la rencontre, par exemple, dans la *Regula Cos of Algebra* de Brasser (*).

Chez Albert Girard (**) et chez Stevin (***) elle subit de légers changements.

Triangle d'Albert Girard	*Triangle de Stévin*
1	20
1 1	3 . 30
1 2 1	4 . 6 . 40
1 3 3 1	5 . 10 . 10 . 50
1 4 6 4 1	6 . 15 . 20 . 15 . 60

Nicolo Tartaglia. Nellaqvale In Vndeci Libri Si Notifica La Piv Elevata, Et Speculativa Parte Della Pratica Arithmetica, laqual è tutte le regole & operationi praticali delle progressioni, radici, proportioni, & quantita irrationali. In Venegia per Curtio Troiano dei Nauò. M. D. LVI. (Univ. de Louvain, Sciences 153); f° 69 v°.

La figure de Tartaglia a été reproduite avec exactitude dans l'*Histoire des Sciences Mathématiques en Italie depuis la Renaissance jusqu'à la fin du XVIIe siècle*, par Guillaume Libri. Paris, Jules Renouard et Cie, t. 3, p. 362.

Les signes cossiques placés aux deux côtés du triangle, sont ceux des douze premières puissances de l'inconnue.

(*) *Regula Cos, Of Algebra, Zijnde de alder-konstrijcken Regel om het ombekende bekent te maken. Ofte Een Korte Onderwijsinge | waer in geleert werdt het Uyttrecken der Wortelen | soo verre men begeeren mach. De spetien in Surdische getallen, Twee-namige getallen, Cossische getallen. De vergelijckingen van φ, ƺ, Ꝣ, etc. met Exempelen daer toe dienende. Door J. R. Brasser, geadmitteert Lantmeeter tot Hoorn. Noch Is hier by ghevoeght de Geometria van Nicolaus Petri Daventriensis, ende andere Questien van de Algebrae. Als mede Eenige Exempelen van Gerrit Evertsz. Backer, Schoolmeester tot Gracht.* 't Amsterdam, By Gerrit van Goedesbergh, Boeckverkooper op 't Water | aen de Nieuwebrugh | in de Delfsche Bybel. Anno 1663 (Bibl. Royale de Belgique, V. H. 8068). pp. 2 et 3.

(**) *Invention nouvelle en l'algebre par Albert Girard Mathematicien...* A Amsterdam. Chez Guillaume Iansson Blaeuw M. DC. XXIX. Réimpression fac-similé par D. Bierens de Haan. Leyde, 1884; f. (E_4) r°.

(***) *L'Arithmétique De Simon Stevin de Bruges...* A Leyde, De l'Imprimerie

On pourrait signaler encore d'autres modifications plus importantes. Voici entre autres la disposition adoptée par Adrien Romain (*).

Triangle d'Adrien Romain

(1)	(2)	(3)	(4)	
1	1	1	1	
1	2	3	4	&c.
	1	3	6	
		1	4	
			1	.

Mais je crois en avoir dit assez pour conclure.

On voit tout d'abord, rien que par ces quelques exemples, combien l'emploi du triangle arithmétique est fréquent antérieurement à Pascal. On remarque aussi avec quelle rapidité la forme primitive adoptée par Stifel se modifie, pour se rapprocher peu à peu de celle du géomètre français.

Appeler triangle de Pascal une figure d'un usage antérieur aussi prolongé, aussi universel, est une coutume que rien ne justifie.

Il faudrait une bonne fois en perdre l'habitude.

Le vrai nom du triangle arithmétique est : *Triangle de Stifel.*

Que si on partageait l'avis de M. Cantor, en estimant la forme de Pascal trop différente de celle de Stifel pour ne pas la regarder comme distincte de celle-ci, encore faudrait-il nommer le triangle arithmétique *Triangle de Tartaglia.*

---

de Christophle Plantin. CIↃ. IↃ. LXXXV. p. 106. *Les Œuvres Mathématiques de Simon Stevin de Bruges...* A Leyde, Chez Bonaventure & Abraham Elzevier... CIↃ IↃCXXXIV, t. I, p. 25.

(*) *In Mahumedis Algebram* (Univ. de Louvain, Sciences 1302), p. 68. Voir sur cet ouvrage mon mémoire cité ci-dessus.

Les signes (1), (2), (3), (4) signifient respectivement x, x^2, x^3, x^4.

La conséquence à tirer de ce qui précède, n'est cependant pas que la formule du développement du binôme ne doive rien à Pascal. Mais, Paul Tannery l'a jadis fort bien démontré (*), le mérite du géomètre français est ailleurs.

Désignons par C_n^m le coefficient du terme de rang $n+1$ dans la formule du développement du binôme

$$(a+b)^m.$$

Le Triangle arithmétique est construit par la formule de récurrence

$$C_n^m = C_n^{m-1} + C_{n-1}^{m-1}.$$

C'est le stade atteint dès Stifel et Tartaglia et on s'y arrête pendant plus d'un siècle. Fermat et Pascal font parcourir à la formule du binôme un stade nouveau en trouvant entre les coefficients la relation,

$$C_n^m = \frac{m-n+1}{n} C_{n-1}^m.$$

Cependant, comme l'observe avec raison Paul Tannery, ce n'est pas dans le *Traité du Triangle Arithmétique*, mais dans celui des *Ordres numériques* (**) que Pascal donne cette dernière formule. Quant à Newton, dans la célèbre lettre à Oldenbourg, du 24 octobre 1676 (***), il ne parle pas, on se le rappelle, du cas de l'exposant entier et positif, et n'y traite que le développement en série convergente par la formule du binôme.

(*) Réponse à la *Question 615* de l'INTERMÉDIAIRE DES MATHÉMATICIENS, t. 3, Paris, 1896, p. 98.

(**) Publié pour la première fois à la suite du *Traité du Triangle Arithmétique* cité ci-dessus. Pour plus de détails voir la réponse de Paul Tannery à la *Question 615* de l'INTERMÉDIAIRE DES MATHÉMATICIENS, t. 3, p. 98 qui contient un excellent résumé de l'histoire de la formule du binôme de Newton.

(***) *Isaaci Newtoni Equitis Aurati Opuscula..., Collegit... Joh. Castillioneus.* T. I. Lausannae & Genevae Apud Marcum-Michaelem Bousquet & socios MDCCXLIV, pp. 328 sq.

M. Ch.-J. de la Vallée Poussin fait la communication suivante *Sur le mouvement instantané le plus général d'un solide.*

1. Dans la plupart des traités de mécanique, pour établir le théorème de Chasles sur le mouvement hélicoïdal d'un solide, on se sert de calculs analytiques assez longs, ou de la considération de divers mouvements simultanés, souvent des deux à la fois. De Tilly (MATHESIS, t. V, 1885) a donné du théorème une démonstration directe, mais qui repose sur un passage à la limite dont la simplicité est contestable.

Je crois donc intéressant de donner du théorème une démonstration qui n'emprunte que lem inimum possible de notions infinitésimales et qui, en se réduisant pour ainsi dire à la seule géométrie, est en même temps la plus simple.

2. Un solide est un ensemble de points dont les distances ne varient pas. Soient A et B deux points d'un solide de coordonnées x, y, z, et x', y', z'; cette propriété primordiale s'exprime par la relation analytique

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 = \text{const.}$$

Soient v et v' les vitesses des deux points A et B; il existe entre les vitesses de ces deux points une relation, qui s'obtient en dérivant la précédente,

$$(x-x')(v_x-v'_x) + (y-y')(v_y-v'_y) + (z-z')(v_z-v'_z) = 0.$$

Cette relation exprime que *la différence géométrique* $(v)-(v')$ *des vitesses des deux points* A *et* B *est normale à la droite* AB.

Ce théorème sur les vitesses apparaît comme le plus élémentaire et le plus simple. C'est le seul dont je veuille me servir pour étudier le mouvement du solide. Je l'appellerai le *lemme fondamental.*

Le lemme fondamental revient à dire que les projections des vitesses de deux points A et B d'un solide sur la droite AB sont égales. On en conclut que *la projection sur une droite de la vitesse d'un de ses points est une constante pour chaque droite.* Cette constante nous l'appellerons, en abrégé, *la projection de la vitesse sur la droite.*

3. La position d'un solide est déterminée par celle de trois de ses points non en ligne droite. Son mouvement fini est donc déterminé aussi par celui de trois de ses points non en ligne droite. Mais il n'est pas évident que les vitesses de trois points suffisent pour déterminer les vitesses de tous les autres. Nous commencerons par montrer que cette détermination résulte de notre lemme fondamental.

Supposons donc que l'on connaisse les vitesses de trois points A, B, C non en ligne droite appartenant à un solide. On peut d'abord en déduire la vitesse d'un point quelconque D du solide situé en dehors du plan ABC. En effet, on connaîtra les projections de la vitesse sur les trois droites AD, BD et CD qui aboutissent au point D et ne sont pas dans un même plan : ce sont les trois projections de la vitesse du point D, laquelle est donc connue. La vitesse d'un point quelconque du plan ABC peut maintenant se déterminer par le même procédé, en remplaçant l'un des trois points A, B, C par le point D dont la vitesse est connue.

Les vitesses de tous les points d'un solide sont donc déterminées par celles de trois points non en ligne droite. Donc, si l'on peut réaliser les vitesses de trois points tels par un certain mouvement du solide, les vitesses de tous les autres points seront réalisées en même temps. Pour démontrer que les vitesses de tous les points d'un solide peuvent s'obtenir par un mouvement hélicoïdal, il suffira d'établir que les vitesses de trois points peuvent s'obtenir de cette façon. C'est cette démonstration que nous allons faire.

4. Soient A, B et C trois points d'un solide, non en ligne droite et ayant les vitesses connues a, b et c. A partir d'une origine O, arbitraire, menons trois vecteurs équipollents à ces vitesses :

$$(OA_1) = a, \qquad (OB_1) = b, \qquad (OC_1) = c;$$

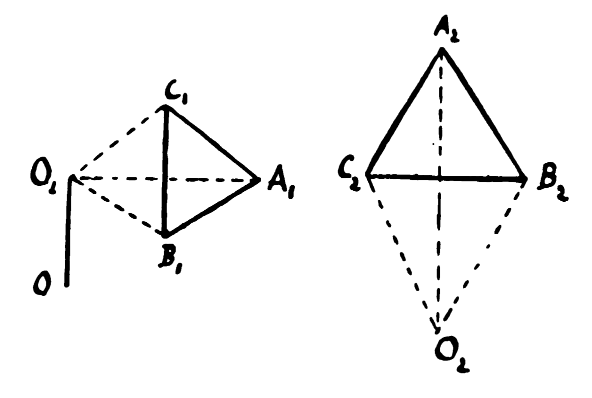
leurs extrémités A_1, B_1, C_1 seront les *index* des points A, B, C.

Si les vitesses a, b et c sont égales, les trois index coïncident, mais, dans ce cas, le mouvement des trois points (donc du solide) est une *translation instantanée*. Nous pouvons donc écarter cette hypothèse.

Si les trois index sont sur une même droite, deux au moins des

trois segments A_1B_1, B_1C_1 et C_1A_1 ne seront pas nuls, et, comme ils mesurent les différences géométriques des vitesses indiquées par les index, ils seront perpendiculaires aux côtés correspondants du triangle ABC en vertu de notre lemme fondamental. La droite $A_1B_1C_1$ sera donc normale au plan du triangle ABC. Dans ce cas, je construis l'index d'un quatrième point D du solide choisi hors du plan ABC; cet index D_1 ne sera plus sur la droite $A_1B_1C_1$, sinon cette droite devrait être normale aux quatre faces du tétraèdre ABCD, ce qui est impossible. J'aurai alors trois index non en ligne droite. Je peux donc toujours supposer, pour faire ma démonstration, que les trois index A_1, B_1, C_1 ne sont pas en ligne droite et constituent un triangle.

5. Considérons le triangle $A_1B_1C_1$ des index. Ses côtés sont perpendiculaires aux côtés correspondants du triangle ABC et il se trouve dans un plan que nous appellerons le *plan des index*. Projetons le triangle ABC en $A_2B_2C_2$ sur ce plan. Les côtés du triangle $A_1B_1C_1$ seront encore perpendiculaires aux côtés correspondants du triangle $A_2B_2C_2$, car, quand une droite située dans un plan est normale à une autre droite, elle l'est aussi à la projection de cette autre droite sur le plan. Donc les deux triangles $A_2B_2C_2$ et $A_1B_1C_1$ sont semblables et le second a tourné de 90°, dans un certain sens, par rapport au premier.



Projetons l'origine O en O_1 sur le plan des index et joignons O_1A_1, O_1B_1 et O_1C_1. On voit que les vitesses des trois points A, B et C

sont respectivement les sommes géométriques d'une vitesse commune OO_1, normale au plan des index, et des trois vitesses respectives O_1A_1, O_1B_1 et O_1C_1 parallèles à ce plan.

Construisons le point O_2 qui est l'homologue de O_1 par rapport à la figure $A_2B_2C_2$ et joignons O_2A_2, O_2B_2 et O_2C_2. Les deux figures $A_2B_2C_2O_2$ et $A_1B_1C_1O_1$ seront semblables, mais celle-ci aura tourné, dans un certain sens, de 90° par rapport à la première. Donc les vecteurs O_1A_1, O_1B_1 et O_1C_1 sont respectivement proportionnels à O_2A_2, O_2B_2 et O_2C_2 et font respectivement avec ces vecteurs un angle de 90° *dans le même sens*. On peut donc imprimer au triangle $A_2B_2C_2$ autour de O_1, et dans ce sens-là, une rotation ω, telle que les trois points A_2, B_2, C_2 prennent précisément les vitesses O_1A_1, O_1B_1 et O_1C_1.

Ceci établi, élevons au point O_2 une normale au plan des index et appelons cette normale *l'axe central*. Si l'on donne au triangle ABC la rotation ω autour de l'axe central, les vitesses des trois points A, B et C seront les mêmes que celles que nous venons d'indiquer pour A_2, B_2 et C_2.

Il en résulte que les vitesses des trois points A, B et C, sont respectivement les résultantes de deux vitesses, une vitesse commune équipollente à OO_1 et parallèle à l'axe central et une seconde vitesse due à la rotation ω autour de l'axe central.

Les vitesses des trois points A, B et C et par suite celles de tous les points du solide peuvent donc être réalisées par un *mouvement hélicoïdal*, c'est-à-dire par la combinaison d'une translation parallèle à l'axe central avec une rotation autour de cet axe. C'est le théorème que nous voulions démontrer.

5. *Remarque sur les six paramètres dont dépend le mouvement d'un solide.* — Nous avons défini plus haut (n° 2) ce que nous appelons la projection de la vitesse sur une droite. Il est intéressant de remarquer que l'on peut choisir pour les six paramètres dont dépend le mouvement d'un solide les six projections de la vitesse sur les six arêtes d'un tétraèdre.

En se servant de la théorie de la composition des rotations, on obtient même ainsi une démonstration très élégante du théorème sur le mouvement hélicoïdal.

Appelons, en effet, v_1, v_2, ... v_6 les projections de la vitesse sur les arêtes d_1, d_2, ... d_6 d'un tétraèdre. Sur l'arête opposée à d_1 construi-

sons un vecteur ω_1 dont le moment par rapport à d_1 soit v_1 (ce qui est toujours possible, car deux arêtes opposées ne sont pas dans un même plan). Construisons d'une manière analogue des vecteurs ω_2, ... ω_6 sur les autres arêtes. Je dis que *le mouvement du solide résulte de la combinaison des six rotations* ω_1, ω_2, ... ω_6.

En effet, la projection de la vitesse d'un point de d_1 sur la droite d_1 est égale au moment résultant du système ω_1, ... ω_6 par rapport à cette droite. Ce moment se réduit à celui du vecteur construit sur l'arête opposée, car les autres rencontrent d_1. La projection de la vitesse est donc égale à v_1. De même, sur les autres arêtes les projections de la vitesse seront bien v_2, ... v_6. Les vitesses des quatre sommets seront donc déterminées par ces projections et nous aurons réalisé le mouvement du solide.

Ces six rotations se réduisent à une seule rotation et à une translation dans le sens de l'axe (par la théorie de la réduction des rotations) et l'on retrouve le mouvement hélicoïdal.

M. Mansion fait connaître les recherches, infructueuses jusqu'à présent, qu'il a faites pour trouver une formule approchée de la forme

$$\frac{\text{sn}x}{x} = \frac{A + B\text{cn}x + C\text{dn}x}{1 + D\text{dn}x + Ek^2\text{cn}x}.$$

Diverses communications sont renvoyées à la session de janvier ainsi que le rapport sur un mémoire de M. de Montcheuil.

Sous-section technique

—

La sous-section technique s'est réunie, à l'issue de l'assemblée générale, sous la présidence de M. Ch. Lagasse-de Locht, président.

La sous-section complète son bureau par l'élection de deux vice-présidents; sont nommés :

Premier vice-président, M. A. Witz.
Second » M. C. Beaujean.

La parole est donnée à M. Albert Merten pour une communication sur *La forme des axes hydrauliques des cours d'eau dans un lit prismatique.*

Pour faciliter l'intelligence du résumé qui va suivre, nous rappelons quelques définitions.

L'axe hydraulique d'un cours d'eau est le lieu des points de la surface libre du cours d'eau où la vitesse est maximum. On peut admettre que dans un cours d'eau à lit prismatique concave c'est aussi le lieu des points où la hauteur d'eau est la plus grande.

L'axe hydraulique forme une courbe qui, rapportée à certains axes, a pour équation différentielle :

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{\chi}{\omega^3} bq^2}{\sqrt{1 - i^2} - \frac{q^2}{g} \frac{l}{\omega^3}},$$

les notations étant les suivantes :

i = pente de fond,
χ = périmètre mouillé,
l = largeur à la surface,
b = coefficient constant,
q = débit du cours d'eau,
g = accélération due à la pesanteur,
h = hauteur d'eau,
s = distance à une origine fixe d'un point où la hauteur d'eau est h,
ω = section droite du cours d'eau correspondant à une hauteur d'eau h.

En désignant par N la fonction formant le numérateur, par D celle formant le dénominateur, on a :

$$\frac{dh}{ds} = \frac{N}{D}.$$

Toutes les quantités autres que h étant fixées N et D deviennent des fonctions de h, car elles renferment χ, ω et l qui sont fonctions de h.

Deux valeurs de *h* jouent un rôle particulièrement important dans cette théorie :

1° *La hauteur du mouvement uniforme* désignée par H, elle annule le numérateur N,

2° *La hauteur de la droite du ressaut* désignée par H_1 ; elle annule le dénominateur D.

Une hauteur *h* à la fois supérieure aux deux valeurs H et H_1 est dite par définition *hauteur de 1er genre ;*

Une hauteur *h* intermédiaire entre H et H_1 est une *hauteur du 2e genre ;*

Enfin une hauteur *h* inférieure à la fois aux deux hauteurs en question est dite *hauteur du 3e genre ;*

Si $H > H_1$ le cours d'eau est dit à *faible pente de fond ;*

Si $H < H_1$ le cours d'eau est dit à *forte pente de fond ;*

Si $H = H_1$ le cours d'eau est dit *de passage.*

M. Merten a recherché systématiquement les points d'inflexion des axes hydrauliques ; il a montré que pour une hauteur du 2e genre il ne se présente jamais de point d'inflexion. Il a montré également que des points d'inflexion peuvent apparaître en nombre pair dans les cours d'eau à faible pente de fond, moyennant certaines conditions de forme de la section transversale du lit, et qu'il y a toujours inflexion, dans un cours d'eau à forte pente de fond, pour une hauteur d'eau plus petite que H et parfois également pour une hauteur d'eau supérieure à H_1.

Après ces considérations purement analytiques, M. Merten a étudié systématiquement l'influence de la pente et de la forme du cours d'eau sur l'existence des points d'inflexion et a donné la théorie de la génération des points d'inflexion pour une section de forme concave quelconque. Il a exposé aussi quelques propriétés particulières, comme la possibilité de l'existence d'un point d'inflexion à une hauteur quelconque (la forme de la section étant absolument quelconque, mais concave), à condition qu'on puisse déterminer en conséquence la pente et, dans certains cas, le débit du cours d'eau.

M. Merten a ensuite examiné complètement le cas de l'axe de passage et, en particulier, l'inclinaison de cet axe pour la hauteur $H = H_1$. Il a démontré que l'inclinaison pour cette hauteur était la limite de l'inclinaison au point d'inflexion qui se produirait à

une hauteur infiniment voisine et que l'inclinaison ne peut être qu'exceptionnellement horizontale en ce point.

L'auteur s'est attaché à démontrer rigoureusement la propriété de la croissance de la fonction $\frac{X}{l}$; il montre que cette fonction ne tend qu'exceptionnellement vers l'infini lorsque h tend lui-même vers l'infini; il en déduit que dans les cours d'eau à pente de fond suffisamment forte il n'existe pas, généralement, d'inclinaison horizontale et, de plus, que l'asymptote de l'axe hydraulique dans ces cours d'eau est généralement située *au-dessus* des axes. Enfin, il donne une démonstration rigoureuse et générale de l'asymptotisme des axes pour une hauteur d'eau égale à H.

Après la communication MM. Richald, Beaujean et de Fooz demandent à l'auteur si les théories qu'il a exposées trouvent leur application dans l'art de l'ingénieur; M. Richald, notamment, conteste la portée pratique de l'équation fondamentale quant à son application aux cours d'eau existants parce qu'il est difficile pour ne pas dire impossible de déterminer la valeur du coefficient b.

M. Merten fait remarquer que sa communication n'avait pas pour but de fournir une solution du problème des cours d'eau, mais bien de donner la forme exacte des courbes représentées par l'équation rappelée, sans se préoccuper de la concordance plus ou moins parfaite de celle-ci avec les phénomènes naturels.

Deuxième section

—

Le secrétaire présente un mémoire envoyé en réponse à la question de concours de la section : On demande des *Recherches nouvelles sur les potentiels de décharge dans les gaz et les vapeurs.* Ce mémoire a reçu le n° 1 et le pli cacheté qui l'accompagne a été déposé au secrétariat général. M. A. Witz et le R. P. Schaffers, S. J., sont nommés commissaires pour l'examen de ce mémoire.

Le R. P. Schaffers, S. J., fait la communication suivante sur *Les paratonnerres.*

Dans les vicissitudes diverses subies par la théorie et la construc-

tion des paratonnerres, un seul point est resté, sinon entièrement à l'abri des critiques de principe, du moins admis d'une manière constante dans la pratique : c'est l'usage des pointes qui terminent les verges, uniques ou multiples, dont on couronne le système protecteur. Ces pointes sont censées posséder un pouvoir préventif basé sur la propriété reconnue depuis longtemps aux conducteurs effilés de décharger les corps électrisés.

On sait que Melsens les multiplie dans son système, alors qu'il s'écarte entièrement des anciens errements sur tout le reste. On sait aussi que la plupart des constructeurs, comprenant fort mal la pensée maîtresse du dispositif Melsens, se contentent de multiplier sur toutes les arêtes des bâtiments les gerbes de tiges pointues. Dans ces conditions, la *protection* est illusoire.

Je pense, en outre, que la *prévention* des coups de foudre, basée sur l'effet des pointes, ne l'est pas moins, et cela dans tous les cas, que le paratonnerre soit bien ou mal installé. Je vais plus loin encore et je crois pouvoir montrer que les pointes constituent un vrai danger. Ma conclusion sera qu'il faut les supprimer partout (*).

Voici d'abord les raisons qui me font considérer non pas comme rigoureusement nulle, mais comme tout à fait négligeable, l'action préventive des pointes.

Il faut, en premier lieu, écarter les observations de faits souvent citées en faveur de cette action. On signale, par exemple, les dires de certains observateurs qui auraient constaté qu'un orage qui donnait de nombreux coups de foudre avant d'arriver au-dessus d'un bâtiment muni de paratonnerres, n'en donnait presque plus après l'avoir dépassé. Inutile d'insister sur le manque de précision d'une pareille observation. Tous les orages finissent d'ailleurs par s'éteindre, même quand ils ne passent au-dessus d'aucun paratonnerre. La comparaison des statistiques de coups de foudre dans les villes et dans les campagnes ne vaut guère mieux. Elle ne pourrait avoir de signification que si on la rapportait à une même

(*) J'ai cru pouvoir me permettre de préciser par des chiffres non cités à la séance, certaines discussions de résultats expérimentaux sur lesquels je m'appuie. Je n'avais pu en invoquer que les conclusions générales, le temps m'ayant manqué pour rechercher le détail des mesures.

superficie de territoire. Encore resterait-il que pour les campagnes un certain nombre de coups de foudre ne figurent pas dans les statistiques à cause de la rareté des communications. En outre, les gaz chauds qui s'échappent des cheminées facilitent les décharges sur les agglomérations importantes.

Un argument plus sérieux au premier abord c'est l'observation d'un grand nombre d'étincelles (d'un flux continu d'étincelles, disent certaines relations) dans une interruption accidentelle survenue dans certains conducteurs de paratonnerres, et cela pendant toute la durée d'un orage, c'est-à-dire parfois plusieurs heures durant. Or, toute l'électricité qui traverse la coupure du conducteur doit s'échapper par la pointe et aller neutraliser une quantité égale de la charge opposée des nuages. Sans aucun doute; mais cette quantité peut demeurer absolument insignifiante au regard des masses transportées par un orage, si redoutable que soit d'ailleurs l'aspect de ce flux d'étincelles au moment où gronde le tonnerre. On peut fort bien aujourd'hui mesurer la quantité d'électricité transportée par une étincelle de longueur donnée. Il suffit de multiplier la capacité des conducteurs par la différence de potentiel correspondante à la distance explosive. On reconnait alors que les étincelles les plus fortes de nos machines électrostatiques, par exemple, correspondent à une quantité étonnamment faible (*). Elles peuvent, sans doute, en convoyer davantage sans changer très notablement d'aspect, comme cela se présente sur les grosses bobines d'induction. Mais que ce soit là le cas des décharges en question, c'est justement ce que les observations rapportées ne permettent en aucune façon d'affirmer.

A cet égard, voici une considération absolument topique. Si les pointes des paratonnerres avaient une efficacité approchant le moins du monde de celle qu'on leur attribue, tout orage devien-

(*) Ainsi, dans des recherches sur le débit des machines électrostatiques publiées dans ce Recueil (voir *Nouvelle théorie des machines électriques à influence*, ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE, t. XXIX, 2[de] partie, p. 1), j'employais des bouteilles de Leyde d'une capacité de 0,000 35 microfarad qui donnaient des étincelles très éclatantes. Avec une distance explosive de 5 centimètres et 10 étincelles par seconde, on trouve, en adoptant 75 000 volts pour le potentiel, qu'il passait 0,000 271 95 coulomb par seconde, c'est-à-dire ce que transporte un courant d'un quart de milliampère.

drait radicalement impossible dans nos pays, ou du moins il ne pourrait durer que quelques secondes. En effet, les innombrables pointes des feuilles et des herbes auraient dissipé les charges électriques des nuages presque aussitôt qu'elles se seraient formées. Ce n'est pas à dire que j'aie l'intention de nier l'existence d'un courant de pointe sur le feuillage et les herbes : au contraire, j'en tirerai tout à l'heure certaines conclusions importantes, et je crois qu'on pourrait s'en servir entre autres pour expliquer l'affaiblissement ou la rareté des manifestations orageuses au-dessus des forêts. Ce que je prétends, c'est que le flux est trop faible pour donner ce qu'on lui demande dans les théories courantes.

On n'aura aucune peine, d'après cela, à apprécier la portée des expériences de laboratoire sur lesquelles s'appuient Melsens et bien d'autres avant et après lui, pour affirmer l'effet préventif des pointes. Qu'une machine statique voie ses étincelles diminuées par une pointe, cela n'a rien de surprenant, étant donné que son courant est toujours extrêmement faible. Il ne dépasse pas quelques milliampères, même sur des machines à vingt ou soixante plateaux, les plus puissantes construites. Encore est-il à remarquer que les étincelles ne sont que diminuées et non supprimées entièrement. Or, qui ne sait que les quantités d'électricité mises en jeu dans les phénomènes orageux sont incomparablement plus imposantes.

Enfin, et c'est ici le point capital de mon argumentation, la mesure directe des courants de pointe a été faite et ses résultats ne me semblent plus permettre aucun doute. D'abord Franklin et les anciens physiciens se trompaient en admettant qu'une pointe décharge complètement un conducteur. Il est prouvé par de nombreuses mesures que l'écoulement n'a lieu que sous une différence de potentiel minimum, plus petite pour l'électricité négative que pour la positive. Elle dépend de la pression et de la nature du gaz et aussi de la finesse de la pointe; mais dans l'air à la pression atmosphérique elle ne descend pas au-dessous de quelques milliers de volts sur les pointes les plus déliées. Il est à remarquer en outre que cet écoulement s'accompagne toujours d'une lueur sur la pointe où il a son siège. Or, les observations de lueurs sur les pointes de paratonnerres sont très rares, ce qui montre déjà que

leur débit d'électricité ne peut être considérable, à supposer même que la difficulté de l'observation ne permette pas de constater sûrement des lueurs faibles. Mais voici un exemple des résultats qu'on obtient dans les mesures de courants exécutées sur des pointes *très fines* dans l'air à la pression normale (*). La littérature contemporaine en contient beaucoup d'autres en parfaite concordance avec celui-là.

Différ. de pot. en volts	—4000	—6000	—8000	—10 000	+4000	+6000	+8000	+
Courant en microampères	1,4	4,2	8	13,4	0,7	2,1	4,8	

Et n'oublions pas que les pointes des paratonnerres étant beaucoup plus grossières, leur courant est encore notablement moindre à potentiel égal. La loi qui relie le potentiel V au courant *i* dans ces expériences est assez bien représentée par $i = a\,V\,(V-M)$, *a* étant un coefficient numérique, M le potentiel minimum nécessaire pour l'écoulement par la pointe, la distance entre la pointe et le plateau opposé restant constante. Quand cette distance croît, le courant, pour une même différence de potentiel, décroît rapidement. D'après Warburg, il est inversement proportionnel au cube de la distance au moins. Si maintenant on rapproche de ces lois le fait que les mesures du gradient ne donnent guère plus de 10 000 volts par mètre, même par temps d'orage (**) sauf pendant les courtes durées des variations brusques, on voit qu'une pointe de paratonnerre ne fournira, en moyenne, pendant la durée d'un orage ordinaire, qu'un courant très inférieur aux valeurs trouvées dans les expériences de Tamm. D'autre part, les essais (***) de mesure, assez peu précis, il est vrai, de la quantité d'électricité déchargée dans un coup de foudre, donnent des valeurs voisines de 100 coulombs. Supposons un peu plus d'un éclair par minute, ce qui est fort modéré, nous aurions 2 coulombs par seconde, soit un courant équivalent de 2 ampères. L'ordre de grandeur des charges électriques des nuages est donc au moins un

(*) Tamm, DRUDE'S ANNALEN DER PHYSIK (1901).

(**) H. Gerdien, dans *Handbuch der Physik* de Winkelman (2e édit., 1905), t. IV, p. 721.

(***) *Ibid.*, p. 720.

million de fois plus grand que celui des flux que peut fournir une pointe de paratonnerre, et il l'est probablement beaucoup plus.

Il nous faut montrer maintenant que les pointes sont non seulement inutiles mais dangereuses. Cela résulte nettement des deux considérations suivantes : 1° La présence des pointes facilite la décharge sur le paratonnerre, en d'autres termes, provoque la foudre; 2° Cela n'aurait aucun inconvénient si la protection du paratonnerre était absolue. Mais d'abord qui oserait soutenir qu'il en est ainsi, même dans les meilleures conditions d'établissement? De plus, on peut poser en fait que l'immense majorité des paratonnerres exécutés, même dans ces dernières années, le sont dans des conditions détestables et ne réalisent en aucune façon le système de protection Melsens.

1° Les pointes provoquent la foudre. Je n'entends pas, évidemment, ressusciter le vieux préjugé qui attribuait aux tiges conductrices une espèce de pouvoir attractif pour l'électricité. Les recherches modernes ont démontré que, du moment que deux conducteurs ont assez de conductibilité pour livrer passage à la quantité d'électricité nécessaire pour entretenir une décharge sous forme d'étincelle, celle-ci éclate toujours lorsque la différence de potentiel rapportée à la distance, en d'autres termes, le gradient du potentiel, atteint une valeur minimum égale à celle que peut supporter la *rigidité* du diélectrique. On sait de plus, d'après les conclusions les plus récentes de la théorie des électrons, que la décharge à travers les gaz suppose dans ceux-ci la présence d'ions. Il en existe toujours dans l'air atmosphérique; mais certaines influences qui augmentent leur nombre, telles que l'action des rayons ultra-violets, celle des rayons X ou des radiations des corps radioactifs, facilitent le passage des étincelles et par suite abaissent la différence de potentiel explosive minimum.

Or examinons comment la présence de pointes modifie le champ entre les nuages et le sol. Dans ses célèbres conférences sur « La préservation des bâtiments contre la foudre » faites à la Société des Arts de Londres, O.-J. Lodge décrit l'expérience suivante : Deux boules, une grosse et une petite, sont montées côte à côte sur une plaque métallique reliée à l'armature externe d'un condensateur. Une seconde plaque, reliée à l'armature interne, est placée

parallèlement au-dessus de la première. On charge le condensateur et on examine comment les étincelles se répartissent entre la plaque supérieure d'une part, et les deux boules d'autre part. Si les boules sont à la même distance de la plaque, la petite est frappée seule, et il faut l'éloigner à une distance notablement plus grande pour que l'autre soit atteinte à son tour.

L'explication de ce fait est bien connue : les surfaces de niveau sont d'autant plus serrées et par suite la chute du potentiel d'autant plus rapide devant un conducteur que son rayon de courbure est plus petit. Dans le voisinage de la petite boule le potentiel disruptif sera donc plus vite atteint que dans celui de la grosse; d'où la préférence de l'étincelle pour le premier chemin.

Ajoutons maintenant une pointe placée encore sur la plaque métallique à côté des boules. Cette fois, l'étincelle ne passe plus. Abaissons progressivement la pointe, jusqu'à l'éloigner cinq, dix, vingt fois plus du plateau supérieur que les boules : l'étincelle ne reparaît pas. Que s'est-il produit? Tout simplement l'exagération de l'effet dû à la courbure de la surface. Ici elle est telle, c'est-à-dire que les surfaces de niveau sont si serrées autour de la pointe, qu'elles ne peuvent plus l'être assez dans le reste du champ pour produire une étincelle, à moins de rapprocher considérablement le plateau de la pointe. D'un autre côté, l'électricité passe très facilement de la pointe dans l'air voisin, mais s'en va lentement neutraliser la surface opposée sans donner lieu à la décharge explosive. La théorie électronique rend compte de ce phénomène en constatant que la vitesse de transport des ions dans ce champ devenu trop faible est insuffisante pour produire de nouveaux ions par leur choc contre les molécules du gaz ou du plateau.

Remarquons maintenant que la présence dans le voisinage du plateau des ions émis par la pointe y augmente cependant la chute du potentiel en resserrant les surfaces de niveau. Il y a donc aussi une tendance à l'établissement de la différence de potentiel disruptive devant le plateau, et par conséquent la présence d'une pointe ayant pour effet de faciliter la décharge aux deux extrémités de son parcours devrait, semble-t-il, favoriser l'explosion au lieu de la retarder. On pourrait dire encore, et ce serait la même chose, abstraction faite de toute théorie ionique ou autre sur la nature de la décharge, que la translation vers le plateau de l'électricité

émise par la pointe prolonge en quelque sorte celle-ci vers le plateau, diminue par suite la distance entre les conducteurs et accroît le gradient (*).

Cela étant, il semble paradoxal que l'action de la pointe empêche la décharge explosive au lieu de la faciliter. Mais les remarques faites plus haut sur les quantités d'électricité mises en jeu dans ces phénomènes et la considération de conditions expérimentales diverses, résoudront sans peine, nous semble-t-il, le paradoxe. Sur un plateau qui est chargé progressivement par une machine l'apport d'électricité est relativement lent, et le courant de la pointe n'a pas de peine à neutraliser la charge à mesure qu'elle tend à s'accumuler. De là l'impossibilité d'établir effectivement dans le voisinage du plateau un gradient suffisant pour la production d'une étincelle, bien que ce gradient soit réellement supérieur, les mesures directes l'ont établi, à celui qui existe dans le reste du champ, sauf au voisinage de la pointe. Voilà pour le cas des expériences ordinaires.

Mais il est aisé d'imaginer *à priori*, d'après la théorie exposée, deux cas où cette compensation due au courant de la pointe ne devra plus suffire pour empêcher l'étincelle. Le premier est celui d'un établissement du champ extrêmement rapide. Le second celui d'une source d'électricité ou d'un réservoir tellement vaste que le courant de pointe soit relativement négligeable.

Or, le premier se réalise sans difficulté dans la bobine d'induction. De fait, on y constate que les conducteurs pointus donnent en général des résultats plus favorables que les disques ou les grosses boules. Le signe de la charge n'est d'ailleurs pas indifférent quand on n'emploie pas un excitateur symétrique, ce qui est conforme à ce qu'on sait des différences de vitesse et de masse des ions positifs et négatifs. Lodge y arrive d'une autre manière avec le dispositif étudié plus haut. Il réunit les deux plaques aux armatures externes peu isolées d'un double condensateur dont les

(*) L'étude expérimentale de cette question n'a pas encore été faite systématiquement. Dans quelques cas particuliers, M. W. Voege (Physikalische Zeisschrift; t. VI (1905), p. 273) trouve que la décharge n'est pas toujours facilitée par la présence d'ions étrangers. Elle peut même être contrariée. Mais ces expériences diffèrent des conditions que nous envisageons.

armatures internes sont respectivement reliées aux pôles positif et négatif de la machine. De cette manière il n'y a pas de champ entre les deux plaques, sauf au moment où une étincelle éclate entre les deux pôles, ce qui provoque la décharge des armatures internes par reflux. Dans cette expérience les étincelles vont à peu près indifféremment aux boules ou à la pointe quand leurs distances à la plaque supérieure sont identiques. Lodge en conclut que les décharges *impulsives* de la foudre, c'est-à-dire celles qui se produisent sans qu'un champ se soit établi progressivement entre les nuages et la terre, par exemple quand un éclair éclate entre deux nuages superposés et fait déborder le nuage inférieur vers le sol, que ces décharges impulsives, dis-je, ne sont aucunement prévenues ou influencées par les pointes d'un paratonnerre.

Nous irons plus loin que lui dans nos conclusions. En réalité, les deux boules et la pointe ne sont pas absolument équivalentes dans l'expérience rapportée. Murani a prouvé par des mesures plus précises que dans des conditions identiques la grosse boule était frappée jusqu'à la distance de 36 millimètres, la petite jusqu'à 40 et la pointe jusqu'à 41. Le même auteur constate en outre qu'une flamme de brûleur à l'alcool l'était jusqu'à 110 millimètres et plus. Or, on sait que les gaz chauds des flammes sont fortement ionisés. Ils agissent donc, très probablement, comme les radiations dont nous avons rappelé l'action plus haut. Et ainsi la présence des ions envoyés vers les nuages, pendant tout le cours d'un orage, par les pointes, nous conduit à déduire des principes exposés une facilité plus grande de la décharge explosive sur ces pointes que sur les corps voisins. Par conséquent, dans ce cas et dans ce sens, les pointes attirent la foudre.

Mais elles doivent l'attirer aussi lorsque la différence de potentiel s'établit lentement entre les nuages et le sol, parce que nous trouvons réalisée alors la seconde manière d'empêcher les pointes de diminuer le champ : la quantité d'électricité contenue dans un nuage orageux qui s'approche d'une pointe est si grande que le courant de la pointe ne peut en général parvenir à la neutraliser suffisamment.

2° Est-il nécessaire d'insister sur la mauvaise installation de la plupart des paratonnerres? Je crois que tous mes auditeurs seront assez d'accord là-dessus. La plupart des constructeurs, en effet,

négligent de placer de nombreux conducteurs allant au sol, reliés de distance en distance entre eux et avec les masses métalliques importantes de la construction. Dans ces conditions la partie la plus essentielle du système Melsens et Lodge est précisément celle qui est sacrifiée.

Nous pouvons donc conclure sans plus tarder.

1° Puisque la plupart des paratonnerres sont mal installés et qu'aucun système n'est du reste absolument sûr, il vaudra mieux, dans tous les cas, ne pas faciliter le coup de foudre que de prétendre le provoquer pour le canaliser ensuite vers le sol. On proscrira donc toutes les pointes sans exception. Tout au plus mettra-t-on quelques tiges mousses, mais de faible hauteur. Quoiqu'on ait dû renoncer à reconnaître un rayon déterminé de protection absolue aux verges de paratonnerre, il est certain néanmoins que dans beaucoup de cas la foudre frappe de préférence les points les plus élevés au-dessus du sol. Il y a donc là un élément de sécurité qu'il ne convient pas de négliger, bien que sa valenr soit limitée.

2° La partie principale d'un système de protection contre la foudre, celle à laquelle il ne faudra renoncer dans aucun cas, c'est ce que Melsens appelait la cage de Faraday. Elle consiste à entourer un bâtiment d'un réseau métallique à larges mailles, plus ou moins assimilable à une enveloppe conductrice à l'intérieur de laquelle le champ électrique restera nul, pourvu que la communication avec le sol soit assurée par des conducteurs descendants nombreux. Les recherches modernes ont fait modifier le point de vue de Melsens, mais sans toutefois renverser ses conclusions pratiques. En réalité, le champ ne reste nul en toute rigueur à l'intérieur d'un conducteur creux que lorsque la charge extérieure est en équilibre. Une charge brusquement communiquée en un point se propage avec une vitesse finie et l'onde qui en résulte et qui est souvent, comme on sait, de caractère oscillatoire (bien que la chose ne soit pas prouvée pour les coups de foudre), donne lieu à des potentiels momentanés d'autant plus élevés que les capacités sont plus faibles et les self inductions plus fortes, d'où le danger des coups latéraux, c'est-à-dire des coups de foudre qui quittent un conducteur de paratonnerre pour frapper les objets voisins. Mais le remède est précisément celui que préconisait Melsens. La multiplicité des conducteurs diminue la self induction résultante et

augmente la capacité, en particulier si la toiture est métallique en tout ou en partie; et le raccordement par les deux bouts au moins des masses métalliques importantes empêche des différences de potentiel notables de naître à l'intérieur du bâtiment.

3° Enfin, il ne faut pas dédaigner la protection due aux arbres qui avoisinent un bâtiment. On sait que l'usage de planter des arbres près des maisons pour les préserver de la foudre est assez répandu dans les campagnes, et que l'Académie des sciences de Paris la recommandait dans ses instructions de 1823. Je crois qu'il est très rationnel. D'abord, si ces arbres sont plus élevés que la construction, ils ont plus de chances d'être frappés. Mais, alors même qu'ils ne les domineraient pas, je crois qu'on pourrait encore leur reconnaître un rôle protecteur, grâce au rideau d'ions qu'ils émettent par les arêtes vives de leur feuillage. Comme nous l'avons dit plus haut, cela les expose davantage à être frappés eux-mêmes, et par conséquent, protège leur voisinage. Il faudra seulement se garder de les rapprocher trop, car alors ils constitueraient plutôt un danger. Peut-être pourrait-on voir une preuve de cette action attribuée aux feuillages dans la fréquence des coups de foudre non seulement sur les arbres, mais aussi sur les prairies, où le bétail est atteint si souvent, même à grande distance des arbres. Ce seraient ici les herbes qui fourniraient le flux d'ions.

Je termine par une remarque sur un sujet voisin de celui qui vient de nous occuper, savoir la cause déterminante de l'exagération brusque du potentiel qui donne lieu à l'éclair. On la rapporte généralement, avec Lord Kelvin, à la réunion de plusieurs gouttelettes fines en gouttes plus grosses au moment de la chute de la pluie. En effet, chaque goutte de pluie possède la somme des charges apportées par les gouttelettes constituantes, mais sa surface extérieure, sur laquelle se répartit exclusivement cette charge, est loin d'égaler la somme de leurs surfaces. Donc le potentiel sera devenu notablement supérieur à ce qu'il était sur les gouttelettes primitives.

Ce raisonnement est insuffisant, parce qu'on doit en conclure uniquement que le potentiel a augmenté sur les gouttes *par rapport à l'air environnant*. Or la différence de potentiel disruptive à considérer dans l'éclair est celle qui existe entre un nuage et le

sol ou bien entre deux nuages voisins. Elle est donnée par la somme $\sum \frac{q}{r}$, prise en un point du sol, des quotients de la charge à la distance pour toutes les gouttes qui constituent un nuage. Mais le simple fait de la coalescence des gouttes ne fait pas varier cette somme de rapports d'une manière sensible, q restant absolument constant, et la valeur moyenne de r ne changeant pas notablement. Seulement, cette réunion coïncide avec la chute des gouttes. C'est donc comme si les deux conducteurs se rapprochaient. Alors tous les r décroissent, les surfaces de niveau se resserrent davantage, et c'est ainsi que le gradient explosif peut être atteint.

A la suite de cette communication, plusieurs membres de la section prennent la parole pour présenter diverses observations.

M. Witz cite quelques exemples de coups de foudre bizarres, entre autres sur un poteau métallique soutenant des câbles d'un tramway électrique. Dans ce cas la foudre a quitté le conducteur pour sauter sur la façade d'une maison qui s'en trouvait à 60 centimètres.

Il croit lui aussi à l'influence des forêts sur les orages et a remarqué que dans le Midi de la France, entre autres exemples, le nombre des coups de foudre a augmenté à la suite des déboisements. Quant aux coups atteignant les arbres, il fait remarquer que les diverses essences ne sont pas frappées également.

Il attire encore l'attention sur la difficulté de mesurer des courants instantanés, particulièrement quand ils sont oscillatoires.

Enfin il croit qu'il n'est pas nécessaire de faire intervenir la théorie des ions pour étudier le rôle des pointes. La considération des champs électriques avec leurs surfaces de niveau et leurs lignes de force suffirait.

A cela le P. Schaffers répond que sans doute cette considération explique le passage de l'électricité de la pointe dans le gaz, mais qu'elle ne rend pas compte de la manière dont cette décharge, qui est silencieuse et très lente, se transforme en décharge explosive.

Le P. Thirion a constaté, comme O. Lodge, la différence profonde qui se manifeste dans l'action des pointes suivant que le champ s'établit brusquement ou non.

Le P. Lucas confirme les remarques faites sur les défauts des paratonnerres tels qu'on les construit trop souvent. Il fait remarquer combien la vérification dont on se contente habituellement est illusoire. On se contente d'ordinaire de rechercher leur bonne mise à la terre et la conductibilité ohmique du réseau, et l'importance attribuée à cette dernière condition est souvent exagérée. L'expérience bien connue de Lodge montre en effet que cette conductibilité peut faire défaut dans certaines limites sans que le conducteur offert à la décharge cesse de jouer son rôle. En quoi d'ailleurs une expérience de décharge électrostatique est-elle gênée par un certain défaut de continuité dans les conducteurs? Pourtant les vérificateurs condamneront un paratonnerre dont la continuité est compromise et qui néanmoins livrerait très bien passage à la décharge fulgurante, tandis qu'ils en recevront comme parfait un autre dont la conductibilité est excellente mais qui, en raison de l'impédance que présentent les descentes, pourra très bien constituer un danger pour le bâtiment qu'il prétend protéger (décharges latérales).

M. de Hemptinne remarque que nous ne connaissons pas bien toutes les circonstances qui accompagnent la chute de la foudre, et l'expérience prouve que le phénomène est capricieux. Un fait certain, c'est que, en général, la foudre se décharge par le chemin de moindre résistance. Sous ce rapport, les pointes, en ionisant l'air à une certaine distance, et cela avec une énergie d'autant plus grande que l'électricité de nom contraire est proche, peuvent, semble-t-il, jouer un rôle protecteur important. Elles créent un chemin de moindre résistance, qui canalise la décharge.

M. Vanderlinden fait observer, au cours de cette discussion, que l'idée d'employer les arbres comme paratonnerres est ancienne: elle avait des partisans au XVIII[e] siècle, mais ce fut surtout Daniel Colladon qui la préconisa (1872). Il soutenait que les peupliers notamment, plantés près des maisons, constituent d'excellents

paratonnerres, si on les garnit à leur base d'un conducteur métallique plongeant dans l'eau ou le sol humide. L'efficacité de l'adjonction de ce conducteur n'a pas été prouvée, et beaucoup d'observations font douter de l'action salutaire de ces paratonnerres naturels. Hess notamment (MITTHEIL. DER THURGAUER NATURF. GESELLS. H. XII. 1896) a montré que souvent le voisinage de peupliers élevés constitue, pour les bâtiments voisins, un danger en temps d'orage. Les arbres, et notamment les peupliers à port élevé, sont en effet de bons récepteurs pour le coup de foudre, mais de médiocres conducteurs. Il en résulte qu'ordinairement l'éclair qui les frappe, donne lieu à des décharges latérales funestes pour les objets voisins. En Belgique, les coups de foudre ayant atteint simultanément des arbres et des bâtiments ne sont pas rares.

M. Vanderlinden revient, à la fin de la séance, sur les effets de la foudre sur les arbres, en insistant sur *l'influence que la conformation extérieure du tronc semble exercer sur la gravité des lésions provoquées par le foudroiement.* Voici un résumé de cette communication :

Jusqu'ici on a proposé l'intervention de facteurs divers dans l'explication de la fulguration élective des arbres. Les uns sont fournis par l'arbre lui-même : la conductibilité de son bois, sa composition chimique, la forme de sa couronne, la présence d'une racine pivotante, de feuilles velues ou glabres ; les autres dérivent de la composition chimique du sol, de son humidité ou de ses conditions topographiques. L'action de ces causes est toutefois encore peu démontrée. D'autre part, on ne s'est guère occupé des facteurs pouvant faire varier l'importance des lésions. Évidemment, celles-ci dépendent en première ligne de l'intensité de la décharge ; mais les conditions anatomiques du sujet atteint ne peuvent être négligées dans l'étude du phénomène. Je pense que l'attention doit être attirée sur la conformation extérieure du tronc. Voici les raisons qui militent en faveur de cette opinion. Dans toutes les statistiques d'arbres foudroyés, j'ai constaté une prédominance énorme des espèces dont les exemplaires adultes portent une écorce ou, pour mieux dire, un rhytidome fort épais et profondément fendillé, tels sont les peupliers, les chênes, les ormes et les gros conifères. Par contre, les

essences à tronc lisse : hêtre, platane, érable, etc., fournissent peu de victimes. Pline, dans son *Histoire naturelle*, parle déjà du foudroiement fréquent du chêne-liège qui cependant, comme il le fait remarquer, n'atteint pas une taille fort élevée (*quamvis altitudine non excellat*). On sait que ce chêne est recouvert d'un rhytidome particulièrement rugueux et épais. Le rhytidome est un tissu mort, desséché et par conséquent médiocre conducteur. Or, sur un mauvais conducteur les effets mécaniques d'une décharge seront nécessairement plus graves. En outre, dans la très grande majorité des cas ces effets ne s'aperçoivent que sur le tronc, précisément là où le rhytidome est épais et fendillé. Je suis d'avis qu'on se trouve ici en présence d'un fait qui rend acceptable cette idée que l'abondance des peupliers, chênes, ormes, gros conifères dans les arbres foudroyés, trouve sa raison d'être non seulement en ce que ces essences sont souvent atteintes, mais en ce que chez elles, le courant se concentrant sur un tronc à épiderme très rugueux et à faible pouvoir conducteur, y produirait de ce chef des effets disruptifs superficiels plus intenses. Je pense de même qu'un tronc lisse peut essuyer une décharge sans en porter toujours des traces. En somme l'importance des lésions me semble déterminée en partie par la rugosité du tronc. Remarquons aussi que l'étincelle ne suit pas sur le conducteur la route la plus courte au sens géométrique, mais celle dont le parcours présente le moins de difficulté, donc celle possédant le plus de conductibilité. Or, sur les troncs à rhytidome crevassé, le pouvoir conducteur ne peut être réparti uniformément Les creux, au fond desquels les couches libériennes vivantes sont presque mises à nu, sont plus humides et partant de meilleurs conducteurs que les parties en relief formées de tissu mort. Ces fentes, dans lesquelles en outre l'eau circule en temps de pluie, ne forment pas des rigoles droites et continues mais sont entrecoupées de parties proéminentes disposées en biais et qui s'anastomosent. Imaginons un courant circulant dans un de ces canaux et rencontrant sur son passage un barrage de liège. Que se passera-t-il ? Si l'obstacle est trop résistant, aucun effet destructif mais une décharge latérale ou bien le courant passera au-dessus. Dans le cas contraire, la barrière pourra être arrachée avec une partie d'écorce sous-jacente. En effet, tout le système cortical n'adhère pas fortement au tronc par suite de la

présence du cambium. Aussi nous voyons que dans la plupart des cas et notamment chez les essences à bois dur, les effets se traduisent par un écorcement partiel du tronc.

Il convient aussi de rappeler à ce propos les expériences de Hughes, et les recherches théoriques de Haviside, lord Rayleigh, Poynting et Maxwell qui ont prou é qu'un courant variable ne s'écoule pas par toute la section du conducteur mais s'établit à sa surface. Au reste, en aucun cas, un courant soit permanent soit variable ne peut arriver à pénétrer tout d'un coup au delà de la couche extérieure ou épiderme du conducteur. Or, l'éclair, décharge vraisemblablement oscillatoire et analogue à celle d'une bouteille de Leyde, donne naissance à un courant essentiellement variable, passant nécessairement par une phase à action superficielle, tandis que son effet interne coïncide avec la phase ultime. Ici, intervient en outre l'action d'un courant opposé engendré par self induction. J'ai cru utile de faire ces remarques parce que la littérature ne comprend guère de travaux relatifs à l'influence de la conformation externe des conducteurs sur les effets de la décharge.

M. Goedseels envoie à la section la note suivante sur la *Théorie générale du Vernier*.

Tous les ouvrages qui traitent de la mesure des longueurs et des arcs de cercle, consacrent à la théorie du vernier quelques lignes, où l'on épuise, semble-t-il, tout ce qu'on peut en dire; il n'en est rien. Le vernier usuel n'est qu'une application particulière d'une formule générale, que nous allons établir, et qui peut en recevoir d'autres.

Historique. — Le vernier (*) a été inventé par Pierre Vernier qui en a publié la description dans un petit livre (**) intitulé : *La construction, l'usage et les propriétez du quadrant nouveau de*

(*) On donne parfois le nom de *nonius* au vernier. C'est une erreur : le vernier a remplacé un instrument inventé par Nonius, et qui reposait sur un tout autre principe (Voir *Histoire de l'Astronomie moderne* de Delambre, t. II, pp. 119-125).

(**) La bibliothèque de l'Université catholique de Louvain possède un exemplaire de ce livre.

mathématique... Composé par PIERRE VERNIER, Capitaine & Chastelain pour Sa Majesté au Chateau d'Ermans, Conseiller, & Général de ses Monnoyes, au Conté de Bourgongne. A Brusselles,... 1631.

Le vernier représenté par l'inventeur à la fin de son livre est appliqué à un quart de cercle divisé en 90 degrés. Il a une longueur totale de 31 divisions et est partagé en 30 parties égales. Son sens croissant est opposé à celui du quart de cercle.

Les verniers que l'on construit actuellement embrassent généralement $n - 1$ divisions et sont partagés en n parties égales, mais leurs sens croissants sont les mêmes que ceux des lignes graduées ou des cercles auxquels ils sont adjoints. On rencontre plus rarement des verniers embrassant $n + 1$ divisions comme celui de l'inventeur.

Définition du vernier. — Le vernier est un instrument qui a pour but, étant donnés : 1° la valeur D d'une division d'une ligne graduée; 2° une partie aliquote $\frac{1}{n}$ D de cette division; 3° deux traits consécutifs A et B; 4° un point de repère intermédiaire C distant de A d'une longueur égale à $\frac{p}{n}$ D; d'indiquer cette valeur $\frac{p}{n}$ D, par la coïncidence du trait n° p du vernier avec un trait E de la ligne graduée.

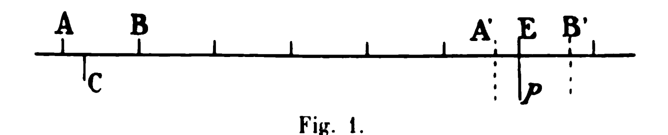


Fig. 1.

Formule générale pour la construction du vernier. — Pour construire un vernier répondant à la définition ci-dessus, il suffit évidemment de connaître la valeur de la longueur Cp qui sépare le repère C du trait n° p, et de calculer les positions des divers traits en donnant successivement à p, les valeurs 0, 1, 2,... n.

Nous avons :

$$Cp = AE - AC.$$

La quantité AC vaut, par hypothèse, $\frac{p}{n}$ D.

La longueur AE est égale à un certain nombre K de divisions D.

Pour savoir quelle valeur il convient de donner à K, remarquons que si le point C se déplace jusqu'en A le trait n° p parcourt l'intervalle pA'; si le point C se déplace jusqu'en B le trait n° p parcourt l'intervalle pB'. Ce trait n° p ne peut donc coïncider que pour la seule valeur $AC = \frac{p}{n} D$ et le nombre entier K peut être pris arbitrairement.

Nous avons donc la formule générale

$$Cp = D\left(K - \frac{p}{n}\right),$$

dans laquelle K est un nombre entier arbitraire, positif, négatif ou nul, constant ou variant avec p.

Nous donnons à ce nombre le nom de *caractéristique* du vernier.

Vernier à caractéristique nulle. — Lorque K = 0 la formule du vernier devient

$$Cp = -D\frac{p}{n}.$$

Pour $p = 0$, on a $Cp = 0$. Le zéro du vernier doit donc être placé au point de repère C.

Pour $p = n$, on a $Cp = -D$. La longueur totale du vernier est donc égale à une division D de la ligne graduée portée dans le sens inverse du sens croissant de cette ligne.

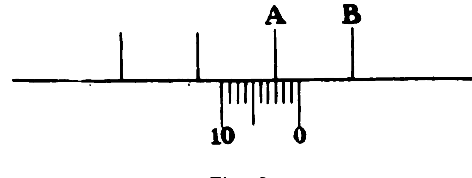


Fig. 2.

Exemple : Les tiges en bois de certaines mires topographiques sont des règles de $2^m,50$ environ de hauteur divisées en centimètres. Une petite réglette graduée en cuivre de 1 centimètre est divisée en 10 millimètres portés dans le sens négatif et sert à repérer, à 1 millimètre près, la position du centre du voyant mobile.

Cette petite réglette est donc un véritable vernier à caractéristique nulle.

Vernier usuel à caractéristique variable. — Dans les verniers dont on se sert généralement la caractéristique K est égale à p. Cette caractéristique est donc variable avec p, et nous avons :

$$Cp = D \,.\, p \,.\, \frac{n - 1}{n}.$$

Pour $p = 0$, nous avons $Cp = 0$. Le zéro du vernier coïncide donc avec le repère C.

Pour $p = n$, nous avons $Cp = (n - 1)$ D. La longueur totale du vernier est donc égale à $n - 1$ divisions D de la ligne graduée, portées dans le sens positif.

Vernier de l'inventeur. — Le vernier imaginé par l'inventeur correspond à $D = 1^o$ et à $K = -p$. Le nombre n vaut 30 et la partie aliquote $\frac{D}{n}$ est $2'$.

Nous avons donc :

$$Cp = D \,.\, p \,.\, \frac{-n - 1}{n} \,.\, = D \,.\, p \,\frac{-31}{30} \,.$$

Pour $p = 0$, on a $Cp = 0$. Le zéro coïncide donc encore avec le repère C.

Pour $p = n$, on a $Cp = -(n + 1)$ D. La longueur totale du vernier est de $n + 1$ divisions D portées dans le sens négatif.

Vernier à caractéristique renforcée. — Posons $K = a + bp$.

Nous avons :

$$Cp = D\left(a + bp - \frac{p}{n}\right) = a \,.\, D + D \,.\, p\, \frac{bn - 1}{n}.$$

Pour $p = 0$, on a $Cp = a$D. Le zéro ne coïncide donc avec le repère C que si l'on prend $a = 0$.

Dans tous les cas, la longueur totale $Cn - Co$ vaut $D\,(bn - 1)$.

On pourrait construire des verniers de cette catégorie si l'on voulait agrandir les intervalles entre les traits du vernier. Il suffirait de prendre $b = \pm 2$, $b = \pm 3$,..... C'est pourquoi nous désignons les instruments en question sous le nom de « verniers à caractéristiques renforcées. »

Examen d'un vernier. — Lorsqu'un vernier est construit pour une ligne graduée donnée, on doit l'étudier dans l'ordre suivant :

L'examen de la ligne graduée fait connaître D.

Pour connaître n on doit compter le nombre de divisions du vernier. On remarquera à ce propos que la chiffraison gravée sur l'instrument diffère souvent du numérotage idéal que nous avons désigné par p. Dans le vernier de l'inventeur, par exemple, on a $AC = \frac{p}{n} D = \frac{p}{30} \cdot 1^{\circ} = 2p$ minutes, et au lieu d'inscrire les numéros $p = 0, 1, 2, 3.....\, 30$ on a inscrit $2p = 0, 2', 4', 6'.....\, 60'$.

Connaissant D et n on pose

$$Cp = a\,.\,D + D\,.\,p\,.\,\frac{bn - 1}{n}.$$

La longueur totale vaut $Cn - Co = D\,(bn - 1)$. On la détermine en mettant le zéro du vernier en coïncidence avec un trait de la ligne graduée et en comptant le nombre positif ou négatif N de divisions D embrassées par le vernier. On obtient ainsi la relation

$$bn - 1 = N$$

d'où

$$b = \frac{N + 1}{n}.$$

Quel que soit le vernier, le nombre a reste arbitraire.

Si l'on veut faire coïncider le repère C avec le zéro on prendra $a = 0$.

Si l'on veut faire coïncider le repère C avec le trait n° n, on posera

$$N\,.\,D = Co = a\,.\,D$$

d'où

$$a = N.$$

Troisième section

—

Sur le rapport favorable du Rév. P. Van den Gheyn, S. J. et de M. Th. Gollier, la section vote l'impression aux Annales ou dans la Revue des Questions scientifiques d'une note de M. E. Beauvois : *Thulé, Tuba ou Ogygie, l'île des Bienheureux.*

M. le professeur Gilson et le R. P. Dierckx, S. J., sont nommés commissaires pour l'examen d'un mémoire envoyé en réponse à la question de concours : *Nouvelles Recherches biologiques sur les Huiles de poisson*. Le pli cacheté qui accompagne ce mémoire porte la devise : *Ars longa vita brevis*. Il a été déposé au secrétariat.

M. É. De Wildeman fait l'exposé suivant sur l'*Exposition coloniale et le Congrès colonial de Marseille en 1906.*

L'Exposition coloniale de Marseille est sans conteste une des manifestations coloniales les plus grandioses qui se soient vues sur le territoire français.

En 1900, lors de la célèbre Exposition internationale de Paris, l'Exposition des colonies françaises avait attiré l'attention des visiteurs, et, vu l'énorme succès obtenu à cette époque, les organisateurs de cette évocation des colonies en plein cœur de la France, songèrent à faire quelque chose de mieux encore, quelque chose qui parlât non seulement aux yeux du grand public, qui fit ressortir la valeur des colonies si longtemps laissées dans l'oubli, mais une œuvre qui, par ses côtés sérieux, par la documentation, puisse montrer à tous les progrès accomplis.

Marseille était tout naturellement désigné pour être le siège d'une grande manifestation coloniale et deux hommes enthousiastes du pays travaillèrent avec énergie au succès d'une telle entreprise, ce furent M. Charles Roux, ancien député et délégué du ministère des Affaires étrangères et des Colonies à l'exposition de 1900, et M. le Dr Heckel, de l'Université de Marseille, le fondateur et directeur de l'Institut colonial de Marseille.

L'Exposition coloniale était située dans un cadre vraiment merveilleux, au Rond-Point du Prado, entourée d'une ceinture de col-

lines dont les crêtes irrégulières se découpent sur le ciel toujours bleu.

Toutes les grandes colonies possédaient à Marseille de vastes pavillons, plusieurs d'entre elles avaient même disposé leurs produits, suivant leur origine, dans des pavillons spéciaux.

On pouvait naturellement en peu de visites se rendre compte de la valeur de cette Exposition, mais pour l'étudier en détail, systématiquement et scientifiquement, il aurait fallu y consacrer des journées entières.

Il y avait à Marseille de quoi satisfaire tous les desiderata, le plaisir et l'étude.

Il ne nous serait pas possible dans ce court aperçu de citer tous les coins intéressants à visiter.

Notre attention se porta vers les sciences naturelles et en particulier sur les exploitations agricoles, l'agriculture étant prise dans son sens le plus large.

C'est dans ce domaine que le pavillon des forêts d'Algérie fut pour nous une véritable révélation, il y avait là des sujets de grande valeur. On est vraiment surpris, en parcourant les deux salles et la galerie extérieure qui constituent ce pavillon, du nombre et de la variété des essences forestières qui peuvent être utilisées comme bois de charpente, d'ébénisterie, de marqueterie. Nous avons pu voir des troncs de cèdre de toute beauté, qui démontrent bien l'importance des vastes forêts des environs de Batna. A citer dans ce pavillon une fort belle collection de lièges à divers états. Elle prouve que de ce côté la France est en bonne situation.

La Tunisie possédait une très vaste installation, où l'on avait réuni, outre des documents, les types et les industries locales.

Le pavillon de Madagascar était peut-être un peu petit pour la masse de documents qu'il contenait, aussi l'examen de ce pavillon, si intéressant, laissait au visiteur une impression malheureusement peu nette. Nous avons noté la très intéressante série de matériaux sur le *rafia*, qui est, comme on le sait, un des grands produits de l'île. Le pavillon contenait une admirable série de clichés photographiques, dont la valeur est inestimable; le pays et ses habitants s'y trouvent représentés sous les aspects les plus divers, c'est une documentation qui complète de façon heureuse la série immense de matériaux en nature qui avaient été accumulés.

Pas très loin du pavillon de Madagascar, se dressait celui du Congo français, modeste pavillon surélevé, destiné d'ailleurs à être bientôt installé en Afrique. Il était plutôt de documentation pauvre; mais si les matériaux manquaient un peu, si la préparation de cette exposition avait été, on le sentait, un peu hâtive, le commissaire-adjoint, M. Rouget, avait pu, par une publication hors ligne : *L'Expansion coloniale au Congo français* (*), faire ressortir les progrès accomplis depuis 1843, époque à laquelle se fit la prise de possession de cette partie de l'Afrique occidentale.

L'exposition de l'Afrique occidentale française mérite une mention spéciale; elle était constituée par plusieurs pavillons dont deux étaient d'une grande importance. Le bâtiment principal est d'une architecture spéciale rappelant celle des villes bizarres du centre africain; au milieu, au-dessus de la porte d'entrée principale, se dresse une tour de plus de 80 mètres de haut. Dans les diverses galeries, qui entourent deux cours intérieures, ont été groupés les documents de la Guinée, du Sénégal, du Niger, de la Mauritanie, de la Côte d'Ivoire et du Dahomey. La plupart des documents relatifs à l'exploitation forestière et à l'agriculture avaient été fournis par la mission Chevalier et par les écoles fondées récemment, en particulier pour la démonstration aux indigènes des meilleures méthodes de préparation du caoutchouc.

Depuis quelque temps le gouvernement de l'Afrique tropicale française a fait de louables efforts pour améliorer la valeur du caoutchouc produit par les diverses régions de son territoire et il a eu le plaisir de voir ses efforts couronnés d'un véritable succès.

Le second bâtiment, qui était très intéressant, représentait une cour de ferme autour de laquelle des hangars couverts de chaume abritaient des spécimens des races de bovidés et de caprins de l'Afrique occidentale, il y avait là des races que la plupart des Européens et même des Français n'avaient jamais vues qu'en effigie.

Un pavillon avait été consacré aux anciennes colonies : Inde française, Réunion, Martinique, Guadeloupe; un autre à la Guyane, aux Établissements français d'Océanie, aux Nouvelles-Hébrides.

Nous ne pouvons insister sur ces divers pavillons dont la docu-

---

(*) 1 vol. de 942 pages, nombreuses figures dans le texte et cartes hors texte, — Paris, E. Larose, 1906.

mentation était cependant assez complète, mais nous voulons nous arrêter sur celui de l'Indo-Chine, dont l'exposition était indiscutablement celle de toutes les colonies qui, au point de vue agricole et forestier, présentait le plus grand intérêt, non seulement par la quantité des matériaux exposés, mais encore par la façon dont ces documents étaient présentés, tant pour l'instruction du grand public que pour celle du véritable colonial qui cherche à se rendre compte de la valeur d'une colonie.

L'exposition de l'Indo-Chine était répartie en de nombreux pavillons : Palais de l'Indo-Chine, Palais de l'Annam, du Laos, du Cambodge, de la Cochinchine, du Tonkin.

Deux d'entre eux fixèrent tout spécialement notre attention, le Grand palais et le Pavillon des Forêts. L'hémicycle du Grand palais contenait des échantillons de toutes les variétés de plantes cu tivées dans les diverses régions de l'Indo-Chine, échantillons accompagnés de notes et de dessins, de statistiques, qui rendaient une visite dans cette exposition des plus fructueuses. Nous fûmes d'ailleurs pilotés dans ce palais par trois des organisateurs qui n'ont ménagé ni temps, ni peines pour arriver à un résultat très brillant. Aussi nous empressons-nous de remercier MM. Brenier, Crevost et Haffner des renseignements qu'ils ont bien voulu nous donner tant sur les matériaux réunis au Grand palais que sur ceux accumulés dans le Pavillon des Forêts. L'Indo-Chine est d'ailleurs une des colonies françaises où l'étude des produits du sol et du sous-sol est déjà le plus avancée et où elle a été faite d'une façon systématique. Les nombreuses publications que le Gouvernement général de l'Indo-Chine a faites depuis quelques années constituent dès maintenant une documentation qui a permis de constituer un service de renseignements dont l'importance s'accroît journellement.

L'Indo-Chine avait, à l'occasion de l'exposition, publié une sorte de guide, brochure illustrée où figure la description de tous les objets exposés (*). C'est la plus complète des brochures publiées dès le début de l'exposition; pour la partie agriculture elle passe en revue, avec une documentation serrée, tous les produits soit indigènes,

(*) L'Indo-Chine à l'exposition de Marseille, 1906. Marseille, édit. du JOURNAL DES COLONIES, 1906.

soit introduits que le sol est capable de produire. La valeur de cet opuscule est donc considérable et il sera consulté avec fruit non seulement par les colons indo-chinois, mais encore par tous ceux qui s'intéressent d'une manière générale à l'agriculture coloniale.

Outre la partie coloniale pure, deux pavillons nous ont, à des titres divers, vivement intéressé; dans l'un, le *Palais de la Mer*, nous avons eu le plaisir de retrouver les résultats de l'expédition antarctique de la *Belgica;* dans l'autre, « Lou Mas de la Santo-Estello », le Syndicat de Provence avait, d'une façon charmante, placé sous les yeux du visiteur les sites de cette partie de la France, si chère à Mistral, son poète attitré. Le centre du pavillon représentait une salle d'une ferme du pays, par les fenêtres de laquelle on jetait un coup d'œil sur le vieux port de Marseille avec son moderne transbordeur et son vieux fort Saint-Jean, sur la *Cité des Baux*, sur la place d'Aix-en-Provence, sur le panorama d'Arles avec sa vieille tour et son théâtre antique, sur un coin des Martigues et sur le célèbre pont d'Avignon.

L'exposition coloniale était non seulement intéressante, mais elle a remué les masses et à son occasion ont surgi des travaux nombreux qui auront un retentissement considérable sur l'avenir colonial de la France.

La Commission des publications et notices de l'exposition a chargé de nombreux collaborateurs de la rédaction de divers ouvrages spéciaux : *Colonies Françaises au début du XXe siècle; Nos Richesses coloniales, 1900-1905; l'Enseignement colonial en France et à l'Étranger; Histoire de l'Expansion Coloniale de la France, de 1870 à 1905; Voyageurs et Explorateurs provençaux; Marseille et les Colonies Françaises*, etc., dont les titres suffisent pour indiquer la portée.

Outre ces travaux, pour la plupart non encore publiés, il faut aussi citer les ouvrages mis en circulation par le Gouvernement général de l'Afrique occidentale française (Inspection de l'Agriculture), parmi lesquels nous citons avec grand plaisir : *Le Caoutchouc dans l'Afrique occidentale française*, et *le Coton dans l'Afrique occidentale française*, tous deux dus à la plume autorisée de M. Yves Henry, inspecteur de l'Agriculture de l'Afrique occidentale, et *l'Élevage en Afrique occidentale française*, par M. Pierre, directeur du service zootechnique de l'Afrique occidentale,

l'Agriculture au Dahomey par N. Savariau (*). Ces travaux sont particulièrement intéressants pour nous, car ils s'occupent de questions tout à fait à l'ordre du jour et dont l'étude doit être prise en considération par tous ceux qui veulent le développement de l'État Indépendant du Congo. La question du caoutchouc est tout particulièrement palpitante, c'est elle qui a fait couler des flots d'encre, c'est par elle qu'est née la *Question Congolaise.* Un exposé de ce qui a été fait en Afrique occidentale française nous sera donc très utile. Cet exposé venait naturellement à sa place au moment de cette manifestation, puisque, comme nous le rappelions plus haut, le pavillon de l'Afrique occidentale consacrait une partie de sa documentation à ce produit qui est pour cette colonie, comme pour le Congo, une source importante de revenus.

Il nous reste à dire quelques mots sur le Congrès colonial, un des nombreux congrès que Marseille a vus se succéder dans ses murs. Ce congrès, qui avait réuni un très grand nombre d'adhérents français et quelques étrangers, a fait d'assez bonne besogne. Mais, comme dans la plupart des Congrès, on n'a pu faire tout ce que l'on aurait désiré.

Le programme était d'ailleurs bien trop vaste, et des questions, qui auraient eu intérêt à être traitées largement par de nombreux adhérents, ont dû être morcelées et discutées dans des sous-sections sans que bien des personnes intéressées aient pu assister aux débats. Ce n'est pas d'ailleurs en quelques jours, sans travaux préliminaires, que l'on peut discuter à fond les questions si importantes que soulèvent actuellement la mise en valeur et la direction des colonies.

Un des points les plus intéressants qui soient sortis de ces délibérations, parfois très houleuses, c'est la création de Congrès coloniaux périodiques consacrés chacun à une colonie. Certes, de cette manière, on pourra mieux discuter les questions, telle réglementation très favorable au développement d'une colonie ne convient en effet nullement à celui d'une autre colonie, se trouvant dans des conditions climatériques et ethnologiques différentes. D'un autre côté, une fois le roulement établi, on pourra fixer longtemps

(*) Édités, à Paris, chez A. Challamel.

d'avance les questions à discuter et faire imprimer les rapports avant l'ouverture de la session, ce qui permettra une discussion plus serrée.

Un très grand nombre de vœux ont été votés par ce Congrès. Seront-ils pris en considération? Ne resteront-ils pas platoniques comme, hélas, trop souvent? Beaucoup d'ailleurs sont d'une généralité parfois un peu trop accentuée, pour que leur mise en activité puisse retentir fortement sur l'avenir des colonies.

Il ne nous est pas possible de signaler ici les vœux émis par les huit divisions qui constituaient le congrès. Certains d'entre eux, tout en se rapportant spécialement au point de vue national, ont un intérêt pour tous. C'est ainsi que le vœu pour la création d'un bureau de centralisation des renseignements pouvant être mis à la disposition des candidats à l'émigration, mériterait d'être compris internationalement. Il est grand temps que pour le développement des pays, il puisse être mis rapidement entre les mains de tous des indications précises sur le commerce et l'exploitation des pays étrangers. Il est à souhaiter que la création, grâce à notre Souverain, de l'École mondiale de Tervueren, soit un pas vers cette œuvre d'extension des connaissances au delà des limites de la mère patrie.

Qu'il nous soit permis d'insister sur deux autres vœux qui méritent aussi notre attention. L'un d'eux a trait aux études à faire en France sur les bois d'origine coloniale et par conséquent se rapporte à la création d'un marché de bois coloniaux français. C'est là encore un point sur lequel nous attirons, chaque fois que faire se peut, l'attention chez nous. Nous avons réussi à créer à Anvers un important marché de caoutchouc, pourquoi ne réussirions-nous pas à y créer un marché de bois industriels? Le Congo ne renferme-t-il pas des essences variées dont la menuiserie et l'ébénisterie pourraient tirer le plus grand parti?

Dans un autre vœu ainsi libellé : « Que les pouvoirs publics favorisent par tous les moyens dont ils disposent la publication, à l'aide des matériaux accumulés au Muséum de Paris et dans les autres établissements scientifiques, de flores coloniales aussi complètes que possible, prélude indispensable de l'inventaire forestier de nos colonies », on insiste donc à nouveau sur l'importance de l'étude scientifique des végétaux d'une région. C'est là un point auquel on n'attache souvent pas assez d'importance, on peut cepen-

dant être assuré qu'aucun progrè, saussi petit qu'il soit, ne pourra se faire sans l'intermédiaire de la Science.

L'Exposition coloniale de Marseille va fermer ses portes. Que vont devenir tous les matériaux accumulés avec tant de peines dans les divers pavillons ? Les compétitions seront grandes, tous les établissements coloniaux de France voudront obtenir une partie de ces documents. Que ne peut-on les conserver tels qu'ils se présentaient, chaque série dans son pavillon, de façon à laisser aux visiteurs d'un tel Institut colonial une impression bien plus profonde que celle que l'on ressent en visitant un musée colonial quelconque.

La météorologie des années 1905-1906 et la prévision du temps, — Le Congrès de paléontologie et d'anthropologie préhistorique de Monaco de 1906 ont fait l'objet de la communication suivante de M. A. Proost :

L'année 1904 fut marquée en Belgique par une période estivale tout à fait exceptionnelle. Des chaleurs torrides et peu ou point d'orages, tandis que les années suivantes 1905-1906 furent marquées au contraire par des orages fréquents et violents entraînant parfois de véritables désastres dans certaines régions agricoles et occasionnant de nombreux décès dans nos campagnes.

Ayant eu l'occasion d'observer dans le midi de la France, pendant l'hiver de 1904-1905, les taches solaires d'une dimension inusitée, je me rappelai les observations publiées il y a presque cinquante ans par le Père Secchi dans ses premières publications sur *le Soleil*. Le célèbre Jésuite astronome affirmait dès lors la subordination intime des perturbations atmosphériques du globe terrestre et des orages solaires, tout en faisant remarquer que les perturbations électriques de notre planète ne suivaient pas toujours immédiatement celles qui se produisent dans le soleil.

Fort de ces indications, je me risquai à prédire à plusieurs cultivateurs et amis en revenant en Belgique, au mois de mars, le temps qu'il ferait l'été suivant; c'est-à-dire une période d'orages violents. Je n'eus hélas que trop raison ! Jusqu'alors on pouvait ne voir dans cette prédiction qu'une simple coïncidence, bien qu'après un été aussi beau que celui de 1904, rien ne fît prévoir en apparence une période orageuse aussi extraordinaire.

Ayant aussi remarqué que ces orages coïncidaient avec des tremblements de terre fréquents et la fameuse irruption des volcans du Mexique et de la Californie, je me hasardai cette année à mon retour, à prédire non seulement le renouvellement des orages de l'été précédent, mais de nouveaux phénomènes volcaniques. Encore une fois, les événements justifièrent mes prévisions au delà de toute attente. L'éruption du Vésuve et celle des volcans des Andes confirmèrent rigoureusement la théorie du Père Secchi.

Il y a lieu de remarquer qu'aujourd'hui que l'on connaît mieux l'électricité et la cause des orages locaux et la distribution de l'énergie électrique autour du globe, on admet généralement que les tremblements de terre sont dus à des orages souterrains ayant une certaine concordance avec les orages atmosphériques et que les uns et les autres sont le résultat de troubles apportés par une même cause, *telle l'influence solaire*, à l'égale distribution des potentiels de notre globe.

Suivant Breydel, qui ne fait qu'exposer les théories les plus récentes de nos physiciens, ces courants, cette énergie, se diffusent dans l'atmosphère ou se condensent dans telle ou telle partie du globe selon le degré de résistance rencontré dans tel ou tel terrain. Par exemple, si l'atmosphère est sèche et chaude, soumise à un potentiel élevé et mauvais conducteur; si d'autre part les couches de sable, de craie sont voisines de terrains riches en métaux magnétiques comme le fer, en roches plutoniennes, comme les *amphiboles* et les *pyroxènes*, la tension peut s'élever jusqu'à ce qu'il se produise une décharge sous le sol comme dans l'atmosphère, décharge qui peut être formidable surtout quand le sous-sol contient des cavités, des failles, etc..., comme c'est le cas partout où se sont produits récemment des tremblements de terre et des éruptions volcaniques. Cependant il faut se garder de généraliser trop vite, car les récentes expériences de M. A. Gauthier, soumises au Congrès de Chimie appliquée de Rome, auquel j'ai assisté, semblent prouver que d'autres facteurs importants interviennent dans la genèse de ces phénomènes.

Quoi qu'il en soit, il serait extrêmement intéressant de comparer les statistiques météorologiques depuis cinquante ans et d'instituer des observations rigoureuses dans les observatoires des deux

mondes pour vérifier dans quelles limites la théorie du Père Secchi est confirmée par les faits.

Si l'observation des orages solaires nous permettait de prédire *à longue échéance* un été sec ou pluvieux et orageux, on pourrait rendre à l'agriculture des services inappréciables, car les cultivateurs pourraient modifier leurs assolements en connaissance de cause et éviter souvent de cruelles déconvenues.

On a fait observer avec raison que la météorologie n'a guère été utile jusqu'ici qu'aux marins qui ne doutent plus de la valeur pratique de cette science.

M. G. Eiffel, président de la Société des Ingénieurs civils de France, a montré dans de récentes publications ce que la science pourra faire avant peu pour l'agriculture.

Un point important est hors de doute aujourd'hui : on peut prédire les orages, tout au moins quelques heures à l'avance.

Avant peu, dit-il, les bureaux centraux de tous les pays pourront télégraphier aux villes et celles-ci *aux villages* l'heure, à un quart d'heure près, où le grain, qu'il soit orageux ou non, passera chez eux. C'est avant tout une question de crédit. Et il explique et détermine ce progrès scientifique par la marche des *rubans de grains* qui se déplacent suivant des lois déjà connues.

A l'exposition de Liége, la Société belge d'Astronomie avait ouvert l'an dernier un concours de prédiction du temps qui a donné des résultats inespérés.

Des situations météorologiques troublées, donnant des résultats les plus imprévus, avaient été choisies parmi celles des trente dernières années; chose curieuse, là où les bureaux météorologiques s'étaient trompés, M. Guilbert de Caen a décrit avec exactitude les variations éventuelles des pressions. M. Durand-Gréville, de Paris, s'est également distingué dans ce concours; ses travaux sur les grains ou vents brusques et étrangers en apparence à toute loi, sur les orages, les tornades, le *burster* d'Australie, etc., sont bien connus.

Je n'insisterai pas aujourd'hui sur ce point et je me contente d'appeler l'attention des météorologistes sur les phénomènes observés dans le courant de ces derniers étés, en me plaçant uniquement au point de vue de l'illustre astronome du Collège romain.

Qu'il me soit permis, en terminant, d'appeler l'attention de la IIIe section de la Société sur les conclusions d'un autre congrès auquel j'ai assisté également dans le courant de cette année.

Je veux parler du Congrès de paléontologie et d'anthropologie préhistorique de Monaco. Ce congrès a présenté un vif intérêt non seulement pour les amateurs de recherches préhistoriques, mais pour les philosophes et pour les chrétiens soucieux de justifier les raisons de leur croyance.

La première journée du congrès s'ouvrit par des discours où la création de l'homme selon la Bible fut traitée de légende définitivement condamnée par la science. Ensuite plusieurs géologues s'efforcèrent de tirer des études actuelles une *conclusion sur le berceau de l'humanité.*

On avait cru pendant longtemps, dit M. A. Gaudry, que l'homme était venu *de l'Australie*, mais en étudiant de près la paléontologie de ce vaste continent dont l'Australie actuelle n'est qu'une faible parcelle, on arrive à cette conclusion que dans le continent antarctique il y a eu un *arrêt du développement dans l'enchainement des forces animales, il n'y a eu progrès réel que dans le continent arctique.* Or, en comparant la dentition des types découverts sur cette côte, on constate qu'elle diffère totalement *de la dentition des Européens et ressemble à celle des Australiens.* Il en résulterait que l'homme ne serait pas venu avec son chien de l'Australie en Europe, mais serait allé avec son chien d'Europe en Australie. *Le berceau de l'humanité serait même la côte d'Azur*, s'il faut en croire certains géologues très écoutés au congrès de Monaco. Il n'est guère de congrès *d'études préhistoriques* qui ne démolisse ainsi les conjectures formulées dans un congrès précédent.

Ainsi, le berceau de l'homme primitif fut placé successivement dans diverses régions de l'Orient; puis dans nos régions du Nord, où l'on avait découvert des crânes comme celui du Néanderthal de la Naulette, du Trou du frontal, de la grotte de Spy. Puis, il passa dans l'île de Java, avec le célèbre pithécanthrope, de ridicule mémoire, pour émigrer en Australie; d'où il revient à la côte d'Azur jusque nouvel ordre, ou nouveau congrès. Et naturellement les journalistes libres-penseurs des deux mondes se sont emparés de ces soi-disant révélations DE LA SCIENCE pour battre la Bible en brèche avec une audace qui n'a d'égale que leur ignorance et leur

infatuation puérile, car aucune découverte ne justifie jusqu'ici les affirmations téméraires de ces pseudo-savants.

Il appartient à des sociétés comme la nôtre de les rappeler aux principes de la méthode scientifique et de défendre la vérité contre ces tâtonnements de la science rationaliste qui discute nos origines en se fondant parfois sur les plus fragiles hypothèses, on ne saurait trop le répéter.

L'examen des fameux *éolithes* présentés au Congrès par M. Rutot a donné lieu à des discussions fort houleuses au cours desquelles un savant français a montré des éclats de silex provenant de l'usine de Nantes absolument semblables à ceux que notre compatriote croit ouvrés par les mains des hommes *préquaternaires*. Cependant, nous croyons qu'ici encore il ne faut pas se hâter de conclure à l'existence d'un simple *lusus naturae*, car la question de la haute antiquité de l'homme n'a rien à voir avec les dogmes chrétiens *pas plus d'ailleurs que la question de la situation du paradis terrestre*. Il y a plus de trente ans que nous soutenions déjà cette thèse dans le Bien public, à l'occasion du Congrès d'archéologie préhistorique et de géologie qui s'est tenu à Bruxelles au mois d'août 1872 (*). On aurait grand tort de s'inspirer dans l'étude de ce problème de préoccupations étrangères à la science pure, comme on l'a fait trop souvent en discutant la doctrine de l'évolution (**).

M. Proost fait encore la communication suivante :

Le 1 juillet 1906, à l'endroit dit *Le Culot*, près *Chapelle Dieu*, faubourg de Gembloux, j'ai découvert, presqu'à fleur de terre, dans un trou creusé pour bâtir, des *marnes crétacées* à silex gris en blocaux. Ce gisement présente un vif intérêt, car on n'a jamais signalé le *crétacé* à Gembloux, de l'avis de MM. Stainier et Posquin, bien qu'on y ait creusé plusieurs puits.

M. le capitaine commandant d'état-major Baron E. Greindl entretient la section de l'*évolution d'un réseau hydrographique subséquent constitué par l'Hermeton et le ruisseau de Jonquières*. Ce travail sera inséré dans la seconde partie des Annales.

(*) Bien public, n° du 27 août 1872.

(**) Voir Revue catholique de l'Université de Louvain, 1874, *Un Dogme matérialiste et la Doctrine de l'évolution*.

Un mémoire de M. A.-A. Fauvel sur *le cocotier de mer des iles Seychelles* est envoyé à l'examen de MM. E. De Wildeman et A. Proost.

Quatrième section

—

La IVe section avait décidé de consacrer la session d'octobre à la visite d'une de ces nombreuses institutions d'hygiène publique que les médecins eux-mêmes, trop absorbés par leurs occupations professionnelles, ont souvent à peine le loisir d'étudier de près. Les établissements de la *Laiterie Nutricia*, de Laeken, fixèrent son choix.

L'alimentation des enfants en bas âge reste un des graves problèmes du moment actuel; hygiénistes et économistes se préoccupent de plus en plus de porter remède à la morbidité et à la mortalité infantiles amenées par une alimentation défectueuse. Suppléer à l'allaitement maternel quand celui-ci n'est pas possible ou est insuffisant, telle est la question à résoudre, question fort complexe si l'on songe qu'il s'agit de trouver un équivalent artificiel à un liquide vivant, adapté parfaitement aux exigences de la nutrition de l'enfant, indemne de germes nocifs, prolongeant en quelque sorte, d'une manière qui semble inimitable puisqu'elle est providentielle, la gestation de l'enfant, et le conduisant, sans heurt et sans secousses jusqu'au jour où il pourra puiser au dehors les éléments de sa nutrition.

Les systèmes Soxhlet, Gaertner, Biedert, Backhaus, la pasteurisation, le lait cru aseptique se sont tour à tour partagé les prédilections des médecins, et l'accord ne s'est pas encore fait sur un procédé qui soit à l'abri de toute déconvenue.

Parmi les procédés qui viennent d'être nommés, le plus important est certainement celui du professeur Dr Backhaus, réalisé par la société *Nutricia*. En voici le principe : arriver à se rapprocher le plus possible de la composition chimique du lait de femme, en réduisant, sans addition d'eau ni de matières nutritives étrangères, la proportion de caséine du lait de vache, tout en transformant une partie de celle-ci en matière de blanc d'œuf

albuminé, plus assimilable pour le nourrisson. Ce but est poursuivi par l'emploi de ferments spéciaux qui digèrent une partie de la caséine. Du lait de premier choix, trait récemment et avec soin, est soumis à la centrifugation et divisé ainsi en crème et en lait maigre. On traite ensuite ce dernier au moyen des ferments; la transformation de la caséine commence immédiatement, et, au bout d'une demi-heure, l'excédent en est précipité. On chauffe vivement pour mettre fin à la fermentation, on filtre et l'on mélange de nouveau le liquide avec la crème qui en avait été séparée; enfin, on ajoute une quantité de sucre de lait en rapport avec celle que contient le lait de femme. Ainsi reconstitué, le lait est mis en bouteilles-biberons, puis stérilisé. La *Nutricia* prépare ce lait en quatre degrés qui varient surtout par le titre de caséine et d'albumine soluble, de manière à rester en harmonie avec les besoins de la nutrition de l'enfant; le degré IV se donne aux enfants qui ont dépassé neuf mois.

Nous avons pu nous rendre compte de tous les détails de ces opérations et assister à plusieurs d'entre elles, grâce à la courtoisie et à l'amabilité de M. Clément, Administrateur-directeur et de M. le commandant Jacquet, sous-directeur de l'Établissement, qui nous ont accompagnés dans tous les compartiments des installations et nous ont donné tous les éclaircissements désirables. Nous avons été ainsi à même de constater les conditions d'hygiène rigoureuses qui président à ce travail si délicat, l'ordre et la méthode observés, l'ingéniosité des appareils, l'habileté et l'activité du personnel ouvrier, parfaitement stylé et soumis à une surveillance incessante. La préparation du Lait Nutricia est elle-même l'objet d'un contrôle continuel; non seulement le lait est contrôlé et analysé à l'établissement même, mais des échantillons en sont envoyés hebdomadairement aux laboratoires du Dr Backhaus et de la *Centrale für Backhausmilch*, de Berlin, pour être analysés

De nouvelles idées se sont fait jour, dans ces dernières années, quant aux propriétés et à l'action nutritive du lait. Escherisch, Marfan et d'autres ont démontré que le lait ne peut être assimilé à un liquide chimique ordinaire, mais qu'il renferme, à l'état frais, des ferments qui en facilitent la digestion, tels l'amylase et la lipase qui dissolvent les matières grasses, et ne se trouvent que dans le lait de femme. La chaleur détruisant, à un degré variable,

chacun de ces ferments, on s'explique le succès fréquent du lait « pasteurisé » qui n'est pas soumis à des températures supérieures à 70 ou 80 degrés, et l'on a été amené à essayer de nourrir l'enfant au moyen du *lait cru*, mais *aseptique*. Jusqu'à quel point cet idéal de l'asepsie à froid, est-il réalisable dans la pratique et peut-il prétendre à remplacer le lait maternel ? Ce n'est pas le moment d'aborder cette question *ex professo*. Nous en sommes à la période des essais et des tâtonnements. Néanmoins, les résultats déjà obtenus paraissent des plus encourageants.

Quoi qu'il en soit, la Direction de la *Nutricia* a voulu entrer dans cette voie, et elle a établi dans les locaux de la *Laiterie Sanitas*, annexée et contiguë à la *Nutricia*, une installation pour la traite aseptique et l'obtention d'un lait de vache cru, d'après le système du Dr A. Miele. C'est dire qu'à ses yeux, l'emploi du lait cru aseptique n'est pas incompatible avec celui des laits judicieusement préparés et stérilisés, et que les deux systèmes — Lait Nutricia et lait aseptique — peuvent exister côte à côte et se prêter un mutuel appui.

Le fonctionnement de la *Laiterie Sanitas* n'est pas la partie la moins intéressante des installations de la rue Fransman et elle nous a longuement arrêtés. L'asepsie du lait, fourni quotidiennement au public, est obtenue par les précautions suivantes :

1° Les vaches laitières sont des bêtes saines, choisies, ayant subi l'épreuve de la tuberculine ; elles sont soumises à l'examen hebdomadaire d'un vétérinaire ;

2° Le personnel d'exploitation (garçons d'étable, trayeurs, etc.) est soumis à l'examen hebdomadaire d'un médecin ;

3° *Les vaches sont journellement étrillées, brossées et lavées ;* leur pis est maintenu dans un état d'asepsie aussi complet que possible ;

4° La traite, effectuée avec des précautions du même genre que celles qui président aux opérations chirurgicales, *se fait dans un local spécial*, maintenu à l'état aseptique et soigneusement isolé de l'étable. *Le lait est recueilli dans des appareils stérilisés* fort ingénieux ; il est réparti ensuite dans des bouteilles également stérilisées.

L'exploitation de cette partie de l'établissement (lait cru aseptique) de la *Laiterie Sanitas* est placée, au point de vue

chimique et bactériologique, sous le contrôle de M. le Dr Miele, qui a un laboratoire à sa disposition à la *Nutricia* même. D'après les recherches faites depuis novembre 1904, les échantillons de ce lait se seraient conservés à la température ordinaire (environ 15°), au moins dix jours, le plus souvent dix-sept à vingt jours, quelquefois deux et trois mois, avant de « tourner ».

Impossible de méconnaître les bonnes conditions dans lesquelles les locaux de nettoyage et brossage des bêtes, celui destiné à la traite et surtout l'étable, sont aménagés et disposés. Pour l'étable, dont les stands pour vaches sont entièrement garnis de céramique, la ventilation, la réception et l'enlèvement rapide des matières fécales, l'étanchéité du sol où la litière est remplacée par de larges paillassons, un par box, et jusqu'au système d'attache des bêtes, tout a été prévu et organisé avec entente, et en tenant un compte rigoureux des exigences d'une propreté minutieuse et tendant à réaliser l'objectif recherché : l'asepsie du lait.

Que conclure de cet exposé et que faut-il penser des deux méthodes que nous avons vu appliquer, aux établissements *Nutricia?* C'est aux faits qu'il faut demander la réponse à cette question. Or ceux, déjà nombreux, que nous connaissons, démontrent que dans beaucoup de cas, le lait traité par le procédé Backhaus (Nutricia) a permis de nourrir et souvent de sauver des enfants qui eussent été exposés à tous les hasards et aux dangers d'une alimentation artificielle mal conçue et mal surveillée. Cela ne veut pas dire que ce procédé répond à tous les desiderata, qu'il donne *toujours* tout ce qu'il promet et qu'il est *toujours* supérieur aux autres systèmes et les exclut nécessairement. On pourrait peut-être lui reprocher, comme on l'a fait à d'autres systèmes, d'être trop artificiel, de soumettre ce liquide vivant et délicat qu'est le lait à des manipulations et à des préparations de nature à le « fausser » et à porter atteinte à ses qualités nutritives où entrent sans doute tant d'inconnues encore et des éléments si fragiles; il n'est, du reste, pas toujours supporté. Mais il constitue bien certainement l'étape la plus importante vers le but depuis longtemps poursuivi, et il reste une précieuse ressource là où d'autres moyens échouent. Quant au « lait cru aseptique » il n'a pas encore suffisamment fait ses preuves pour qu'il soit possible de prononcer un verdict définitif et surtout de déclarer

qu'il résout définitivement le problème. Mais s'il ne peut être considéré — qu'il soit coupé ou non — comme l'équivalent et le succédané parfait du lait de femme, il repose sur des vues très rationnelles et il a déjà remporté de beaux succès, spécialement chez les nourrissons pour lesquels le lait stérilisé ne convenait pas.

Cinquième section

—

La Cinquième section poursuit l'étude de la *Fonction économique des Ports*, qu'elle a entreprise l'an dernier. La lecture et la discussion des nouvelles monographies ont été remises aux sessions de janvier et de Pâques 1907. Nous croyons utile de reproduire ici, à propos de cette *Application de la Méthode monographique*, la communication faite par M. Éd. Van der Smissen, secrétaire de la Ve Section, à la Réunion annuelle de la Société d'Économie sociale de Paris, dans la séance du 14 juin 1906. Nous en empruntons le texte à LA RÉFORME SOCIALE, sixième série, t. II, p. 425.

« Science de faits — de faits complexes — la science économique ne se peut constituer que par l'observation et le groupement des faits. Ils sont la matière — les matériaux si l'on veut — de la science. A ce point de vue il y a une incontestable analogie entre les sciences naturelles et les sciences sociales.

» Sans doute ces sciences sont distinctes. Leur objet n'est pas identique; leurs méthodes ne peuvent être identiques. Affirmer l'analogie c'est nier l'identité. Ceci doit être bien entendu. Mais comment savoir par quels processus se forme, se distribue, se consomme la richesse? Le raisonnement purement spéculatif ne nous le dira pas. Il ne le dira pas plus qu'il ne dira comment naît, vit et meurt l'animal. C'est l'anatomie qui le dira, c'est l'anatomie *comparée* qui le fera comprendre plus parfaitement. De même il faut pratiquer l'anatomie sociale, analyser et comparer entre elles les formes sociales, si l'on veut comprendre la vie des groupes humains. Il faut les voir, les observer dans leur réalité, dans des êtres et des choses déterminées.

» C'est ainsi que Le Play a procédé. Il a observé l'élément formateur des associations humaines, la famille, et il a choisi des

familles d'ouvriers ou d'artisans, véritables types qu'il a disséqués — au point de vue qui nous occupe — en décomposant le budget domestique, en séparant chacun des éléments du revenu, chacun des articles de la dépense, en notant les diverses propriétés de chacun des membres de la famille, en ne dédaignant ni les chemises, ni même les souliers. Travail minutieux et ingrat en apparence, magnifique par la méthode scientifique de celui qui l'a imaginé et réalisé. Car le résultat de la méthode est immense, embrasse toute la vie sociale. Ce n'est rien moins que la révélation positive, inductive des vérités fondamentales. D'une telle méthode on peut attendre, si elle est maniée avec prudence et persévérance, qu'elle ne laissera point sans réponse celui qui interrogera, qui cherchera par son intermédiaire.

» Comment l'observation intervient-elle dans la constitution des sciences naturelles? Elle est le point de départ. Puis le fait observé est rattaché à une loi connue. Et l'on obtient, à l'intervention du raisonnement déductif, une conclusion qui, au regard de la science, n'est encore qu'une hypothèse. On institue ensuite des expériences vérifiant l'hypothèse, ou, selon le cas, on renouvelle les observations en variant les circonstances. La découverte est « parfaite » si les observations sont concordantes. C'est ainsi que Claude Bernard, pour prendre un exemple classique, en observant des lapins apportés à son laboratoire, supposa qu'ils étaient à jeun, et, après des expériences destinées à corroborer l'observation fortuite initiale, put formuler la loi de l'auto-nutrition.

» Le Play ne procéda pas différemment. Que le bonheur se trouve dans l'obéissance à la loi divine, c'était une vérité connue, *mais non pas acquise, en ce qui concerne la société, par les procédés des sciences positives*. Elle le fut grâce à Le Play, par la concordance des constatations qu'il fit dans les milieux les plus différents.

» Il est clair que le procédé est susceptible d'un emploi étendu. Alors que les préoccupations réalistes dominent l'économie politique, la méthode des enquêtes monographiques trouvera dans ce domaine, voisin de celui que Le Play explora, des applications nouvelles.

» La méthode de Le Play, c'est-à-dire l'extension des méthodes des sciences de la nature aux sciences sociales, consiste dans l'observation d'un objet individualisé (une famille, une commune, un ate-

lier) au moyen de l'enquête sur place et de l'adjuvant des chiffres. Elle doit sa fécondité à la comparaison des objets étudiés.

» Alors que la multiplicité des échanges internationaux est un trait caractéristique de la vie économique des sociétés civilisées d'à présent, il a paru que la méthode pouvait être utilement appliquée aux ports qui sont l'organe principal de ces échanges.

» L'importance chaque jour croissante des échanges internationaux, la possibilité de mesurer cette importance et cet accroissement par les statistiques du commerce extérieur des différents pays (*), ont suscité en abondance les travaux relatifs à cette branche de la science.

» L'économie réaliste localise dans les ports la grande masse des échanges internationaux. De ce fait les enquêtes monographiques deviennent le complément indispensable des relevés statistiques. Elles sont la méthode même parce qu'elles constituent l'observation directe d'un objet précis, saisi dans la complexité de son organisation, vu à un moment déterminé de son développement.

» Largement comprise, étendue à la recherche des rapports commerciaux multiples dont le port est le centre, la monographie des ports embrasse un ensemble de phénomènes de circulation, ensemble vaste, mais pourtant limité, et se prêtant par là à l'observation méthodique et scientifique.

» Les monographies de ports n'excluent pas l'emploi des données numériques. Au contraire. On peut marquer l'importance des statistiques monographiques en cette matière, en disant qu'elle est analogue à celle des données relatives au budget de la famille dans les monographies ouvrières. Elles ont sur les statistiques générales la supériorité des budgets de famille sur les statistiques des salaires. Elles les précisent en individualisant les données, en enregistrant avec sûreté les progrès ou l'atonie du mouvement commercial, en prévenant les erreurs auxquelles peut donner lieu l'examen exclusif des statistiques générales. Il arrive que celles-ci accusent un progrès quand, pour tel produit ou telle

(*) Il est bien vrai que ces statistiques sont imparfaites, approximatives. Telles quelles, elles permettent de mesurer les variations du phénomène, parce que les causes d'erreur, et les erreurs dès lors, sont constantes.

région, il y a recul : la monographie dévoile ce que cèle le chiffre global.

» Sans doute l'étude d'un port ne saurait avoir la valeur typique de l'étude d'une famille ouvrière. Par ce côté les monographies d'une telle enquête ne sont point comparables à celles de la collection des *Ouvriers Européens* et des *Ouvriers des deux Mondes*, c'est évident. Mais les monographies de ports, comme les monographies de familles, mettent en présence des phénomènes de la même catégorie, bien que distincts. Par là elles fournissent la matière de rapprochements, de comparaisons. Et, précisément, c'est par les comparaisons auxquelles elle mène que l'observation scientifique est féconde.

» L'observation n'est qu'un moyen au regard de la comparaison, qui est elle-même un moyen au regard d'un but ultérieur, qui est la science. La comparaison révèle des ressemblances, des différences : il faut classer les faits observés, les expliquer, c'est-à-dire enchaîner les causes et les effets. C'est ainsi que se sont constituées les sciences naturelles, c'est ainsi que doivent se constituer les sciences sociales.

» Après qu'elle a fourni les données comparables, le rôle de l'observation n'est pas terminé : les observations initiales en appellent d'autres, les observations vérificatrices qui serviront de contrôle aux indications de l'esprit.

» C'est sur la comparaison, il importe de se le rappeler, que se fondent tous les procédés de raisonnement. Elle est la raison en acte dans le jugement qui rapproche deux données, comme dans les inférences proprement dites qui ne font que rapprocher un nombre plus grand de données et que combiner les comparaisons.

» C'est l'application même, au surplus — conformément à la méthode — qui dira si le point de vue du rapport est exact, justifié.

» L'enquête relative aux ports de commerce et à leurs fonctions économiques a été entreprise par la section des sciences économiques de la Société scientifique de Bruxelles, section qui a pour président M. Beernaert, ancien président du Conseil des ministres, ministre d'État et l'un des membres associés de l'Institut de France.

» La première série des travaux a été publiée en volume, tiré à part de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES (*).

» La méthode a été appliquée tout d'abord à la détermination même du plan des monographies de ports. On s'est gardé d'arrêter d'emblée un plan invariable : on a cru plus scientifique de dresser ce plan définitif d'après les données fournies par les premières monographies elles-mêmes (**).

» L'on a cherché aussi à réaliser l'enquête directe comme la voulait Le Play, et l'on a exclu, pour les ports en activité, les travaux de seconde main.

» On a appliqué déjà, dans la mesure du possible, la méthode comparative au choix des premières monographies.

» Le tome publié contient la monographie de deux grands ports de l'Europe, tous deux en pleine activité — Liverpool et Anvers, — l'un à hinterland étendu, extensible et disputé ; l'autre, à arrière-pays circonscrit et à peu près immuable.

» Dans cette opposition résultant de la situation géographique d'Anvers et de Liverpool il y a déjà ample matière à comparaison et à réflexion.

» M. Paul de Rousiers, secrétaire général du Comité central des armateurs de France, auteur entre maints autres travaux remarquables d'une étude très pénétrante sur *Les Fonctions économiques des ports maritimes modernes*, a décrit celles du port de Liverpool.

» M. Marcel Theunissen, chargé de cours à la section maritime de l'Institut supérieur de commerce d'Anvers, avec le concours de M. Ernest Dubois, le très distingué directeur de cet établissement, nous a montré la place que tient Anvers dans la vie économique nationale.

» On a rapproché de ces grands ports d'aujourd'hui des ports de jadis, de ces ports arrivés à une maturité opulente des ports jeunes, nouvellement nés au trafic : l'histoire des ports s'éclaire,

(*) Le volume est en vente, au secrétariat de la REVUE, à Louvain, 11, rue des Récollets.

(**) Les premiers rapporteurs ont eu sous les yeux la monographie si pénétrante du port de Hambourg par M. de Rousiers, monographie qu'a publiée LA RÉFORME SOCIALE en septembre 1905. Un exposé préliminaire préparé par le secrétaire de la V[e] section leur avait été aussi soumis.

comme celle des espèces vivantes par la paléontologie, et si l'on ose employer le mot, par l'embryologie. De fait pour Barry, c'est sa genèse qui est particulièrement instructive. Le port de Barry doit fixer particulièrement l'attention au point de vue de la méthode. Le Play étudia les sociétés d'après les procédés qu'il avait employés pour l'étude des métaux, c'est-à-dire la recherche, l'isolement des corps simples. Il trouva dans la famille l'unité sociale élémentaire. C'est la même méthode qu'il s'agit d'appliquer à l'étude du développement économique de notre temps et de nos contrées. Il a paru que la marche de ce développement n'était nulle part plus saisissable que dans l'organe principal des échanges entre nations : le port. Il est vrai que le port souvent est un organe malaisé à tenir pour élémentaire. Un port qu'on peut voir naître sera donc particulièrement instructif à considérer, du moins au début de l'enquête. S'il se trouve que la fonction de ce port est d'abord simple elle-même, on aura isolé le corps élémentaire à étudier.

» Le port de Barry est de création récente : il ne date que de 1889. Sa fonction distributive est aussi simple qu'on peut le souhaiter. Il reçoit des mines du pays de Galles, par la voie ferrée, le charbon de soute que de nombreux navires, arrivés sur lest, viennent y charger. Il a été créé et outillé pour cet objet, afin de suppléer à l'insuffisance des installations de Cardiff. La fonction de Barry s'est développée avec une extrême rapidité. Après quinze années d'existence les exportations de ce port ont dépassé, en 1904, 9 millions de tonnes, alors qu'il n'a été exporté d'Anvers par mer, pendant la même année, que 5 millions de tonnes de marchandises.

» La description de Barry nous a été apportée par M. l'ingénieur Laporte qui a séjourné longtemps et à diverses reprises au pays gallois.

» Presque en même temps on découvrait le port de Beira, qui est le port naturel de la Rhodésie. La monographie de ce port a été dressée à l'intention de la Société scientifique de Bruxelles, par notre confrère M. Morisseaux, directeur général au ministère de l'Industrie et du Travail de Belgique, qui, en qualité d'inspecteur des finances de la Compagnie de Mozambique, a passé près d'un an à Beira, et a rempli ensuite les fonctions de directeur général de cette compagnie.

» Quant aux travaux rétrospectifs, ils ont eu pour objet le port de Bruges dont le port d'Anvers fut l'héritier, et les ports de la Grèce ancienne, berceau de toutes les civilisations de l'Occident.

» Le rôle des ports de commerce semble devoir être en rapport avec le développement économique général. L'ère contemporaine est l'ère de la production en grand, obtenue avec le concours de véritables armées ouvrières dirigées elles-mêmes par un état-major technique, au moyen d'énormes capitaux et de machines puissantes. C'est aussi l'ère de l'échange intensif, des marchés mondiaux, de la multiplication des voies de communication, de la construction des navires géants, de l'approfondissement des ports et du perfectionnement de leur outillage.

» La fonction du port, permanente par certains côtés, paraît variable dans ses modalités. Puisque le port est l'organe essentiel de l'échange entre nations, il y a intérêt à rechercher les caractères constants et les caractères variables de sa fonction, et surtout à déterminer les fonctions constantes, à constater qu'elles sont soumises dans leur permanence, comme les fonctions variables dans leur évolution, aux lois fondamentales de l'économie politique.

» C'est pour ce motif que notre enquête a porté déjà sur les ports historiques et que les ports du passé continueront à faire l'objet de nos préoccupations.

» Il a paru que l'intérêt de la première publication relative à l'enquête serait accru si, anticipant quelque peu sur les travaux futurs, un de nos collaborateurs embrassait d'un coup d'œil d'ensemble la participation des ports à la vie économique des pays auxquels ils ouvrent les routes de l'Océan. Bien entendu, c'est encore la méthode d'observation qui a été appliquée ici. M. Georges Blondel, dont il serait superflu de louer devant vous la haute compétence et le zèle admirable, a bien voulu réaliser ce programme en traitant des ports de la France et de l'Empire allemand. Il n'est point agréable pour un Français, notre rapporteur ne l'a pas caché, de constater le rapide développement des ports d'Allemagne, les progrès fort lents par comparaison des ports français. Si l'on remarque que les besoins alimentaires et industriels des habitants de l'hinterland sont un élément essentiel de la prospérité des ports modernes, on ne peut pas ne point prendre en considéra-

tion la faible natalité française et l'accroissement énorme de la population de l'Empire allemand depuis un tiers de siècle : c'est là certainement l'une des causes et non la moindre, du fait constaté. L'on touche ainsi aux causes morales des phénomènes économiques, et notre enquête rejoint celle de Le Play : les vertus familiales qui font les peuples heureux sont, en fin de compte, un des éléments de la prospérité des ports.

» Il serait prématuré de vouloir indiquer déjà, alors que l'enquête est seulement commencée, quelles en seront les conclusions. Il est permis de les entrevoir pourtant, de les indiquer à titre d'hypothèses.

» Ainsi qu'on l'a vu, l'enquête tend à fournir la démonstration expérimentale des lois du développement économique, et en particulier celle de la loi fondamentale du moindre effort. Il ne s'agit pas de découvrir cette loi, mais de la vérifier. Il s'agit d'appliquer la méthode de Le Play à un problème économique. Qu'est en définitive le sens de la loi dont il s'agit de vérifier expérimentalement l'existence ? Elle ne signifie pas autre chose que ceci : la recherche du plus grand effet utile pour sa peine est le fait de l'homme qui poursuit la satisfaction des besoins matériels selon la raison. Elle est, en somme, *une application de la raison.*

» Nous pouvons tenir telle monographie — si l'on veut celle de Barry — pour l'observation initiale. La création de Barry et sa fonction paraissent pouvoir s'expliquer par la loi de l'épargne de l'effort : c'est en application de la loi que l'on a cherché à exporter plus commodément, plus rapidement, plus économiquement, les charbons de soute des mines galloises. De même, on peut prévoir par application encore de la loi, que la fonction de Barry revêtira des formes nouvelles : les navires au lieu d'arriver sur lest apporteront des marchandises à Barry. De fait, ce nouvel aspect de la fonction de Barry commence à s'annoncer.

» Voilà l'hypothèse qu'il s'agit de vérifier par des observations nouvelles. Déjà certaines de ces observations sont acquises, elles paraissent concordantes. L'activité du port, à ce qu'il semble, est commandée par le bon marché *relatif* du fret : le port observé est-il celui qui assurera, dans les conditions de prix les meilleures pour les intéressés, le transport des marchandises, sa fonction grandira. La suite de l'enquête, si elle confirme les premiers résul-

tats, permettra de formuler la loi à *titre de conclusion expérimentalement acquise*.

» La recherche du bon marché paraît expliquer les constatations caractéristiques faites déjà au cours de l'enquête : les combinaisons des frets lourds et des frets encombrants, les grandes dimensions des navires d'aujourd'hui, la préférence donnée aux ports de pénétration, la nécessité des mouillages commodes et profonds, les engins perfectionnés qui servent aux transbordements.

» La réalisation de cette condition paraît aussi être la clef des problèmes que les rapporteurs ont rencontrés en chemin, comme la fortune foudroyante de Barry, l'avenir de Beira, l'absence d'armement à Anvers.

» A un point de vue différent, il sera intéressant de vérifier par les travaux futurs si l'évolution, qui semble être une des lois de la société économique, est vérifiée dans la vie du port et l'exercice de sa fonction. Il y aura là, à propos d'une fonction économique bien déterminée, un contrôle fort instructif de la théorie de l'évolution dans son application à la vie sociale (*).

(*) Parmi les monographies du tome II de l'enquête figureront celles de Londres, de Marseille et de Gênes. Nous comptons rapprocher des deux dernières celle de Barcelone, et de celle-ci la monographie de Palos qui fut le principal port de l'Espagne à l'aurore des temps modernes. C'est de Palos qu'était parti Colomb quand il découvrit le Nouveau Monde.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE

L'assemblée générale de l'après-midi s'est tenue au local *Patria*, sous la Présidence de M. Ch. de la Vallée Poussin, Professeur à l'Université de Louvain, Vice-Président de la Société.

La parole est donnée à M. A. Witz, professeur aux Facultés catholiques de Lille, Président en exercice de la Société scientifique, pour une conférence sur *les Moteurs à gaz et les Armes à feu*. Cette conférence paraîtra *in extenso* dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, livraison du 20 janvier 1907; en voici un résumé :

Les moteurs à gaz et les armes à feu mettent en œuvre la même énergie, par des moyens peu différents, et ce sont des machines de la même espèce, dont la comparaison est intéressante ; une analyse plus approfondie des éléments de la question révèle des liens étroits entre la théorie et la pratique des deux appareils, et conduit à des rapprochements féconds dont peuvent bénéficier les arts de la guerre et de la paix. Ces derniers sollicitent exclusivement l'attention de l'orateur, qui s'efforce d'arracher à la balistique intérieure ses secrets pour en faire bénéficier les moteurs à gaz. Il fait ressortir d'abord les analogies indiscutables des canons et des moteurs pour aborder ensuite l'étude des facteurs d'action, mis en service, et des résultats qu'ils produisent; il en déduit les conclusions qui découlent du curieux parallèle qu'il a établi.

Le premier moteur à explosion a été la machine à poudre de l'abbé Jean de Hautefeuille, suivie de près par les inventions de Huygens et de Papin : ces appareils utilisaient le vide relatif produit par le refroidissement des gaz brûlés. La condensation de la vapeur d'eau ayant donné de meilleurs résultats à Papin, celui-ci fit de la machine à vapeur le principal objet de ses recherches, mais il proposa en même temps le fusil à vent et le canon à vapeur. Malgré de récentes tentatives, ces armes ont dû être abandonnées ; les moteurs à poudre et à dynamite, ressuscités en ces

derniers temps, n'ont pas eu meilleure fortune. Seuls ont survécu les engins de guerre à poudre et les moteurs à gaz tonnant.

Ces appareils sont tous deux des machines thermiques ; les progrès de la Thermodynamique ont grandement contribué à leur perfectionnement ; ils se sont admirablement développés vers la même époque, à partir de 1860.

Le moteur à gaz peut être considéré comme un canon à chargement automatique et à répétition ; mais son facteur d'action est très atténué. M. Witz étudie tour à tour les poudres noires, les poudres sans fumée et les mélanges explosifs dont on alimente les moteurs à gaz, et il définit leurs qualités par leurs caractéristiques. Les poudres sont des composés complets, renfermant le combustible et le comburant ; le pétrole et les gaz, employés dans les moteurs, ont besoin de recevoir de l'air comburant. Les poudres emmagasinent sous un faible volume une énergie énorme ; un décimètre cube de poudre sans fumée possède une énergie de 572 tonnes-mètres ; le litre d'air carburé, en usage dans les moteurs, en renferme 1566 fois moins. La puissance des armes à feu s'explique ainsi aisément ; le fusil d'infanterie actuel a une puissance de quatre cinquièmes de cheval ; certains canons de marine équivalent à des milliers de chevaux.

Le rendement des moteurs à gaz est très supérieur à celui de la machine à vapeur ; mais il est largement dépassé par le canon. Les chiffres relevés par M. Witz sont significatifs à cet égard.

L'explication de cette prééminence inattendue du canon doit être cherchée : à cet effet, il faut dresser le bilan du fonctionnement des deux engins. L'opération est délicate, parce que la balistique intérieure a un peu négligé jusqu'ici cette partie de son programme ; d'autre part, on ne relève pas aisément sur le canon les courbes de pression, que l'indicateur de Watt donne au contraire fort exactement pour les moteurs.

Les remarquables expériences instituées en 1864 par le général Mayewski, et continuées depuis lors avec une précision croissante, ont néanmoins fourni des données intéressantes sur la série des phénomènes qui se succèdent dans le canon, depuis le moment de l'explosion jusqu'à la sortie du projectile hors de l'âme. De plus, une étude approfondie des résistances passives, surmontées par le projectile dans sa marche, et par l'arme dans son recul, a permis

d'établir que le canon a un rendement organique de 96 p. c. La perte par la paroi ne peut être que minime, étant donnée la faible durée de la combustion et de la détente ; d'après le général de Saint-Robert cette perte n'est que de 3,44 p. c. Le projectile équivaut à un piston toujours neuf, et d'une admirable étanchéité. A tous ces points de vue, le canon est supérieur au moteur.

M. Witz s'attache surtout à faire ressortir l'importance des actions de paroi, qui sont le facteur le plus important dans le canon et dans le moteur. Rappelant l'exemple du petit moteur créé en 1867 par Langen et Otto, qui a réalisé un minimum de consommation resté un record de l'espèce, dans les mêmes conditions de puissance et de charge, et sans compression préalable du mélange tonnant, il conclut à recommander vivement, comme il l'a toujours fait, les détentes rapides et complètes dans un cylindre qu'on ne refroidira que dans la mesure nécessaire.

Le Président remercie et félicite l'orateur et déclare close la session d'octobre.

SESSION DU 31 JANVIER 1907

A BRUXELLES

SÉANCE DES SECTIONS

Première section

M. Mansion donne lecture des conclusions d'un rapport relatif au Mémoire de M. de Montcheuil intitulé : *Surface algébrique applicable sur une surface transcendante.*

M. d'Adhémar, second rapporteur, s'est rallié à ces conclusions. La section vote l'impression du Mémoire de M. de Montcheuil dans la seconde partie des ANNALES.

Le R. P. F. Willaert, S. J., résume les recherches qu'il a faites sur la méthode de Tobie Mayer, dans la théorie des erreurs. M. Goedseels est nommé commissaire pour examiner le Mémoire où ces recherches sont exposées.

M. Mansion donne lecture d'une note où il essaye de montrer que le kantisme est incompatible avec l'existence des géométries non euclidiennes; ensuite, il examine une thèse en sens contraire défendue par M. l'abbé Sentroul. M. l'abbé Sentroul est chargé par la section de faire rapport sur la note de M. Mansion.

M. de la Vallée Poussin fait connaître une nouvelle démonstration du théorème de Jacques Bernoulli, où il parvient à enfermer la probabilité d'un écart donné entre deux limites très rapprochées, sans recourir à la formule de Stirling. M. Mansion est nommé rapporteur du Mémoire de M. de la Vallée Poussin.

M. Neuberg fait ensuite la communication suivante intitulée : *Sur une congruence particulière de droites.*

La question que je me propose de traiter ici, m'a été suggérée par le problème suivant que j'ai rencontré dans mes *Notes sur l'hypocycloïde à trois rebroussements* (*) :

Étant données deux droites l, m situées dans un même plan, on projette un point quelconque M *de m en* N *sur l, et le point* N *en* P *sur la droite joignant* M *à un point fixe* O *de l. Trouver l'enveloppe de la droite* NP $\equiv g$.

Comme problème analogue dans l'espace, on peut considérer celui-ci :

Étant donnés deux plans λ, μ, *on projette un point quelconque* M *de* μ *en* N *sur* λ, *et le point* N *en* P *sur la droite joignant* M *à un point fixe* O *de* λ. *Étudier la congruence* Γ *engendrée par la droite* NP $\equiv g$.

C'est la congruence Γ qui forme l'objet du présent travail.

1. Je reprendrai d'abord le premier problème avec quelques nouveaux développements nécessaires pour la suite.

Les droites OM, MN et une parallèle à NP par O (fig. 1) se cor-

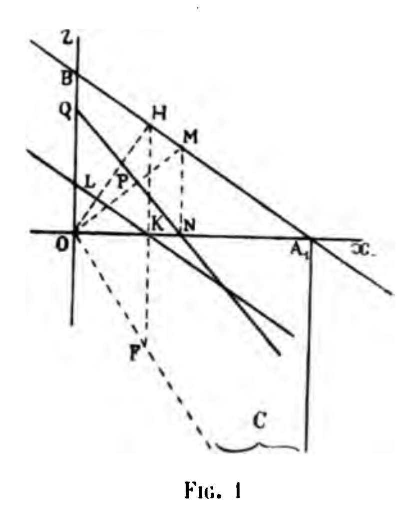


Fig. 1

(*) Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liége (3), IV, p. 21.

respondent dans trois faisceaux projectifs; par suite la droite g joint les éléments correspondants de deux ponctuelles projectives ayant pour support l et la droite de l'infini. Il résulte de là que l'enveloppe de g est une parabole π tangente à l.

Lorque M se transporte à l'infini sur m, g tend à devenir perpendiculaire à m en même temps qu'elle recule à l'infini; par conséquent, les diamètres de π sont perpendiculaires à m.

Soit A_1 le point de concours de l et m. Une position particulière de g est la perpendiculaire A_1C à l; par suite, la droite m qui passe par le point de concours de deux tangentes rectangulaires et est perpendiculaire aux diamètres, est la directrice de la parabole π.

Menons OH perpendiculaire à m, HK perpendiculaire à l, et KL parallèle à m; KL est la tangente au sommet de π.

Élevons en O sur l la perpendiculaire OB; lorsque M tend vers B, N se rapproche indéfiniment de O, et g de l. On en conclut que O est le point de contact de l avec π.

Enfin, le foyer F se trouve sur la circonférence circonscrite au triangle formé par les trois tangentes l, A_1C et KL. Comme la polaire du point A_1 de la directrice passe par O et est perpendiculaire à la droite A_1F, la circonférence de diamètre OA_1 passe également par F. On déduit de là que F est le symétrique de H par rapport à l et que la droite OF passe par le point de contact C de la tangente A_1C.

Le point P décrit la podaire du point O par rapport à π; cette courbe est une cubique circulaire qui a en O un rebroussement, la tangente étant OB.

Supposons maintenant la droite m parallèle à l. Si l'on projette O en B sur m et que l'on construise le symétrique B' de B par rapport à O, la figure B'OMN sera un parallélogramme; donc NP est perpendiculaire à B'N. Ainsi, l'enveloppe de g est une parabole qui a B' pour foyer et l pour tangente au sommet. Le lieu de P est une cissoïde de Dioclès.

2. Prenons pour axes coordonnés les droites OA_1, OB; pour plus de facilité de ce qui va suivre, nous les désignons par Ox_1, Oz et nous posons :

$$OA_1 = a_1, \quad OB = b, \quad ON = \alpha.$$

L'ordonnée de M déduite des triangles semblables A_1NM, A_1OB a pour expression $\frac{b}{a}(a_1 - \alpha)$; par suite, l'équation de g est

$$z = -\frac{\alpha a_1}{b(a_1 - \alpha)}(x_1 - \alpha), \text{ ou } a_1\alpha^2 - (a_1x_1 - bz)\alpha - a_1bz = 0. \quad (1)$$

On en conclut l'équation de l'enveloppe π :

$$(a_1x_1 - bz)^2 + 4a_1^2bz = 0. \quad (2)$$

La droite NP rencontre OB en un point Q ayant pour ordonnée :

$$\beta = \frac{a_1\alpha^2}{b(a_1 - \alpha)}, \quad \text{d'où} \quad a_1\alpha^2 + b\alpha\beta - a_1b\beta = 0. \quad (3)$$

L'équation du lieu du point P résulte de l'élimination de α entre les équations des droites OM et NP :

$$z = \frac{b(a_1 - \alpha)}{a_1\alpha}x_1, \quad z = -\frac{a_1\alpha}{b(a_1 - \alpha)}(x_1 - \alpha);$$

On trouve :

$$(x_1^2 + z^2)(a_1z + bx_1) = a_1bx_1^2. \quad (4)$$

Lorsque m est parallèle à l, les équations (2), (3) et (4) sont remplacées par celles-ci :

$$x_1^2 + 4bz = 0, \quad \alpha^2 - b\beta = 0, \quad (x_1^2 + z^2)z = bx_1^2.$$

3. Passons à l'étude de la congruence Γ.

Si les plans λ et μ sont parallèles, les droites g qui sont contenues dans un même plan ν passant par la perpendiculaire OB commune à λ et μ, enveloppent une parabole π qui a pour foyer le symétrique B' de B par rapport à O, et pour tangente au sommet la trace de ν sur λ. Par conséquent, la congruence Γ comprend les tangentes menées à un paraboloïde de révolution par un point quelconque de l'axe.

4. Si les plans λ et μ se coupent suivant une droite AA_1 (fig. 2), prenons pour axes coordonnés la perpendiculaire OA à AA_1, la parallèle Oy à AA_1 et la perpendiculaire OB à λ, qui rencontre μ en B.

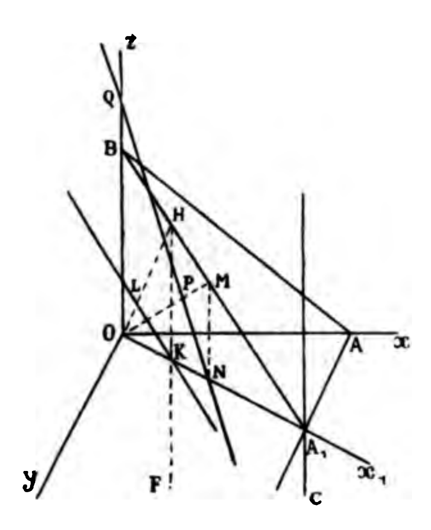


Fig. 2

Menons par OB un plan quelconque $OBA_1 \equiv \nu$; soient a_1 et a les distances OA_1 et OA, (x_1, z) les coordonnées d'un point quelconque du plan ν par rapport aux axes OA_1, OB et (x, y, z) les coordonnées du même point rapporté aux axes Ox, Oy, Oz. On trouve facilement les formules :

$$x_1 = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad a_1 = \frac{ax_1}{x} = \frac{a\sqrt{x^2+y^2}}{x}. \tag{6}$$

Lorsque le point M se meut sur la droite BA_1, la droite g enveloppe la parabole π représentée par l'équation (2). En remplaçant x_1 et a_1 par les valeurs (6), on obtient :

$$[a(x^2 + y^2) - bxz]^2 + 4a^2b(x^2 + y^2)z = 0. \tag{7}$$

L'équation (7) représente évidemment une surface du quatrième ordre, lieu des paraboles π qui sont situées dans les différents plans passant par l'axe Oz, qui ont pour directrice l'intersection de ν avec μ et touchent en O la trace de ν sur λ.

Pour abréger le discours, nous appellerons cette surface la *surface méridienne* de la congruence ; OB en sera l'*axe* et chacune des paraboles π, une *courbe méridienne*.

La congruence Γ est donc constituée par toutes les tangentes qu'on peut mener à la surface méridienne par un point quelconque de l'axe.

5. Cette surface jouit de propriétés remarquables.

La direction asymptotique de la courbe méridienne π est celle de la droite OH perpendiculaire à la droite A_1B. Or, lorsque le plan de π tourne autour de Oz, le lieu de H est la circonférence γ suivant laquelle le plan μ est coupé par la sphère de diamètre OB. Par suite, le cône asymptotique de la surface méridienne a pour sommet O et passe par la circonférence γ. D'après l'équation (7), le plan de l'infini touche la surface en tous les points de son intersection avec le cône (O, γ); car si l'on rend l'équation (7) homogène en écrivant :

$$[a(x^2+y^2)-bxz]^2+4a^2b(x^2+y^2)zt=0,$$

on trouve qu'elle admet la solution :

$$t=0,\ [a(x^2+y^2)-bxz]^2=0.$$

La dernière équation est donc celle du cône engendré par la droite OH ; c'est ce que l'on pourrait aussi démontrer par un calcul direct.

Le lieu des foyers des courbes méridiennes est la circonférence γ' symétrique de γ par rapport à λ.

La parabole π admet une tangente perpendiculaire à OA_1 en A_1 ; le lieu de ces tangentes est le plan δ mené suivant AA_1 perpendiculairement à λ. Le plan δ touche la surface méridienne le long de son intersection avec le cône (O, γ'), courbe qui est une parabole puisque δ est parallèle au plan zOx qui touche le cône le long de la génératrice Oz.

Le dernier résultat se déduit encore aisément de l'équation (7) résolue par rapport à z; car on trouve :

$$z = \frac{a(x^2+y^2)}{bx^2}\left(x-2a \pm 2\sqrt{a(a-x)}\right),$$

d'où, en faisant $x = a$,

$$z = -\frac{a^2+y^2}{b}, \quad \text{ou} \quad y^2 = -b\left(z+\frac{a^2}{b}\right).$$

L'équation (7) admet la solution $x^2+y^2=0$, $x^2z^2=0$. Or, l'équation $x^2+y^2=0$ représente les deux plans menés par l'axe Oz et par les points cycliques ω, ω' du plan λ. Par conséquent, l'axe Oz est une droite double de la surface méridienne et les plans $zO\omega$, $zO\omega'$ touchent cette surface le long des droites $O\omega$, $O\omega'$.

Au moyen des égalités (6), l'équation (4) se transforme en

$$(x^2+y^2+z^2)(az+bx) = ab(x^2+y^2).$$

Elle représente maintenant le lieu des projections du point O sur les droites de la congruence; ce lieu est donc une surface du troisième ordre qui passe par le cercle imaginaire à l'infini, commun à toutes les sphères.

6. Cherchons les équations de la congruence Γ en coordonnées pluckériennes. Si (x', y', z') sont les coordonnées du point M, le plan BOM et le plan mené par N perpendiculairement à OM ont pour équations

$$xy'-yx'=0, \quad (x-x')x'+(y-y')y'+zz'=0,$$

et les *coordonnées axiales* q_{12}, q_{13},... de g sont proportionnelles aux mineurs du système d'éléments

$$\left\|\begin{matrix} y' & -x' & 0 & 0 \\ x' & y' & z' & -(x'^2+y'^2) \end{matrix}\right\|$$

de sorte que

$$\left.\begin{array}{lll}\rho q_{12} = x'^2 + y'^2, & \rho q_{23} = -x'z', & \rho q_{31} = -y'z', \\ \rho q_{43} = 0, & \rho q_{41} = y'(x'^2+y'^2), & \rho q_{42} = -x'(x'^2+y'^2)\end{array}\right\} \quad (8)$$

De plus, le point M vérifie l'équation du plan μ :

$$bx' + az' = ab. \quad (9)$$

Entre les sept équations (8) et (9), il faut éliminer x', y', z' et le facteur de proportionnalité ρ. L'une des résultantes est $q_{34} = 0$; elle représente le *complexe spécial* d'axe Oz. Une autre résultante est visiblement

$$q_{13}\,q_{42} + q_{14}\,q_{23} = 0; \quad (10)$$

c'est l'identité fondamentale entre les six coordonnées q, où l'on fait $q_{34} = 0$.

Enfin, des égalités (8) on déduit

$$\rho^2 q_{23} q_{42} = x'^2 z'(x'^2 + y'^2) = \rho x'^2 z' q_{12}, \quad \rho^2 q_{31} q_{41} = -\rho\, y'^2 z' q_{12},$$

$$\rho(q_{23} q_{42} - q_{31} q_{41}) = z'(x'^2 + y'^2) q_{12} = \rho z' q_{12}^2,$$

$$z' = \frac{q_{23} q_{42} - q_{31} q_{41}}{q_{12}^2}, \quad x' = -\frac{\rho\, q_{42}}{x'^2 + y'^2} = -\frac{q_{42}}{q_{12}};$$

portant ces valeurs de x' et z' dans l'équation (9) on obtient

$$b(q_{42} + aq_{12})q_{12} - a(q_{23} q_{42} - q_{31} q_{41}) = 0. \quad (10)$$

Il en résulte que la congruence Γ est l'intersection du complexe spécial d'axe OB avec un complexe du second ordre. Il serait intéressant d'avoir une construction géométrique simple de ce dernier complexe et d'étudier ses propriétés au moyen de l'équation (10).

Introduisons les coordonnées radiales

$$p_{12} = xy' - x'y, \quad p_{23} = yz' - y'z, \quad p_{31} = zx' - z'x,$$
$$p_{14} = x - x', \quad p_{24} = y - y', \quad p_{34} = z - z'.$$

où (x, y, z), (x', y', z') sont les coordonnées de deux points quelconques E, E' d'un rayon de la congruence. On sait que

$$\frac{q_{41}}{p_{23}} = \frac{q_{42}}{p_{31}} = \frac{q_{43}}{p_{12}} = \frac{q_{23}}{p_{41}} = \frac{q_{31}}{p_{42}} = \frac{q_{12}}{p_{43}};$$

par suite, l'équation (10) est équivalente à

$$b\,(p_{31} - a\,p_{34})\,p_{34} - a\,(p_{14}p_{31} - p_{24}p_{23}) = 0, \qquad (11)$$

ou

$$\begin{aligned} b\,[(zx' - z'x) - a(z - z')]\,(z - z') \qquad (12)\\ - a[(x - x')\,(zx' - z'x) - (y - y')\,(yz' - y'z)] = 0. \end{aligned}$$

Si $ux + vy + wz + r = 0$, $u'x + \cdots = 0$ sont les équations de deux plans quelconques ϵ, ϵ' menés par un rayon g de Γ, l'équation (10) peut encore prendre la forme

$$\left.\begin{aligned} b\,[(rv' - r'v) - a(uv' - u'v)]\,(uv' - u'v)] \\ + a[(vw' - v'w)\,(rv' - r'v) - (wu' - w'u)(ru' - r'u)] = 0. \end{aligned}\right\}(13)$$

7. La congruence Γ est évidemment du deuxième ordre et de la deuxième classe.

Les deux rayons de Γ qui passent par un point quelconque E', sont les deux tangentes menées de E' à la parabole π située dans le plan OBE'.

Cependant, lorsque le point E' appartient à l'axe Oz, les rayons qui y passent appartiennent à un cône du second ordre, qui rencontre le plan λ suivant une circonférence. En effet, entre les segments $ON = \alpha$, $OE' = \beta$ il existe la relation (3); mais si x, y sont les coordonnées de N par rapport aux axes Ox, Oy, on a

$$\alpha = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad a_1 = \frac{a\sqrt{x^2 + y^2}}{x}.$$

Portons ces valeurs de α et a_1 dans l'équation (3); il vient

$$a(x^2 + y^2) + b\beta x - ab\beta = 0, \qquad (14)$$

équation d'une circonférence lieu du point N. On obtient l'équation du cône en faisant $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = \beta$ dans l'équation (12); elle est

$$a\beta(x^2 + y^2) - ab(z - \beta)^2 - b\beta x(z - \beta) = 0, \qquad (15)$$

et se réduit à l'équation (14) pour $z = 0$.

Les points de l'axe Oz sont donc des *points singuliers* de Γ. Le point O et le point à l'infini de Oz peuvent même être qualifiés de *bisinguliers*, parce que le cône correspondant se réduit à un faisceau de droites situé dans le plan λ ou à un système de parallèles à Oz, situées dans le plan mené par AA_1 perpendiculairement à λ. Ces résultats qui nous sont déjà connus, se déduisent aussi de l'équation (15) en y faisant $\beta = 0$, ce qui donne $z^2 = 0$, ou $\beta = \infty$ ce qui donne $x = a$.

8. Un plan quelconque contient deux droites de la congruence; ce sont des génératrices du cône de la congruence ayant pour sommet le point de rencontre du plan avec l'axe Oz.

Cependant, ainsi qu'on le sait, les plans menés par Oz renferment une infinité de rayons de Γ qui touchent une même parabole π. C'est pourquoi ces plans sont dits *singuliers*. Le plan λ et le plan mené par AA_1 perpendiculairement à λ peuvent être dits *bisinguliers*, parce que les rayons de Γ qui y sont contenus forment un faisceau.

9. Examinons encore la surface engendrée par les droites g qui s'appuient sur une droite donnée h.

Soient $E_1(x_1, y_1, z_1)$, $E_2(x_2, y_2, z_2)$, $E'(x', y', z')$ deux points fixes et un point variable de h, $E(x, y, z)$ un point quelconque d'un rayon g de Γ mené par E'; on peut poser

$$x' = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}, \quad y' = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}, \quad z' = \frac{m_1z_1 + m_2z_2}{m_1 + m_2},$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation $xy' - x'y = 0$, on voit que $m_1 = xy_2 - x_2y$, $-m_2 = xy_1 - x_1y$, de sorte que x', y', z' sont des rapports de fonctions linéaires de x et y. En substituant ces rapports dans l'équation (12), on obtient une équation du quatrième degré en x, y, z, qui représente la surface cherchée.

Voici une autre manière d'établir ce résultat. Soit Q le point de

rencontre de la génératrice E'E avec l'axe Oz ; entre les ponctuelles [E'] et [Q] il existe une correspondance (2, 2). En effet, par un point quelconque E' de h, on peut mener deux rayons de Γ ; de même en un point quelconque Q de Oz, il passe deux rayons s'appuyant sur h aux points de rencontre de cette droite avec le cône quadratique des rayons issus de Q. Cela posé, si l'on projette sur une droite quelconque k la ponctuelle [E'] à partir de la droite Oz, et la ponctuelle [Q] à partir de la droite h, on obtient sur k deux ponctuelles entre lesquelles il existe une correspondance (2,2) et qui, par suite, ont quatre points doubles. Une droite menée par l'un de ces points doubles et s'appuyant sur h et Oz est un rayon de Γ ; donc la surface considérée est du quatrième ordre, ayant deux droites doubles Oz et h.

Prenons pour h une droite quelconque du plan λ; alors la surface du quatrième ordre se compose du plan λ, lieu des droites g passant par O et d'une surface Σ du troisième ordre, laquelle est susceptible d'une définition très simple. En effet, lorsque le point M (fig. 3) parcourt une droite quelconque h' du plan μ, le point N décrit une ponctuelle h semblable à la ponctuelle [M] et, par suite, projective avec le faisceau O[M]. Par conséquent, la surface Σ est le lieu des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque d'une ponctuelle [N] sur le rayon correspondant d'un faisceau de rayons

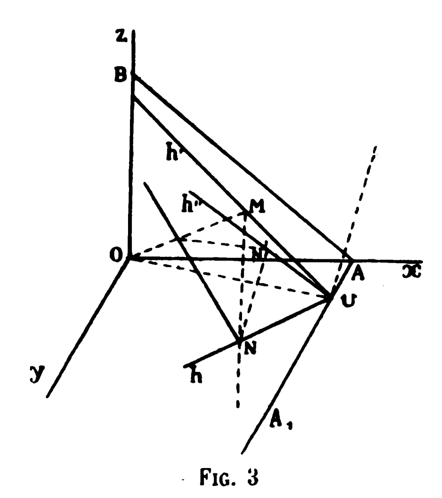


Fig. 3

O[M] projectif avec cette ponctuelle et non situé avec elle dans un même plan.

Pour déterminer directement l'ordre de cette nouvelle surface, projetons N en N' sur le plan Oh' et joignons les points N' et P; la droite N'P sera également perpendiculaire à OM. Comme le point N' décrit une ponctuelle h'' projective avec le faisceau O(M), la droite N'P enveloppe une parabole π'. Le point P décrit la podaire de O par rapport à π', courbe qui est une cubique circulaire V ayant en O un point double et appartenant évidemment à la surface Σ; celle-ci est donc bien du troisième ordre. Soit U le point de AA_1 où se coupent les trois droites h, h', h''; lorsque N est en U, NP est la perpendiculaire élevée en U sur OU dans le plan Oh'; donc U appartient à la cubique V. Un plan quelconque mené par h coupe V en deux points autres que U; par ces points passent deux génératrices de Σ, et comme h est une droite simple de Σ, on voit de nouveau que cette surface est du troisième ordre.

10. Pour terminer, cherchons encore la surface lieu des tangentes au sommet des paraboles méridiennes π.

Les segments interceptés sur les axes Ox_1, Oz (fig. 1) entre l'origine et la tangente KL se déduisent de la relation (3) combinée avec la proportion $\alpha : \beta = a_1 : b$; donc

$$\alpha = \frac{a_1 b^2}{a_1^2 + b^2}, \quad \beta = \frac{b^3}{a_1^2 + b^2},$$

et l'équation de KL est

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{z}{b} = \frac{b^2}{a_1^2 + b^2}.$$

Les coordonnées d'un point de cette droite par rapport aux axes Ox, Oy, Oz étant désignées par x, y, z, on a vu que $x_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$, $a_1 = a\sqrt{x^2 + y^2} : x$; par conséquent, la surface considérée a pour équation

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{b}\right)\left[(a^2 + b^2)x^2 + a^2y^2\right] = b^2x^2.$$

Elle est du troisième ordre.

Des communications du R. P. Bosmans, S. J. et de M. Mansion sont renvoyées à la prochaine session.

Sous-section technique

—

La séance est ouverte par le Secrétaire en l'absence de M. Ch. Lagasse-de Locht, président, qui s'est fait excuser.

M. Joseph Carlier fait une communication sur l'exposition de Milan, en 1906, en insistant sur la partie intéressant plus spécialement l'ingénieur des chemins de fer. Voici un résumé de cette communication :

Un très grand nombre de pays avaient exposé, à Milan, le matériel de chemin de fer le plus remarquable. Accessoirement, il y avait aussi un grand nombre de machines-outils et d'appareils mécaniques nouveaux, utiles aux ateliers de construction et de réparation de voitures, de locomotives et de voies ferrées.

M. Carlier entre successivement dans des détails concernant la voie et sa signalisation, le matériel de traction et, plus spécialement, les voitures à voyageurs et les locomotives à vapeur et électriques.

Un grand nombre de documents, recueillis à Milan par M. Carlier, sont présentés à la section et ajoutent à l'intérêt de la conférence.

Dans la division des voies de chemins de fer on poursuit l'application des traverses en béton armé et l'emploi de longues aiguilles de changements de voie, allant jusqu'à 11m,20 de longueur et encastrées par le talon; l'écartement de l'aiguille du contre-rail est obtenu par l'élasticité propre du métal composant le rail, celui-ci ayant le patin entamé sur une partie de sa longueur. Les manœuvres des aiguilles et des signaux, ainsi que les enclanchements réciproques, sont faits à l'électricité par le moyen de moteurs et de verrous, ou par l'air comprimé, la commande des distributeurs étant faite à l'électricité.

L'emploi de traversées-jonction est de plus en plus répandu : elles permettent de combiner un grand nombre d'itinéraires de circulation sur une surface de terrain relativement restreinte.

A Milan aussi, on a vu se généraliser l'application du signal répétiteur, permettant au mécanicien d'agir en temps voulu sur les

freins, en vue d'effectuer l'arrêt du train, au pied du signal d'arrêt absolu.

Signalons aussi quelques dispositifs mécaniques de signalisation, nouveaux et applicables sur des chemins de fer de moyenne importance.

Quant au matériel de traction, grande était la démonstration, et l'État belge y tenait une place très enviable.

La tendance de toutes les compagnies est de faire des voitures à bogies de grande capacité : 36 à 40 personnes, à couloir latéral, munies de l'éclairage électrique et pouvues de garnitures fort décoratives. Les longerons des bogies sont ordinairement en acier embouti; les ressorts de suspension sont triples : les flexions des ressorts à pincettes, fixés à la traverse du bogie, se superposent à celles des ressorts à lames montés sur les boîtes à graisse et à celles des ressorts hélicoïdaux, qui fixent les ressorts à lames aux longerons.

Les longerons des caisses des voitures sont en acier embouti, à section variable ou formé d'une poutre en fer, armée.

L'éclairage est au gaz par manchons incandescents ou à l'électricité : systèmes Stone, Aichele, série-parallèle, etc.

La partie la plus intéressante de l'exposition était certainement celle des locomotives à vapeur et électriques.

La plus extraordinaire était la locomotive électrique triphasée de Siemens et Halske, à 10 000 volts de tension efficace; les moteurs étant alimentés directement sous cette tension. Cette locomotive a tractionné des trains à la vitesse de 207 kilomètres à l'heure sur la ligne de Marienfelde à Zossen.

Les locomotives de la Valteline à courants triphasés, capables d'efforts de traction importants et de vitesses de 60 à 75 kilomètres à l'heure excitaient aussi l'admiration du connaisseur, tant par leur conception heureuse que par le fini d'ordres mécanique et électrique, qui caractérisait la construction de la machine.

Venaient ensuite de nombreuses automotrices électriques à courant continu, soit par prise de courant extérieure, soit par accumulateurs, logés dans la voiture.

Les puissances de ces voitures atteignent 150 à 200 chevaux; elles sont susceptibles de remorquer une centaine de voyageurs à des vitesses de 80 kilomètres à l'heure.

La tendance actuelle des compagnies est de remorquer des trains à voyageurs lourds de 300 à 350 tonnes à des vitesses moyennes de 90 à 110 kilomètres à l'heure sur des lignes dont les rampes et les pentes n'excèdent guère 5 p. c.

Ainsi les compagnies ont construit des locomotives à surface de chauffe totale de 225 à 250 mètres carrés et pour laquelle une vaporisation de 70 à 75 kilogrammes d'eau par heure et par mètre carré de surface est possible dans de bonnes conditions de rendement thermique. On arrive ainsi à des générateurs de locomotive fort imposants par les dimensions de leurs parties constitutives.

Le nombre d'essieux moteurs accouplés a été porté à trois pour les locomotives à voyageurs à grande vitesse, avec diamètres de roues motrices de 1m,90 à 2m,07; pour les locomotives à marchandises, on trouve quatre et même six essieux avec roues de 1m,20 à 1m,45 de diamètre.

Les machines exposées diffèrent entre elles, non pas seulement par les dimensions relatives, mais surtout par le mode d'utilisation de la vapeur produite par la chaudière, ainsi que par le système de distributeurs employés.

Le mode d'utilisation de la vapeur est presque pour toutes les compagnies celui de la double détente, tant pour la locomotive à voyageur que pour celle à marchandise. Le timbre de la chaudière est de quinze ou seize atmosphères. Quelques compagnies, tout en visant le programme indiqué ci-dessus, font aussi usage de la vapeur surchauffée, tels notamment l'État prussien et l'État belge. Les locomotives à grande vitesse, exposées par ces administrations, ont été, pour la plupart, soumises à une longue expérience et ont donné des résultats excellents.

L'emploi de la vapeur surchauffée a provoqué l'application des distributions par soupapes. Tel est le cas, notamment pour la machine à grande vitesse, système Lentz, de l'État prussien, qui comporte des obturateurs à soupape, disposés de façon à pouvoir être manœuvrés à de très grandes vitesses. Ce système de distribution, nouveau d'ailleurs, a reçu déjà de nombreuses applications dans différents pays d'Europe pour des machines rapides.

L'ensemble de l'exposition des chemins de fer témoignait d'un progrès économique considérable, et les ingénieurs de chemins de fer y ont trouvé des applications nouvelles fort importantes.

Le secrétaire présente ensuite une note de M. de Maupeou relative à une *nouvelle théorie du choc et à une expérience de choc*, en vue de préparer une discussion sur ces importantes questions.

L'exposé de la note de M. de Maupeou donne lieu à un échange de vues qui sera continué au cours de la session de Pâques.

Deuxième section

—

M. A. Witz transmet son rapport sur le mémoire intitulé : *Recherches sur les potentiels de décharge dans les gaz et les vapeurs*, et envoyé en réponse à la question de concours de la section. Lecture est donnée de ce rapport dont voici le texte :

Dans une introduction très documentée, l'auteur expose d'abord la question qu'il se propose de traiter. D'après J.-J. Thomson, le potentiel disruptif dans les gaz, pris à grande distance de leur point de liquéfaction, est donné par la formule :

$$V = K + \varphi \frac{d}{\lambda},$$

dans laquelle K est une constante dépendant de la nature du gaz, d la distance des électrodes entre lesquelles jaillit l'étincelle de décharge, λ le chemin libre moyen des molécules et φ une fonction identique pour tous les gaz. Il importait de vérifier l'exactitude de cette loi pour les gaz et les vapeurs facilement liquéfiables. En même temps, on contrôlerait la formule de Paschen et Bouty :

$$V = f\left(\frac{pd}{T}\right),$$

dans laquelle le potentiel est donné en fonction de la pression p du gaz et de sa température absolue.

Le procédé expérimental adopté est ingénieux et de nature à conduire à des résultats précis : il n'est pas nouveau, mais son mode d'emploi n'est pas dénué d'originalité. Les indications d'un micromètre sont relevées conjointement avec celles d'un électromètre Bichat et Blondlot, plus rapide, mais moins commode.

La manière d'opérer est décrite avec clarté et méthode, et l'on suit aisément tous les détails des expériences.

L'emploi d'une étuve bactériologique du Dr Schribaux a permis de régler exactement les températures par le régulateur Roux : on travaillait d'ordinaire à une température constante de 40°, sauf pour les mesures dans lesquelles on cherchait à découvrir l'influence d'un changement de température sur les potentiels explosifs.

Quelques gaz simples ont d'abord été soumis aux essais : les résultats obtenus ont concordé avec ceux qu'on avait déterminés antérieurement; l'exactitude de la méthode était donc établie. On étudia ensuite diverses vapeurs, en faisant varier la distance explosive et la température.

L'auteur du travail a eu la bonne fortune de découvrir des faits intéressants.

Et d'abord, dans les vapeurs, les courbes représentatives du potentiel ne sont plus des lignes droites, comme pour les gaz simples, mais des courbes paraboliques, concaves vers l'axe des pressions, tendant à redevenir rectilignes à mesure que l'on s'éloigne du point de saturation. Les composés de la série aromatique ne se comportent pas de même que ceux de la série grasse.

Il y a parallélisme entre le poids moléculaire du corps et les potentiels disruptifs; l'addition d'un chaînon CH_2 agit d'une façon régulière, ainsi que la substitution de radicaux négatifs aux atomes d'hydrogène dans NH_3, CH_4, etc. L'influence de l'isomérie est caractéristique.

La loi de Paschen est vérifiée pour les vapeurs, même au voisinage du point de saturation : mais l'action de la température s'exerce différemment à ce qu'a constaté M. Bouty pour les gaz.

Pour ce qui est de la cohésion diélectrique, dont les effets ont été étudiés par M. Bouty, l'auteur est amené à vérifier que le potentiel disruptif et cette cohésion sont bien un même phénomène envisagé sous des aspects différents; toutefois, on a observé certaines divergences dans les résultats qui doivent être attribuées à ce que les électrodes n'étaient pas de même nature dans les expériences instituées par divers physiciens; la complexité même des composés interviendrait aussi.

Ce travail à coûté un labeur considérable à son auteur : il a été

conduit avec méthode et il aboutit à des résultats très nets, qui constituent une contribution utile à une question délicate et difficile. Cette belle étude, poursuivie dans le laboratoire de physique de M. de Hemptinne, fait honneur au maître qui l'a inspirée, et au disciple qui a su la mener à bonne fin. Elle mérite d'être récompensée.

Le R. P. Schaffers, S. J., second rapporteur désigné par la section pour examiner ce mémoire, se rallie entièrement aux conclusions de M. Witz. Il regarde comme très importante la contribution apportée à la connaissance des lois du potentiel explosif par un travail sur les milieux gazeux à molécule complexe, dans le voisinage du point de liquéfaction, et il estime que le soin consciencieux avec lequel cette recherche a été conduite mérite d'être récompensé par l'attribution du prix proposé par la Société.

La section, d'un accord unanime, approuve les conclusions des rapporteurs, propose de décerner à l'auteur du mémoire le prix offert par le *Règlement pour l'encouragement des recherches scientifiques*, et charge le Secrétaire de transmettre au Conseil général de la Société, les rapports et le vote de la section (*).

Le R. P. Thirion, S. J., présente, au nom de M. J. Costanzo, une note sur une *Nouvelle méthode pour la détermination du coefficient de dilatation des liquides*, et en expose le contenu.

Avant de se prononcer, la section désirerait connaître le détail de quelques mesures exécutées d'après cette méthode. Elle charge le Secrétaire de transmettre ce désir à l'auteur.

M. Louis Henry, empêché d'assister à la séance, transmet une note, dont voici le résumé. Cette note est intitulée : *Des réactions cachées dans certains processus chimiques, à l'occasion de l'emploi synthétique de divers dérivés et chloro-isobutyriques* $\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > C\,Cl$....

(*) Le Conseil de la Société, dans sa séance du 18 février, a confirmé le vote de la section et ouvert le pli cacheté qui accompagnait le mémoire couronné. L'auteur est M. l'abbé Tits, docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur au collège Saint-Rombaut, à Malines. Son mémoire sera publié dans la seconde partie des ANNALES.

Les réactions synthétiques n'ont pas toujours au fond le caractère de simplicité qu'on pourrait de prime abord leur attribuer. Parfois elles sont accompagnées, au cours de leur développement, de réactions accessoires qui en troublent l'économie et tendraient à faire croire à des modifications dans la structure des molécules primitives, engagées dans ces processus chimiques. Pour n'apparaître pas toujours à l'extérieur avec évidence et netteté, ces réactions intercalaires n'en existent pas moins. On pressent quelle importance elles peuvent prendre dans certaines circonstances.

J'ai constaté récemment un exemple intéressant de ce phénomène dans certaines réactions synthétiques exécutées à l'aide de divers dérivés α *chloro-isobutyriques* $\genfrac{}{}{0pt}{}{H_3C}{H_3C}{>}C\,Cl$.

I. Le *chloro-isobutyrate d'éthyle* $\genfrac{}{}{0pt}{}{H_3C}{H_3C}{>}C\,Cl - CO\,(OC_2H_5)$ m'ayant donné, avec le méthyl-bromure de magnésium $CH_3 - Mg\,Br$ du *penta-méthyl éthanol* $(H_3C)_3 - C - \underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{C}} - (CH_3)_2$, j'en avais conclu que l'*aldéhyde chloro-isobutyrique* $\genfrac{}{}{0pt}{}{H_3C}{H_3C}{>}C\,Cl - CH = O$, dans les mêmes conditions, donnerait naissance à l'*alcool pinacolique* de Friedel $(H_3C)_3 - C - \underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{CH}} - CH_3$.

C'était une nouvelle et fort intéressante synthèse de ce produit si discuté.

M. Brochet, l'auteur de cette aldéhyde, avait bien voulu m'en fournir 45 grammes pour réaliser cette réaction. J'aime à le remercier de sa libéralité.

L'aldéhyde *chloro-isobutyrique* $\genfrac{}{}{0pt}{}{H_3C}{H_3C}{>}C\,Cl - CH = O$ fournit effectivement, avec le méthyl-bromure de magnésium, un alcool en C_6, mais ce n'est pas l'alcool *pinacolique*, secondaire

$$\left.\begin{matrix}H_3C\\H_3C\\H_3C\end{matrix}\right\rangle C - CH\,(OH) - CH_3$$

que j'attendais, mais bien son isomère, le *diméthyl-isopropyl-carbinol*, alcool tertiaire

$$\frac{H_3C}{H_3C}>CH - C(OH)<\frac{CH_3}{CH_3}.$$

L'action de l'acide chlorhydrique fumant, celle du chlorure d'acétyle et celle du brome, établissent des différences radicales entre ces deux corps, si rapprochés l'un de l'autre par leurs propriétés extérieures et leur volatilité.

A l'inspection des formules de ces deux corps, on pourrait croire au premier abord, qu'à la suite d'une transposition interne d'éléments,

Alcool pinacolique $(H_3C)_3 \gt C - CH(OH) - CH_3.$

Diméthyl-isopropyl carbinol $\frac{H_3C}{H_3C}>CH - C(OH)<\frac{CH_3}{CH_3},$

l'alcool *secondaire*, produit réel de la réaction initiale du composé méthylo-magnésien, s'est transformé en son isomère l'alcool *tertiaire*. De pareils changements se font, comme l'on sait, dans les éthers haloïdes correspondants à cet alcool, mais non dans les alcools eux-mêmes, ni même dans leurs dérivés acétiques.

L'explication de la formation de l'alcool tertiaire est ailleurs, et la voici dans sa réelle simplicité : la réaction du méthylo-bromure de magnésium sur l'aldéhyde chloro-isobutyrique se fait originellement comme suit :

$$\frac{H_3C}{H_3C}>C\,Cl - CH = O + CH_3 - Mg\,Br = \frac{H_3C}{H_3C}>C\,Cl - \underset{\displaystyle O - Mg - Br.}{\underset{|}{CH}} - CH_3$$

Mais le composant $>C - Cl$ réagit sur le composant voisin $-\underset{\displaystyle O - Mg\,Br}{\underset{|}{CH}}-$ pour constituer, à côté de $Cl - Mg - Br$, l'*oxyde d'éthylène tri-méthylé*

$$\frac{H_3C}{H_3C}{>}\underbrace{C - CH}_{O} - CH_3$$

et celui-ci, à son tour, en réagissant sur la seconde molécule du composé magnésien

$$\frac{H_3C}{H_3C}{<}\underbrace{C - CH}_{O} - CH_3 + CH_3\text{-}Mg\text{-}Br = \frac{H_3C}{H_3C}{>}\underset{O\text{-}Mg\text{-}Br}{\overset{|}{C}} - CH{<}\frac{CH_3}{CH_3},$$

constitue l'assemblage, qui, sous l'action de l'eau, transforme le composant $>\underset{O\text{-}MgBr}{C} -$ dans le composant alcool *tertiaire* $>\underset{OH}{C} -$.

Voici des faits qui prouvent que cette interprétation est conforme à la vérité :

a) L'oxyde d'éthylène tri-méthylé $\frac{H_3C}{H_3C}{<}\underbrace{C - CH}_{O} - CH_3$, comme tel, fournit avec le méthyl-bromure de magnésium, l'alcool *tertiaire*, le *diméthyl-isopropyl-carbinol* $\frac{H_3C}{H_3C}{>}C(OH) - CH{<}\frac{CH_3}{CH_3}$.

b) Alors que la réaction du composant $>CCl -$ sur le complexe $-\underset{O\text{-}MgBr}{CH} -$ n'est pas possible, ce composant chloré persiste, ainsi en est-il de la réaction du *méthyl-bromure de magnésium* $H_3C - Mg\text{-}Br$ sur le dérivé *chloro-isobutylique* de l'aldéhyde α chloro-isobutyrique $\frac{H_3C}{H_3C}{>}CCl - CH{<}\frac{Cl}{O}\text{-}C_4H_9(iso)$(*). On obtient alors, par suite de la réaction exclusive de $-CHCl$ sur $CH_3\text{-}Mg\text{-}Br$, le dérivé méthylé correspondant $-CH - CH_3$, selon l'équation

(*) Ce produit, mis au jour par M. Brochet, résulte de l'action du chlore sur l'alcool *isobutylique* $\frac{H_3C}{H_3C}{>}CH - CH_2(OH)$. C'est le produit principal de cette intéressante réaction.

$$\frac{H_3C}{H_3C}{>}C\,Cl - CH < {}^{Cl}_{O - C_4H_9\,(iso)} + CH_3\text{-}Mg\text{-}Br$$

$$= \frac{H_3C}{H_3C}{>}C\,Cl - \underset{\displaystyle O - C_4H_9\,(iso)}{CH} - CH_3 + Cl\,Mg\,Br.$$

Cet éther isobutylique mono-chloré bout à 182°.

Il est intéressant de constater ici que, alors qu'on fait l'inverse, c'est-à-dire alors que l'on fait tomber la solution éthérée du dérivé chloro-aldéhydique isobutylique dans la solution éthérée du dérivé magnésien, celui-ci, se trouvant en excès, détermine, du produit précédent, l'élimination d'une molécule d'acide H Cl

$$>C\,Cl - \underset{\displaystyle O\,C_4H_9}{CH} - CH_3 + CH_3\text{-}Mg\,Br = >C = \underset{\displaystyle O\,C_4H_9}{C} - CH_3 + CH_4 + Cl\,Mg\,Br$$

et l'on obtient un éther oxy-isobutylique, non saturé de la formule

$$\frac{H_3C}{H_3C}{>}C = \underset{\displaystyle O\,C_4H_9\,(iso)}{C} - CH_3$$

lequel bout à 162°.

II. La réaction du méthyl-bromure de magnésium sur l'*éther α chloro-isobutyrique* $\frac{CH_3}{CH_3}{>}C\,Cl - CO\,(OC_2H_5)$ avait été réalisée dans le but d'obtenir la *mono-chlorhydrine* $>\underset{Cl}{C} - \underset{OH}{C}<$ du *glycol éthylénique tétraméthylé*, selon l'équation

$$\frac{CH_3}{CH_3}{>}C\,Cl - CO\,(OC_2H_5) + 2\,CH_3\text{-}Mg\text{-}Br$$

$$= \frac{CH_3}{CH_3}{>}C\,Cl - \underset{CH_3}{\overset{CH_3}{C}} - O\text{-}Mg\text{-}Br + C_2H_5O\text{-}Mg\text{-}Br.$$

On peut s'expliquer à présent qu'au lieu de cette chlorhydrine $(H_3C)_2 - \underset{\displaystyle Cl}{\underset{|}{C}} - \underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{C}}(CH_3)_2$, on obtient dans cette réaction du *penta-méthyl-éthanol* $(H_3C)_3 - C - \underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{C}} - (CH_3)_2$, mais le mécanisme de la production de ce composé est autre qu'il n'apparaissait à l'origine, et qu'on ne l'imagine, à la suite de l'inspection des formules des composés en C_4 et en C_6 qui interviennent dans cette réaction, réaction de $CH_3 - Mg - Br$ tout à la fois sur le composant oxy-éther $\underset{|}{OC} - OC_2H_5$ et halo-éther $\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > C\,Cl -$. En réalité les choses se passent comme suit :

a) Du produit immédiat de la réaction

$$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > C\,Cl - C \begin{matrix} \diagup CH_3 \\ - O - Mg - Br \\ \diagdown CH_3 \end{matrix}$$

il résulte l'*oxyde de tétraméthyl-éthylène*

$$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > \underset{\displaystyle O}{\underbrace{C - C}} < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}$$

et du chloro-bromure de magnésium Cl Mg Br.

b) Cet oxyde avec une molécule nouvelle de composé magnésien, forme l'assemblage qui, avec l'eau, fournit le *penta méthyl-éthanol* et ne peut fournir que cela

$$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} < \underset{\displaystyle O}{\underbrace{C - C}} < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} + CH_3 - Mg - Br = \begin{matrix} H_3C \diagdown \\ H_3C - \\ H_3C \diagup \end{matrix} > C - \underset{\displaystyle O - Mg\,Br}{\underset{|}{C}} < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}.$$

Je regrette de n'avoir pas eu jusqu'ici à ma disposition cet oxyde de tétraméthyl-éthylène $(H_3C)_2 - \underset{\displaystyle O}{\underbrace{C - C}}(CH_3)$ pour faire direc-

tement cette expérience, qui peut paraître superflue, vu son résultat assuré (*). Je rappellerai à cette occasion que son isomère, la *pinacoline* $(H_3C)_3 - C - CO - CH_3$, d'ordre acétonique, m'a fourni aussi avec le méthyl-bromure de magnésium $CH_3 - Mg - Br$, le *pentaméthyl-éthanol* $(H_3C)_3 - C - C(OH) - (CH_3)_2$. C'est la réaction ordinaire des *acétones*. Le rendement de cette opération est intégral.

III. Pour terminer je ferai remarquer la différence d'*aptitude réactionnelle* vis-à-vis du complexe $-\overset{|}{\underset{|}{C}} - O - Mg\,Br$ du chlore Cl dans les groupements $-\overset{|}{\underset{|}{C}} - Cl$ tertiaire, $> CH\,Cl$, secondaire et $-CH_2\,Cl$, primaire.

a) *Groupement secondaire* $HC - Cl$. Sous l'action de $CH_3 - Mg - Br$, le *chloro-propionate* d'éthyle α fournit la *monochlorhydrine amylénique*, alcool tertiaire $\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > C\,(OH) - CH\,Cl - CH_3$. Or à un moment donné de la réaction, il a existé, dans l'éther, le composé $\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > \underset{O - Mg - Br}{\underset{|}{C}} - CH\,Cl - CH_3$ à côté de $C_2H_5O - Mg - Br$. Le système $> \underset{O - Mg - Br}{\underset{|}{C}} - CH\,Cl -$ n'a donc pas réagi en lui-même pour former $> \underbrace{C - CH}_{O} - + Cl\,Mg\,Br$, puisque à la suite de l'action de l'eau sur ce complexe, on obtient la *monochlorhydrine* correspondant à ce *complexe* $> C\,(OH) - CH\,Cl -$, en même temps que $HO - Mg - Br$.

b) Groupement *tertiaire* $-\overset{|}{\underset{|}{C}} - Cl$. Les choses se passent tout autrement avec la *monochlorhydrine* isomère, alcool secondaire $\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > C\,Cl - CH\,(OH) - CH_3$. Cette *monochlorhydrine* est le résultat de l'addition de H Cl gaz à l'oxyde $\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > \underbrace{C - CH}_{O} - CH_3$.

(*) Depuis lors, cette réaction a été réalisée. Tout s'est passé comme il est indiqué (Mars 1907).



Son addition à la solution éthérée magnésienne détermine une effervescence gazeuse, $\overset{|}{\underset{|}{C}}H$ (OH) devenant, avec CH_3 - Mg - Br : $\overset{|}{\underset{|}{C}}H$ - O Mg - Br + CH_4 ; il existe donc à un moment donné l'assemblage $\genfrac{}{}{0pt}{}{CH_3}{CH_3}> \underset{Cl}{C} — \underset{O - Mg\,Br}{CH} — CH_3$ d'où la formation et l'existence passagère de l'*oxyde d'éthylène tri-méthylé* $\genfrac{}{}{0pt}{}{H_3C}{H_3C}> \underbrace{C — CH}_{O} — CH_3$ qui avec le composé magnésien fournit, comme je l'ai dit plus haut, le *diméthyl-isopropyl-carbinol* $\genfrac{}{}{0pt}{}{H_3C}{H_3C}> \underset{OH}{C} — CH < \genfrac{}{}{0pt}{}{CH_3}{CH_3}$. Le rendement en cet alcool dans cette opération atteint 65 p. c.

Je ferai remarquer qu'ici à ne considérer la réaction que dans son point de départ et son résultat, on pourrait admettre une transposition intra-moléculaire, un — CH_3 s'échangeant contre — OH. La réaction cachée ou provisoire de > C Cl sur — CH-O-Mg Br écarte cette interprétation.

M. E. Vanderlinden signale un singulier cas de foudroiement qui s'est produit au mois d'août dernier en Angleterre (Midland) et relaté dans le fascicule d'octobre du QUATERLY JOURNAL de la Société météorologique de Londres. La foudre frappe six hommes réfugiés sous un hêtre. Deux furent tués sur le coup et les autres jetés à terre sans connaissance. Au cours de son enquête, le coroner remarqua à sa grande stupéfaction que l'arbre sous lequel l'accident avait eu lieu était tout à fait intact. Pas la moindre lésion à voir ni sur le tronc, ni sur les branches, ni sur les feuilles. Dans son rapport, le magistrat se contenta de rapprocher ce fait de l'opinion encore assez répandue et qui attribue aux hêtres une immunité contre les coups de foudre ; M. Vanderlinden estime que ce curieux foudroiement corrobore ce qu'il a avancé à la réunion précédente relativement à la relation qui paraît exister entre l'intensité des dégâts que le coup de foudre provoque sur les troncs d'arbre et leur conformation extérieure. Il a notamment exposé les raisons théoriques et les faits observés qui tendent à faire

admettre que les lésions sont moindres et probablement souvent nulles sur les arbres lisses tels les hêtres. Le cas qu'il vient de signaler est à cet égard très démonstratif. Il est incontestable que le hêtre a fait ici office de récepteur et de conducteur de la décharge. L'électricité a parcouru toute la longueur du tronc, sans l'entamer, pour se porter sur les personnes placées à proximité.

Le R. P. Schaffers, S. J., fait une communication *Sur le regel;* en voici le résumé :

On sait que Tyndall se servit de l'abaissement du point de congélation sous l'effet de la compression pour expliquer le mouvement progressif des glaciers, et même des phénomènes aussi simples que l'agglutination des cristaux dans une boule de neige, l'adhérence de deux morceaux de glace pressés ensemble dans l'eau, la soudure spontanée d'un bloc de glace traversé par un fil métallique tendu par des poids. Or, cet abaissement du point de congélation est si faible (0,°1 pour 13 atmosphères, d'après Kelvin), qu'on ne peut le faire intervenir légitimement que dans les cas où la température de la glace est d'avance très voisine du point de fusion. Même dans ces cas on semble avoir souvent exagéré son rôle, pour n'avoir pas suffisamment tenu compte de certaines causes beaucoup plus simples.

Une de ces causes est la mauvaise conductibilité de la glace. Il en résulte que quand la surface fond, la masse n'a pas encore atteint 0°; si bien que l'eau de fusion, en pénétrant dans les interstices, y vient au contact de parois plus froides, qu'elle soude en se recongelant. Ce principe ne sera pas contesté, sans doute, tant qu'on ne l'applique qu'à de la glace qui commence à fondre. Mais le P. Schaffers croit qu'il reste vrai même dans le cas d'une fusion prolongée.

Tout d'abord, il est admis par tout le monde que si les glaces des régions boréales s'épaississent de plus en plus lentement à mesure que l'hiver avance, c'est parce que la glace déjà formée ralentit de plus en plus le refroidissement de l'eau non encore congelée. La surface inférieure de la croûte solide reste toujours à 0° au contact de l'eau, tandis que la surface supérieure prend la température de l'air, et le flux de chaleur déterminé par cette

différence de température décroît rapidement quand l'épaisseur augmente. C'est pourquoi, après plusieurs mois de gelées continues, la glace des lacs et des rivières dépasse rarement un mètre d'épaisseur.

Or, dans la fusion d'une masse quelconque de glace nous avons affaire au phénomène inverse. Sa surface extérieure reste à zéro pendant la fusion, et le flux de chaleur vers l'intérieur dépend donc de la différence entre cette température constante de la surface et la température croissante de l'intérieur. Il va se ralentir considérablement à mesure que cette dernière se relève, et comme il ne s'annule en théorie qu'après un temps infini, on peut admettre que des différences de l'ordre du dixième de degré entre la surface et la profondeur de la masse subsisteront à peu près jusqu'à la fin de la fusion, tant que celle-ci ne sera pas trop lentè. *C'est ainsi que le phénomène se présente d'ordinaire dans les expériences de cours citées en tête de cette note.*

Quant aux glaciers, les mesures de température faites à différentes profondeurs dans des trous forés dans les parties basses de leur cours, donnent toujours des températures légèrement inférieures à 0°, et précisément de la quantité qui correspond à la pression supportée dans les points où on les a obtenues. La théorie de l'abaissement du point de congélation est donc applicable, pourvu que les mesures aient été faites lorsque l'atmosphère était au-dessous de zéro, condition d'ailleurs satisfaite par la plupart d'entre elles. En effet, dans une atmosphère au-dessus du point de fusion, *il n'est pas possible d'obtenir la température vraie de la glace par la lecture d'un thermomètre enfoncé dans cette glace,* parce que la tige du thermomètre amène à la température de fusion par son contact la paroi du trou. Dès lors, on lira toujours la température même de fusion, puisque le thermomètre sera plongé dans un mélange d'eau et de glace. Un résultat exact ne peut s'obtenir que quand le thermomètre est enfermé dans la glace *sèche,* c'est-à-dire quand on opère dans une atmosphère de température inférieure à zéro. Cette remarque essentielle semble n'avoir jamais arrêté l'attention des observateurs. Les expériences suivantes en montreront l'importance.

Un thermomètre a été soudé au centre d'un bloc de glace de 15 centimètres d'épaisseur, puis abandonné toute une nuit au

dehors. Le lendemain matin il marquait environ —4°, tandis que l'air était à —2°,8. Le minimum avait été de —5°,3. Le bloc de glace est alors rentré dans le laboratoire, où la température est de +9°. Le thermomètre monte. Une demi-heure après il est à —2°, et la glace commence à se mouiller. Après une nouvelle demi-heure, on lit —0°,5 et l'eau de fusion commence à couler. Au bout d'une heure et demie le mercure arrivait au zéro. Mais cette lecture était absolument illusoire, comme on va le voir. Remis à l'air libre, alors que la température y était remontée à —1°,8, le bloc se ressouda autour du thermomètre. On le reprit cinq heures plus tard : il marquait —2°,75. Or, dans l'intervalle, la température de l'air était passée de —1°,8 à +1°,2 (maximum) puis redescendue à —0°,8. L'abaissement du thermomètre soudé dans la glace ne pouvait donc être dû qu'au rétablissement de l'équilibre de température troublé dans la masse de la glace par la fusion qui s'était opérée le long du thermomètre pendant son séjour dans le laboratoire. En réalité, la température centrale n'était remontée que de —4° à —2°,75 dans un intervalle de temps de près de sept heures.

Voici encore une observation, parmi plusieurs autres, sur une glace moins épaisse (9 centimètres) :

Heures	9,45	10,45	11,45	14,45	16,15
Air.	—6,8	—4,8	—4,3	—2,3	—2,3
Therm^tre dans la glace	0	0	—3	—3	—3

Au début, le thermomètre soudé dans le bloc avait été amené au zéro comme dans l'expérience précédente.

Ces résultats montrent en outre que la température intérieure de blocs de glace de faible épaisseur peut rester inférieure à celle de la surface pendant un grand nombre d'heures. Il n'y a donc rien d'étonnant que des masses considérables, soumises à des alternatives de dégel et de regel dans une atmosphère dont la température moyenne ne s'élève que lentement à mesure que le glacier descend des régions des neiges persistantes, mettent plusieurs mois à atteindre le point de fusion dans toute leur épaisseur, et, par conséquent, la plasticité des parties hautes s'explique très simplement par le regel de l'eau d'infiltration dans les fissures.

Les observations suivantes sur la soudure de blocs mis au contact et sur le passage d'un fil de fer à travers un bloc, confirment cette conclusion :

1° La soudure, soit dans l'eau, soit dans l'air, s'effectue d'autant plus énergiquement que la glace est plus froide. Dans l'eau, on voit un bourrelet se former autour de la soudure. Dans l'air, la soudure ne se fait que si la surface a été amenée au préalable à la fusion. De plus, deux blocs en fusion depuis trente-six heures au moins, pressés ensemble et abandonnés à une température supérieure à 0° avec leur face de jonction verticale, donc *sans aucune pression*, ont montré après quelques heures une adhérence considérablement accrue.

2° En fondant de la paraffine, de la cire, du soufre, on obtient très facilement la soudure des morceaux qui se touchent dans le liquide, et cette soudure s'élargit tandis qu'on continue à chauffer. Au contraire, on ne l'obtient pas sur le mercure congelé qu'on laisse revenir à sa température de fusion dans le mercure liquide, ni dans la fusion des autres métaux.

L'interprétation de ces faits est évidente. Les premiers de ces corps sont très mauvais conducteurs de la chaleur, et c'est pourquoi ils se comportent comme la glace, bien que la pression élève leur point de liquéfaction, contrairement à ce qui se passe pour la glace. Les seconds sont trop bons conducteurs pour laisser subsister des différences de température sensibles dans leur masse.

On peut ajouter encore à ces exemples, celui du gaz carbonique solide, qui se laisse façonner par compression dans des moules avec la même facilité que la neige ordinaire (*).

3° La traversée d'un bloc de glace par un fil de fer réussit d'autant mieux que la glace est plus froide et que le fil lui apporte plus de

(*) Dans tous ces cas, le regel s'opère de la manière suivante : Considérons deux blocs de glace subissant la fusion. Sur toute leur surface la température est zéro ; à l'intérieur elle décroît vers le centre. Un flux de chaleur entre par toute la surface et se dirige vers le centre en suivant la pente des températures. Si maintenant nous amenons les deux blocs au contact, les surfaces de jonction ne recevront plus de flux de chaleur venant de l'extérieur, et cependant de la chaleur continuera à s'en écouler vers le centre, à cause de la différence des températures. Donc ces surfaces, qui étaient à zéro avant le contact, descendent au-dessous quelques instants après.

chaleur. Ainsi de la glace d'étang, prise après deux jours de dégel, se ressoudait si imparfaitement qu'on pouvait à la main, sans un trop grand effort, produire une cassure nette tout le long de la surface tracée par le passage du fil.

Dans l'expérience du fil de fer les pressions peuvent être suffisantes pour amener effectivement un abaissement du point de fusion. Les résultats précédents montrent néanmoins que le principe invoqué dans cette note y joue le rôle principal.

En terminant, l'auteur fait remarquer que certaines observations semblent, pour s'expliquer d'une manière complètement satisfaisante, demander l'intervention d'un autre principe, celui de l'adhérence intime des surfaces en contact parfait mis en lumière dans les célèbres expériences de M. W. Spring. Telles sont, par exemple, les températures de — 17° relevées à 15 mètres de profondeur au sommet du Mont-Blanc dans une neige durcie de densité 0,86.

Dans une seconde communication, le P. Schaffers rapporte le résultat négatif d'un essai entrepris pour rechercher si un récepteur à cohération de télégraphie sans fil serait influencé par la détente brusque dans l'appareil de Cailletet pour la liquéfaction des gaz. On sait que, à mesure que les températures d'un corps chaud s'élèvent, le maximum de l'énergie dans son spectre se déplace vers les radiations courtes. Cela conduit à admettre qu'à très basse température il n'y aurait plus guère que de grandes longueurs d'onde. Si donc on refroidit brusquement un corps, on supprime un grand nombre de radiations, dont beaucoup pourraient avoir la longueur d'onde voulue pour influencer le cohéreur. Il est bien vrai qu'habituellement c'est la production des ondes, et non leur suppression qui agit dans les récepteurs de télégraphie sans fil, que dans le cas présent la variation d'énergie des ondes serait sans doute trop petite et le phénomène pas assez brusque; mais l'expérience, facile à faire, valait d'être tentée. Elle n'a rien donné.

Le Secrétaire présente au nom du R. P. Wulf, S. J., une note sur un *Nouvel électromètre pour charges statiques*, dont la section vote l'impression dans la seconde partie des ANNALES.

Troisième section

—

M. Gilson transmet son rapport sur le mémoire intitulé : *Nouvelles recherches biologiques sur les huiles de poisson*, et envoyé en réponse à la question de concours de la section. Voici le texte de ce rapport :

Les recherches sur les corps gras et en particulier sur les huiles de poisson, sont des plus délicates et exigent des connaissances très spéciales pour pouvoir être menées à bien.

La composition et les caractères de ces huiles ne sont pas constants, ils varient d'après la manière dont elles ont été préparées et conservées, d'après leur âge, etc.

Ces faits ont été trop souvent méconnus par les chimistes qui ont étudié ces produits, ce qui explique les résultats différents ou contradictoires auxquels ils sont fréquemment arrivés.

Les auteurs du mémoire possèdent à fond leur sujet. Les méthodes analytiques qu'ils emploient sont les plus précises, parmi les plus récentes. La marche qu'ils ont adoptée est rationnelle. Ils ne se sont pas adressés aux produits du commerce, mais ils ont préparé eux-mêmes les huiles et les ont soumises à l'analyse dans différentes conditions.

Outre la description de huit huiles, dont six n'avaient jamais été étudiées, les auteurs nous donnent un procédé rationnel de préparation de l'huile de foie de morue et autres poissons ; ils décrivent une méthode nouvelle pour le dosage des matières insaponifiables, méthode qui est applicable à l'analyse de tous les corps gras ; ils nous apprennent comment on peut distinguer une huile de poisson préparée par la méthode rationnelle de celle qui a été obtenue par l'ancien procédé et enfin ils nous indiquent le moyen de reconnaître le degré d'altération d'une huile.

Ce mémoire constitue une contribution importante à l'étude des huiles de foie de poisson. Nous estimons donc qu'il y a lieu de lui accorder le prix.

Le R. P. F. Dierckx, second commissaire nommé par la section pour examiner ce mémoire, dépose le rapport suivant :

Le premier rapporteur fait ressortir à bon droit la difficulté des recherches sur les huiles animales. En analysant le mémoire, il met spécialement en lumière les méthodes originales et les résultats personnels des auteurs. Nous n'avons pas à y revenir. Les méthodes et les résultats témoignent de beaucoup de sagacité, d'une réelle habileté technique, d'un vrai scrupule de précision et d'actualité.

Le mémoire me paraît digne de la récompense prévue par les statuts de la Société scientifique et le règlement des concours annuels. Les auteurs y trouveront un précieux encouragement pour l'exécution complète de leur vaste programme.

La section se rallie aux conclusions des rapporteurs et propose de lui décerner le prix. Elle charge le Secrétaire de transmettre au Conseil général de la Société les rapports et le vœu de la section (*).

Le R. P. G. Schmitz présente le rapport suivant sur une note de M. le chanoine Bourgeat intitulée : *Sur les Fossiles de petite taille* :

La note de M. l'abbé Bourgeat, professeur aux Facultés libres de Lille, attire l'attention des observateurs sur la forme naine des fossiles recueillis dans certains gisements. Le problème est intéressant et mérite d'être étudié. Je propose volontiers l'impression, dans les ANNALES, de la contribution qu'y apporte notre savant confrère.

Je me permettrai toutefois de faire observer que les *Coal-Balls* ne contiennent pas uniquement de petits fossiles. Il suffit de voir les belles séries de l'École des Mines de Paris, de la Sorbonne, voire la dernière planche de mon récent article dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, pour se convaincre qu'il ne peut être question dans l'espèce de *nanisme*. La taille des individus est normale et il y en a d'entièrement développés. S'il y a beaucoup de petits fossiles, c'est que nous sommes en présence de vrais essaims où les jeunes spécimens dominent. C'est ma manière de voir, bien

(*) Le Conseil de la Société, dans sa séance du 18 février, a confirmé le vote de la section et ouvert le pli cacheté qui accompagnait le mémoire couronné. Les auteurs sont M. le Dr M. Henseval et M. J. Huwart. Leur mémoire sera publié dans la seconde partie des ANNALES.

qu'il m'en coûte. Il me serait, en effet, plus agréable d'être amené à la conviction de M. le professeur Bourgeat. L'objection que ce fait constitue contre ma théorie de la formation de la houille, serait moins sérieuse si nous pouvions admettre le nanisme de l'ensemble de cette faune. Ce nanisme s'expliquerait par la dégénérescence des goniatites dans des mares laissées sur la lagune houillère lors d'un retrait des eaux marines.

Quant aux *efflorescences gypseuses* dont il est parlé à propos des échantillons de M. l'abbé Carpentier, elles sont, pour moi, des groupements chimiques récents. Quand l'eau d'infiltration pénètre un amas schisteux riche en pyrite, il se produit une série de réactions assez élémentaires, qui laissent le fer à l'état de carbonate et d'oxyde et la chaux en petits groupements étoilés de sulfate de chaux. Il est difficile d'établir les équations chimiques sans faire appel à l'oxygène en quantité. Ceci, joint aux conditions où l'on recueille de pareils échantillons, m'amène à conclure qu'on ne peut récolter ces spécimens en profondeur et en place.

M. le capitaine-commandant baron Greindl fait le rapport suivant sur le même travail :

La note de M. l'abbé Bourgeat présente beaucoup d'intérêt, en ce qui concerne les gisements de formes naines constatés par le savant professeur lui-même; l'indication, qu'il nous donne, sur les conditions de gisement des fossiles, nous suggère, comme à lui-même, la réflexion que les formes naines observées proviennent peut-être de la présence de sels nuisibles à la vie organique. On désirerait connaître, s'il en est de même dans les autres exemples qu'il cite; s'il était possible, pour chacun d'eux, d'indiquer la roche typique où on les trouve et d'indiquer un gisement contemporain non affecté de nanisme, il me semble que la question ferait un grand pas.

Qu'il me soit permis d'attirer également l'attention sur ce point: si une salure nouvelle des eaux de mer, par introduction de pyrite ou de magnésie, venait à anéantir brusquement une colonie de mollusques, la prédominance énorme des formes jeunes amènerait peut-être l'observateur à conclure au nanisme, par comparaison avec la faune d'un endroit contemporain où viendraient s'accumuler les coquilles des individus arrivés au terme de leur vie. Il est

donc bon de signaler, chaque fois que la chose est possible, si l'on se trouve devant des fossiles *in situ*, où abonderont les petites formes, — ou au contraire en présence de dépouilles, où elles seront moins nombreuses en proportion. Cette précaution contribuerait, je crois, à éclaircir la question en permettant de rejeter les cas douteux. Je propose l'impression dans les ANNALES de la note de M. Bourgeat et souhaite qu'il nous en donne lui-même un complément approfondi, avant que nous demandions leur avis aux biologistes.

La section vote l'impression de la note de M. Bourgeat dans la seconde partie des ANNALES.

M. le comte A. de Limburg-Stirum expose le curieux problème, encore insoluble, que présente l'étude *des limons quaternaires*.

Dans la plus grande partie de la Belgique — les études de MM. Rutot et Van den Broeck en font foi, le limon non stratifié, sans fossile dit hesbayen, surmonte les limons stratifiés à coquilles terrestres et des graviers à Mammouth. D'autre part MM. Lohest, Forir, J. Cornet ont établi d'une manière qui paraît irréfutable que les limons non stratifiés, sans fossiles, des hauts plateaux de la Sambre et de la Meuse sont antérieurs aux dépôts des hautes terrasses de ces fleuves, caractérisés par les coquilles terrestres et la faune de l'âge du Mammouth. Dans le premier cas le limon sans fossiles serait plus récent que ces derniers dépôts, dans le second il serait plus ancien. Jusque maintenant aucune découverte, aucun indice n'ont permis de soupçonner les relations du limon des hauts plateaux avec celui des « plaines moyennes » et le problème reste entier.

Seules certaines anomalies de notation de la carte géologique (à Cruyshautem, notamment) permettraient de croire en Flandre à l'existence d'un limon non-stratifié inférieur aux graviers à silex. Mais ces faits sont trop peu nombreux pour qu'on puisse en tirer des conclusions, car ils peuvent être la conséquence d'une simple erreur.

Il y a du reste des limons de toute espèce et partout. On trouve des limons très intéressants jusque sur les plus hauts plateaux des Ardennes.

En résumé, dans notre pays, l'étude des limons offre encore un vaste champ aux recherches des géologues.

M. É. De Wildeman fait la communication suivante *à propos de l'exploitation des lianes à caoutchouc.*

La campagne menée depuis quelques années contre l'État Indépendant du Congo vise en particulier la récolte du caoutchouc, aussi a-t-on vu paraître dans ces derniers temps sur le problème très complexe de l'exploitation des lianes une grande série d'articles, parmi lesquels il en est comme toujours un très grand nombre dont les auteurs n'ont étudié que bien superficiellement le sujet.

On sait que l'État du Congo a publié en 1905 une circulaire défendant la coupe de la liane et n'autorisant pas ses agents à accepter du caoutchouc provenant de lianes coupées. Tous les autres pays de l'Afrique tropicale ont également prohibé la coupe des lianes, qui a été faite par les indigènes dans presque tous les pays producteurs et se fait encore sûrement dans beaucoup de régions.

Le mode de récolte du caoutchouc par coupe des lianes a, dit-on, des inconvénients *tant pour la source* que *pour le produit* lui-même. On a prétendu que le pied de la liane coupée repousse *rarement* et que le latex obtenu par cette méthode brutale est impur. On a également dit que par cette méthode une grande partie du latex ne peut être extraite, qu'elle reste dans l'écorce et se coagule dans les vaisseaux, obstruant même ceux-ci et rendant ainsi une proportion de latex beaucoup moindre que la saignée, d'autant plus que l'indigène a pris la mauvaise habitude de jeter dans la forêt, où ils pourrissent, les morceaux de lianes dont il a laissé écouler le latex.

Certains auteurs ont également prétendu que les caoutchoucs de mauvaise qualité, fortement endommagés par des matières étrangères, étaient toujours des produits obtenus par le battage.

Qu'il nous soit permis de répondre à ces allégations, qui sont loin d'être exactes, et d'appuyer sur certaines d'entre elles qui ont un fond de vérité et sur lesquelles il faut insister.

Le pied de la liane coupée repousse *rarement* dit-on? Cette non repousse est, pensons-nous, un cas exceptionnel. Certes si l'on prend une vieille liane productrice dont la base possède une écorce très épaisse, et dont l'incision ne donnerait d'ailleurs guère de latex, et qu'on la coupe, la souche aura de la difficulté à produire des rejets capables de reformer une plante. Mais est-ce là le cas général?

Plusieurs auteurs, et plusieurs explorateurs, prouvent au contraire que les lianes coupées à une certaine distance de terre ou même rez terre rejettent toujours du pied. Nous avons d'ailleurs fait à ce sujet de nombreuses expériences en serre chaude, et toutes nous ont démontré que si l'on enlève la tête d'une liane, des bourgeons latents, visibles ou invisibles, se développent et que dans certains cas même il est possible d'obtenir d'une plante à tige unique, une plante à plusieurs tiges d'épaisseur égale.

M. Y. Henry, inspecteur de l'Agriculture en Afrique occidentale française, a d'ailleurs répondu à cette objection belge sans la connaître. Son argument, qui ne peut être taxé de partial, mérite d'être rappelé une fois de plus. Il dit : « Une liane saignée à repos et à un état que nous appellerons *vie ralentie*, coupée rez terre au moment du repos de la végétation, développera plus tard des yeux latents de la base et donnera des rejets qui, d'après les observations faites, seraient exploitables entre la sixième et la dixième années, suivant que le *gohine* se développe en liane ou en buisson.

» Cette même liane laissée en l'état ne serait utilisable dans aucune de ses parties, le vieux bois étant épuisé et les jeunes rameaux, toujours très nombreux mais d'une grosseur insuffisante (*). »

Ce premier argument nous paraît donc indiscutablement sans valeur et ce n'est pas en se basant sur lui que l'on peut travailler en faveur de l'exploitation des lianes caoutchoutifères par saignées.

Bien au contraire, car comme le fait encore ressortir M. Henry, dans l'ouvrage auquel nous empruntions quelques lignes plus haut : « Si l'on songe que les lianes venues de semis ne paraissent pouvoir être exploitées utilement qu'entre la dixième et la vingtième années, il y a un sérieux avantage à pratiquer le recépage dans tous les peuplements épuisés. »

C'est là absolument notre avis et c'est, pensons-nous, celui de tous ceux qui ont étudié avec soin la question, qui ne se sont pas laissé emporter par un examen trop sommaire de faits observés plus ou moins bien en Afrique.

(*) *Le Caoutchouc dans l'Afrique occidentale française*, p. 142.

Le latex obtenu par *la coupe*, est impur, disent certains opposants à ce système. Mais nous nous demandons pourquoi ce latex serait plus impur que celui obtenu par une saignée? Quelle différence peut-il exister entre le liquide qui s'écoule de la plaie faite à la liane en place et celui qui sourd de la surface de section d'un morceau de cette liane? Est-ce la minime quantité de suc cellulaire sortant des cellules lésées de la section qui est capable d'influencer la pureté du latex? Cet argument nous paraît sans la moindre valeur et nous ne comprenons pas comment il a pu être présenté.

On pourrait au contraire dire avec plus de raison, que c'est le latex recueilli par égouttage des tronçons de lianes qui, toutes choses égales d'ailleurs, serait plus pur, puisqu'il n'a pu entraîner avec lui des matières étrangères déposées sur la partie externe de l'écorce.

Mais quand on veut nous objecter que par cette méthode d'exploitation brutale on ne peut extraire tout le latex contenu dans la liane on est dans le vrai. Il est indiscutable qu'une grande partie du latex, et par suite du caoutchouc, reste dans les tissus du tronçon de tige, mais n'en reste-t-il donc pas dans les tiges des lianes saignées, et comme celles-ci meurent fréquemment, pour ne pas dire toujours à la suite de la saignée, du moins dans les parties situées au-dessus de la saignée, le caoutchouc qui se trouve dans le latex au-dessus de cette saignée est également perdu.

De sorte que même à ce point de vue la saignée n'a guère d'avantage sur la coupe de la liane.

Mais où gît le défaut de la méthode? Dans le fait que l'indigène jette sur le sol de la forêt, où ils pourrissent, les fragments des tiges qu'il a coupées.

Il est vrai que certains observateurs ont fait remarquer que ces tronçons de lianes éparpillées dans la forêt ne sont pas toujours perdus; il peuvent repousser et donner naissance à de nouveaux pieds de lianes. Cette remarque, qui a été faite par M. Aug. Courboin, durant son voyage au Congo français, où il séjourne encore, mérite d'être prise en considération.

Il est en tous cas certain que dans des conditions favorables, et en serre, des morceaux de lianes à caoutchouc, déposés à plat sur le sol, légèrement recouverts, peuvent servir de boutures comme d'ail-

leurs des morceaux semblables placés verticalement dans la terre, un œil dépassant le niveau du sol.

Mais, nous dira-t-on, ce qui est obtenable en serre, avec une chaleur de fond, ne l'est pas en Afrique où la surface du sol peut se refroidir parfois assez fortement! Certes, le bouturage des lianes en région tropicale n'est pas aussi aisé qu'en serre. Mais, d'essais qui ont été faits en Afrique et à Madagascar, on peut conclure que, si le bouturage est difficile, il n'est pas impossible.

Si l'on considère la méthode de la coupe uniquement dans le but de produire du latex par écoulement, ce procédé est à déconseiller, quoique à nos yeux il soit supérieur à la saignée, mais si à la coupe se joint le battage, nous trouverons dans la fusion de ces deux méthodes des avantages certains.

Mais, disent encore ceux qui s'attaquent à l'État du Congo, le battage donne un mauvais caoutchouc; tous les caoutchoucs qui arrivent sur le marché et se trouvent fortement mélangés de matières étrangères sont, disent-ils, obtenus par battage!

Erreur complète cette fois : car les plus beaux caoutchoucs du Congo, les « Kasai rouge », sont en général obtenus par battage. Et le caoutchouc des herbes, dont la valeur a fortement augmenté dans ces derniers temps, et qui ne peut être obtenu que par battage, n'est-il pas de bonne qualité?

Dans le centre de l'Afrique, malgré les défenses de l'État Indépendant, on coupe donc encore la liane et on la coupera longtemps encore, le Gouvernement du Congo, malgré toute sa bonne volonté, malgré tout son Service forestier ne pourra empêcher l'indigène d'opérer la coupe que le jour où il pourra mettre un gendarme à côté de chaque liane, ou faire suivre tout collecteur par un agent forestier.

D'ailleurs est-ce un si grand mal? Le noir a expérimenté par lui-même que la coupe, au lieu de détruire les plantations, ranime les plantes fatiguées et c'est en connaissance de cause qu'il emploie ce mode d'exploitation.

Faut-il couper rez terre ou à 50-60 centimètres de hauteur? Comme nous l'avons vu plus haut, M. Y. Henry préconise la coupe rez de terre. D'après les renseignements que nous avons reçus du centre de l'Afrique, les indigènes ne coupent jamais une liane rez terre, prétendant, avec raison pensons-nous, qu'en laissant un

tronçon de tige ils ménagent plus d'yeux dormants et favorisent la repousse. Par la coupe, les noirs du Congo prétendent qu'au bout de trois ans les repousses peuvent être réexploitées, tandis que la même liane saignée aurait dépéri et, au bout de quelque temps de traitement, n'aurait même plus été capable de donner des rejets. Et c'est là la raison pour laquelle ils continuent le battage, bien persuadés que le jour où cela leur sera devenu impossible, la production du caoutchouc aura fini son temps.

Ce qu'il faudrait donc, ce n'est pas défendre la coupe, mais la réglementer; cette coupe devrait être faite rationnellement et les parties coupées devraient être à leur tour traitées rationnellement. Le traitement rationnel nous paraît être, nous le répétons, le battage. Malheureusement, nous ne sommes pas encore assez avancés dans l'étude des diverses lianes qui produisent du caoutchouc en Afrique pour certifier que le procédé de battage est utilisable pour toutes les lianes. Au dire de certains voyageurs, des tiges ou des rhizomes de quelques espèces encore mal connues, qui renferment indiscutablement des latex caoutchoutifères ne donnent rien au battage, le caoutchouc disparaîtrait même sous le pilon. Mais il est certain, en tous cas, que pour les *Landolphia owariensis*, *Klainei* et *Thollonii*, le battage donne d'excellents résultats, si, bien entendu, la plante productrice est en âge ou en état de produire du caoutchouc. Inutile, pensons-nous, d'insister sur le fait que les lianes trop jeunes ne produisent qu'une matière collante ne possédant aucune des propriétés du vrai caoutchouc.

Un mot encore relatif à la production. On se rend bien mal compte dans le public de ce que peut produire une liane. Nous avons encore vu citer dans un journal que chaque kilo de caoutchouc amené d'Afrique en Europe représente une liane coupée!

Que signifie donc cette proportion : 1 kilo de caoutchouc représente une liane coupée? Qu'est-ce donc qu'une liane coupée? Quelle était sa longueur, son épaisseur, quelle était la surface d'écorce exploitée?

Ce sont là toutes questions auxquelles on n'a jamais répondu.

Actuellement on sait, pour quelques cas isolés, la quantité de caoutchouc contenue dans le litre de latex ou celle extraite d'un kilo d'écorce de lianes; cette dernière quantité ne dépasse pas dans les conditions les plus favorables 14 à 15 p. c.

Lorsqu'en se basant sur les expériences faites par lui et par Arnaud, Godefroy-Lebeuf publia les données relatives au rendement probable d'une exploitation par battage, il citait que 42 000 kilogrammes d'écorce avaient donné 3360 kilogrammes de caoutchouc, soit 8 p. c.

En admettant que les nègres aient, pour amener cette quantité d'écorce, dû détruire toutes les lianes de leur région, et qu'il faille dix ans pour reconstituer le massif, deux choses certainement exagérées, il y aurait encore bénéfice à employer l'écorçage : par la saignée, le même nombre de lianes n'aurait certainement pas pu fournir en aussi peu de temps une quantité aussi considérable de caoutchouc, la saignée n'enlevant pas, comme nous l'avons dit déjà, tout le latex contenu dans la liane.

Que pouvons-nous déduire des quelques observations que nous avons rapportées ici? Nous nous trouvons en présence de trois modes d'exploitation des lianes. Lequel faut-il choisir?

Le premier mode : la saignée, n'est pas à conseiller pour les lianes, parce que, nous le répétons, une partie du latex reste dans la plante et que la saignée elle-même fait du tort à la liane dont elle amène souvent la mort.

Le second mode : la coupe, est déjà de plus de valeur au point de vue de la quantité de produit obtenable; la coupe bien effectuée n'empêchera pas la repousse et elle permet, par égouttage, l'extraction d'une bien plus grande quantité de latex et, par suite, l'obtention d'une proportion plus considérable de caoutchouc.

Mais le troisième mode est encore préférable; l'extraction mécanique du caoutchouc contenu dans l'écorce ne laisse, en effet, échapper rien ou presque rien.

L'exploitation caoutchoutifère, du moins celle des lianes les plus communément cultivées au Congo (*Landolphia owariensis, Klainei* et espèces affines), doit se borner aux opérations : coupe et battage. Après la coupe on laissera repousser. En un mot, on devra mettre la réserve caoutchoutifère en coupe réglée.

Nous trouverons indiscutablement de nombreux opposants à notre manière de voir, la plupart des Gouvernements coloniaux ont d'ailleurs défendu, par des décrets, la coupe des lianes. Mais y a-t-il des arguments sérieux pour préconiser la saignée? Nous sommes persuadé que les gouvernements reviendront sur leurs

décisions et reconnaîtront que la coupe fait moins de tort que la saignée, même celle qui est faite dans les meilleures conditions par des ouvriers expérimentés.

Le jour où la coupe sera permise, où les forêts à caoutchouc auront été mises en coupes réglées comme nos forêts européennes, où l'on aura déterminé le roulement, et où l'on connaîtra exactement l'étendue de la région qui peut être mise en exploitation, bien des abus criants cesseront d'eux-mêmes, et peut-être arrivera-t-on à éviter dans le commerce ces fluctuations de prix si désagréables pour la bonne marche des affaires.

Ce jour est peut-être plus proche qu'on ne le pense; souhaitons, pour le maintien de la richesse des colonies africaines, peut-être même pour celles des autres régions caoutchoutifères, que cette dernière méthode, sur laquelle nous avons souvent insisté, soit mise en vigueur partout dans un bref délai.

M. Arm. Renier développe la thèse suivante : Les nodules à *Goniatites* du terrain houiller ne constituent pas une objection réelle à la théorie de la formation autochtone des couches de houille.

En voici un résumé :

Dans la séance du 20 mars 1905 de la Société Géologique de France, M. Henri Douvillé déclarait, en conclusion d'une note sur « les *coal balls* du Yorkshire (*) », qu' « il est très vraisemblable que la houille qui se trouve au voisinage immédiat des *coal balls* a la même origine, et a été ainsi formée par charriage et dépôt sur un fond de mer ». La raison de cette opinion, à laquelle MM. Hang et de Lapparent se sont ralliés entièrement, est la découverte de goniatites au milieu des débris végétaux si abondants et si remarquables que contiennent ces concrétions calcaires ou dolomitiques du terrain houiller d'Angleterre, nommées *coal balls*. Les goniatites étant des animaux marins, les débris de végétaux terrestres, au milieu desquels leurs coquilles se retrouvent, ont donc été charriés et déposés sur un fond de mer. De là à conclure que la houille, qui, pour la plus grande part, provient incontestablement d'une accumulation de végétaux terrestres, a été, elle aussi, formée

(*) Bull. Soc. géologique de France, 1905, 4e série, t. V, pp. 154-157, pl. VI.

par transport, il n'y a qu'un pas. M. Douvillé ne le franchit qu'avec réserve; il ne suggère cette extension que comme très vraisemblable. M. de Lapparent, au contraire, « considère comme absolument décisif l'argument fourni par cette rencontre, et il espère que, dorénavant, cette théorie de la formation de la houille par transport aura moins de peine à s'acclimater dans les régions du Nord (*) ».

Le R. P. Schmitz, dans la conférence qu'il fit l'an dernier à la Société scientifique, nous déclarait le problème ardu, et « sans tenter d'atténuer ces difficultés au profit de la théorie de la formation autochtone des couches de houille », avouait ne pas connaître de réponse péremptoire (**). Tel est, je pense, l'état de la question.

Il faut remarquer d'abord que l'objection s'applique parfaitement aux couches de houille du terrain houiller belge, pour lequel les observations paléobotaniques nous portent à admettre un mode de formation autochtone. Car, contrairement à l'opinion de M. Douvillé, le régime marin ne paraît pas avoir été beaucoup plus persistant dans le Yorkshire, que dans le Nord de la France et en Belgique, non seulement dans les *Yerodale series*, mais encore dans les *coal measures* proprement dites. En effet, les deux niveaux qui ont fourni les *coal balls* à goniatites étudiés par M. Douvillé, existent aussi bien en Belgique qu'en Angleterre. L'un est celui des *Yerodale series* ou plus exactement des *Pendleside series* (***), et de l'ampélite de Chokier à nodules calcaires, dont la correspondance longtemps entrevue ne peut plus faire de doute aujourd'hui (IV); l'autre est le niveau à *Gastrioceras Listeri* de si remar-

---

(*) BULL. SOC. GÉOLOGIQUE DE FRANCE, 1905, 4e série, t. V, pp. 154-157, pl. VI.

(**) G. Schmitz, S. J., *Formation sur place de la houille*. REVUE DES QUEST. SCIENT., avril 1906, pp. 32-33 du tiré à part.

(***) W. Hind et J.-A. Howe, *The Pendleside group at Pendle Hill*, etc. QUATERN. JOURN. GEOL. SOC., vol. LVIII, 1901, pp. 347-402 et pl. XIV.

(IV) Cf. Purves, J.-C., *Sur la délimitation et la constitution de l'étage houiller inférieur en Belgique*. BULL. ACAD. ROYALE DE BELGIQUE, 50e année, 3e série, t. II, pp. 514-568, 1 pl. de coupes.

Cornet J. *Le Terrain houiller sans houille* (K1a) *et sa faune dans le bassin du Couchant de Mons*. ANN. SOC. GÉOLOGIQUE DE BELGIQUE, 1906, t. XXXIII, pp. M. 139-152.

quable constance, tant en Angleterre (*) qu'en Belgique (**) où il renferme aussi des nodules. Ces niveaux marins ne sont d'ailleurs pas les seuls connus dans le westphalien (*) (**). La couche *Catharina* de la Westphalie, pour ne citer qu'un cas, représente un niveau à goniatites beaucoup plus récent encore que ceux mentionnés plus haut.

La question est donc d'une portée générale, surtout pour la partie inférieure du terrain houiller, pour l'assise de Chatelet de M. X. Stainier.

Dans une étude publiée l'an dernier (***), j'ai montré que le terrain houiller résulte de la répétition d'un cycle de phénomènes indiqué par le cycle pétrographique : toit... mur, couche de houille, toit...

Le toit marque une période de sédimentation terrigène. Dans les roches ainsi formées, schistes, grès, poudingues, se rencontrent des débris de végétaux désintégrés et profondément macérés. La sédimentation terrigène s'étant ralentie ou ayant cessé, une végétation s'est implantée dans ces sédiments, c'est la signification du « mur ». La formation de la couche de houille proprement dite, qui constitue le terme suivant, n'a pu encore être complètement étudiée par suite de difficultés d'observation. D'après ce que nous en savons, et en remarquant qu'elle

---

(*) J.-T. Stobles et Wheelton Hind. *The marine beds in the coal measures of north Staffordshire,* with notes on their paleontology. QUAT. JOURN. GEOL. SOC., vol. LXI, 1905, pp. 495-497 et pl. XXXIV-XXXVI (p. 518).

(**) Stainier X., *Stratigraphie du bassin houiller de Charleroi et de la Basse-Sambre.* BULL. SOC. BELGE DE GÉOLOGIE, PALÉONTOLOGIE ET HYDROLOGIE, t. XV, 1901, pp. 1-60 (p. 55).

Stainier X., *Stratigraphie du bassin houiller de Liége,* IBID., t. XIX, 1905, pp. 1-20.

Renier A., *Note préliminaire sur les caractères paléontologiques du terrain houiller des plateaux de Herve.* ANN. SOC. GÉOL. DE BELGIQUE, t. XXXI, 1904. Bull. pp. 71. 73.

Fourmarier P., *Note sur la zone inférieure du terrain houiller de Liége.* ANN. SOC. GÉOL. DE BELGIQUE, t. XXXIII, 1906, pp. M-17-20.

(***) Renier A., *Observations paléontologiques sur le mode de formation du terrain houiller belge.* ANN. SOC. GÉOL. DE BELGIQUE, t. XXXII, 1906, pp. 261-314, pl. XI.

repose sur un sol de végétation, on est porté à admettre que la couche de houille a été constituée par une accumulation de végétaux terrestres à proximité du lieu même de leur croissance. Il est très vraisemblable que la forêt marécageuse, dont l'implantation est indiquée par le mur, a continué à prospérer sur ses propres débris jusqu'à achèvement du dépôt de la couche de houille. La sédimentation terrigène ayant repris, a donné naissance au toit de la couche. Quelques-uns des représentants de la dernière forêt, enrobés par cette sédimentation terrigène, nous ont été conservés comme « troncs debout ».

Il résulte de cet exposé que le toit représente le terme contradictoire non seulement du mur, mais surtout de la couche de houille, dont le mur n'est qu'un accessoire.

Dans ces conditions, la note de M. Douvillé (*) me frappe dès le début : « On désigne en Angleterre, sous le nom de *coal balls* des nodules de grosseur très variable que l'on rencontre dans les exploitations du Yorkshire et du Lancashire, soit dans les couches de houille, soit dans le toit de ces couches ».

Si la conclusion à laquelle nous conduisent par induction l'étude des troncs debout et l'examen comparé du toit et du mur, exprime réellement le mode de formation des couches de houille, nous devons nous attendre à trouver une différence entre les *coal balls* des couches de houille et ceux du toit de ces couches, pour autant que ces *coal balls* représentent bien une partie de la couche ou du toit, ayant subi une minéralisation hâtive de nature spéciale. Il en est bien ainsi en ce qui concerne les nodules des *Pendleside series* et du niveau à Gastrioceras Listeri, à en juger par les observations que j'ai faites en Belgique sur ces niveaux si constants. Les roches encaissant ces nodules contiennent la même faune et la même flore que les nodules. Leur cas paraît absolument comparable à celui bien connu du boghead d'Autun (**).

Or, il existe en fait deux catégories de nodules, ainsi que le remarque formellement M. Douvillé : les uns, du premier type,

(*) BULL. SOC. GÉOLOGIQUE DE FRANCE, 1905, 4e série, t. V, pp. 154-157, pl. VI.

(**) Cf. C. Eg. Bertrand, *Le Boghead d'Autun*. BULL. SOC. IND. MINÉRALE DE SAINT-ÉTIENNE, 3e série, t. VI, 2e livraison 1892 (p. 40 du tiré à part).

contiennent des débris végétaux bien conservés, avec racines de *Stigmaria;* les autres, du second type, contiennent des goniatites, avec peu de débris végétaux, qui consistent en morceaux de bois plus ou moins décomposés et empâtés dans une vase noire.

La série de nodules à *Gastrioceras Listeri* examinés par M. Douvillé, « provient de la localité de Shore, ... et a été recueillie au toit de l'*Upper foot mine* ». Elle se rapporte au second type de nodules. Il en est de même de la série de préparations provenant des *Pendleside series.*

Dans ces conditions, nous sommes bien en droit de conclure que l'existence de nodules à goniatites dans le terrain houiller ne constitue pas une objection réelle à la théorie de la formation autochtone des couches de houille.

Car, nous venons de le voir, les goniatites ont été rencontrées dans la roche qui est précisément l'antithèse de la couche de houille; dans le toit, cette formation marine est donc sans rapport direct avec la couche de houille.

Mais il y a plus. Les nodules de la première série, avec végétaux bien conservés et racines de *Stigmaria*, prouvent précisément la formation sur place de la couche de houille. Ces nodules proviennent, en effet, des couches de houille et doivent eux aussi être considérés comme une partie spécialement fossilifiée de la roche au milieu de laquelle ils se rencontrent. Or ces nodules situés, en général, à la partie supérieure de la couche, au contact même du toit, contiennent des *Stigmaria;* ils nous représentent, ainsi que l'admet M. Douvillé, un sol de végétation de forêt tourbeuse. Nous retrouvons donc là où devaient être enracinés les troncs debout que l'on découvre dans le toit, c'est-à-dire à la partie supérieure de la couche, un sol de végétation qui fut, selon toute vraisemblance, le sol de végétation de ces troncs debout, ultimes représentants de la dernière forêt qui a formé la couche. La masse de la couche de houille est ainsi comprise entre un sol de végétation au bas, son mur, et un sol de végétation à son extrême couronnement.

Il est donc hautement probable que si la couche de houille se trouvait minéralisée, c'est-à-dire se trouvait criblée de *coal balls* sur toute son épaisseur, nous y trouverions du bas en haut des *Stigmaria* autochtones, taraudant les débris de troncs et de feuilles

couchés à plat. L'existence des *coal balls* à *Stigmaria* à la partie supérieure de la couche permet, en effet, de considérer cette extension comme une interpolation, tandis qu'une théorie basée exclusivement sur la nature des murs faisait de cette extension une extrapolation, rendue toutefois assez vraisemblable par l'existence de troncs debout dressés sur la couche de houille et se prolongeant dans son toit.

La démonstration est ainsi plus complète. Elle ne sera toutefois parfaite que lorsque l'on sera parvenu à préparer des plaques de houille suffisamment minces pour être lisibles au microscope, et que l'on aura établi, pour un certain nombre de cas, l'existence des *Stigmaria* autochtones à travers toute la masse de la couche; des conditions spéciales de conservation nous ont permis de constater jusqu'à présent l'existence de ces *Stigmaria* aux limites inférieure et supérieure de la couche de houille; cela doit suffire pour rejeter comme inadmissible l'hypothèse de la formation des couches de houille westphaliennes par charriage des débris végétaux et dépôt sur un fond marin, alors même que la couche possèderait dans son toit une faune marine à *Pterinopecten* et *Goniatites*.

M. L. De Lantsheere fait une communication verbale sur un fait nouveau intéressant l'histoire des Hittites.

Quatrième section

La séance s'ouvre à 4 h. 1/4, sous la présidence de M. le Dr Struelens, vice-président (*).

M. le Président fait part à l'assemblée de la perte que la section vient de faire dans la personne de M. le Dr Venneman, professeur d'Ophtalmologie à l'Université catholique de Louvain. Après avoir payé un juste tribut de regrets à la mémoire de cet éminent collègue, qui présida naguère la quatrième section et lui présenta plusieurs travaux importants, il donne la parole à M. le Dr De Lantsheere, que ses études spéciales et l'amitié qui le liait au

(*) M. le Dr Matagne, empêché au dernier moment, s'était fait excuser.

défunt désignaient tout naturellement pour nous retracer la vie, les mérites et l'œuvre scientifique du regretté professeur de l'*Alma mater*.

Voici un résumé de la notice de M. le Dr De Lantsheere :

M. le Prof. Venneman, qui faisait partie de la *Société Scientifique* depuis 1879, et avait dirigé les travaux de la quatrième section pendant trois années consécutives, de 1888 à 1891, a succombé subitement le 13 novembre dernier à une faiblesse cardiaque, au cours d'une affection qui ne le retenait chez lui que depuis très peu de jours, et ne l'empêchait même pas de se livrer à ses chères études habituelles.

Né à Zele, le 25 janvier 1850, Émile Venneman tenait de ses aïeux cette décision et cette fermeté de caractère, cette opiniâtreté au travail, cette ténacité dans la poursuite de ses fins, qui, de tout temps, caractérisèrent la race flamande. La vigueur intellectuelle et morale contrastait chez lui avec la frêle apparence de sa constitution physique.

De brillantes études moyennes, au petit Séminaire de Saint-Nicolas, l'acheminèrent à l'Université catholique de Louvain, en octobre 1870. Il s'y montra doué d'aptitudes exceptionnelles pour les sciences naturelles et médicales, et d'une endurance au travail que couronnèrent des examens triomphants.

Bientôt, par un choix heureux entre tous, il fut appelé à la tâche du professorat : l'anatomie descriptive, plus tard l'histologie; plus tard encore l'ophtalmologie lui furent confiées (1882), de sorte qu'après avoir approfondi dans leurs bases mêmes les sciences médicales, il aboutissait à l'une des spécialités les plus parfaites et les plus intéressantes.

L'Université catholique de Louvain perd en lui un de ses meilleurs professeurs, l'Académie royale de Médecine de Belgique un de ses membres les plus distingués, les Sociétés française et belge d'Ophtalmologie et la Société Scientifique de Bruxelles un de leurs plus fermes soutiens.

Le Bulletin de l'Académie royale de Médecine de Belgique, les Annales des Sociétés française et belge d'Ophtalmologie et de la Société Scientifique de Bruxelles, les Archives d'Ophtalmologie, les Annales d'Oculistique, la Revue Médicale de Louvain

contiennent de nombreux travaux sur les sujets les plus variés d'anatomie, de physiologie, de pathologie, de thérapeutique concernant tous l'ophtalmologie. Son étude sur les affections du tractus uvéal, écrite pour l'*Encyclopédie française d'ophtalmologie*, forme une des belles parts de cette importante publication.

La clinique des maladies des yeux de l'hôpital civil de Louvain avait souffert du départ successif et rapproché de MM. les Prof. Hairion et Nuel, et du décès de M. le Prof. Noël. La tâche de M. Venneman ne fut pas facile, lorsqu'il fut placé à la tête de l'enseignement clinique universitaire. Dans ses fonctions de chef de la clinique ophtalmologique, il apporta un zèle constant à améliorer tout ce qui touche à l'enseignement, et témoigna toujours un dévouement absolu à ses malades. Son installation clinique pouvait rivaliser avec d'autres plus anciennes et fort connues, tant au point de vue des exigences de l'outillage que du nombre des malades.

Venneman apportait dans l'exposé et la défense de ses conceptions scientifiques une franchise juvénile, qui ne fut peut-être pas toujours bien comprise par d'autres savants fermement attachés à leurs théories ou à l'interprétation de leurs découvertes. Nul cependant n'eut jamais à se plaindre d'un manque de loyauté ou de générosité. Comme tous les modestes, il avait le cœur foncièrement bon et honnête.

Ceux qui ont vécu plus intimement avec lui au cours des années universitaires, et plus tard, ont tous largement bénéficié de sa science généreuse, de ses conseils excellents et désintéressés, de son dévouement absolu. Il faut ajouter qu'il savait donner à ces relations scientifiques et professionnelles un caractère spécial, empreint de loyale amitié, de confiance intime. Venneman n'eut d'autre souci que le travail, nulle autre ambition que d'en répandre les fruits à pleines mains.

C'est à un membre de notre section qu'a été conférée la chaire d'Ophtalmologie laissée vacante par la mort du professeur Venneman : M. le Dr Van der Straeten a été chargé de ce haut enseignement. Ce choix, qui consacre les mérites de notre collègue, est un hommage rendu à la fois au Service de Santé de l'armée où il occupait une place en vue, et à la Société scientifique de Bruxelles; la section, ajoute le Président, est heureuse d'offrir au nouveau Professeur ses vives félicitations *(Applaudissements)*.



M. Mullie, Inspecteur vétérinaire adjoint au ministère de l'Agriculture, fait une communication sur *la stomatite aphteuse et la récente réapparition de cette maladie dans le pays.*

La stomatite aphteuse est une maladie contagieuse, virulente et inoculable, caractérisée par une fièvre initiale, suivie d'une éruption vésiculeuse sur certaines muqueuses, et à certains endroits de la peau. La muqueuse buccale et la peau entre les onglons et sur les mamelles sont les endroits de localisation typique des lésions.

Signalée pour la première fois en Moravie en 1764, la stomatite fait bientôt l'objet de discussions multiples entre les défenseurs des théories de la contagiosité et les partisans de la non-contagiosité. Néanmoins, vers les années 1830, la première doctrine est adoptée partout.

Des études et des recherches diverses ont établi la nature microbienne de l'affection, mais le germe n'a guère pu être isolé jusqu'ici : les dimensions de cet agent causal sont tellement réduites qu'il passe à travers le filtre Chamberland. La stomatite aphteuse fait donc partie du groupe des maladies à germes extrêmement petits ou à germes filtrants.

La symptomatologie est relativement variable chez les différents animaux domestiques. Cette maladie se transmet avec une grande facilité aux bovidés et aux porcs; le mouton et la chèvre, moins réceptifs, viennent sur la même ligne. On signale, avec une certaine réserve, quelques cas de transmission du bœuf au cheval, au chien et au chat. En pratique, c'est surtout chez le bœuf, le mouton, la chèvre et le porc qu'elle est constatée.

A) *Chez les bovidés :*

Sous la forme bénigne, l'affection débute par une fièvre d'intensité variable suivie, après quelques heures, de lésions buccales, podales et mammaires chez les laitières en pleine lactation. Les jeunes bêtes sont généralement peu atteintes; chez elles la maladie se limite souvent à la forme buccale. C'est chez la vache en pleine lactation que l'évolution des aphtes est le plus typique. Il s'en produit un nombre variable en différents points de la muqueuse de la bouche, et surtout sur le bourrelet et sur la langue, de même que sur la peau entre les onglons et sur la peau de la mamelle. L'aphte rempli d'un liquide clair au début, trouble dans la suite, mais

toujours très virulent, se rupture bientôt soit par un traumatisme, soit par la pression du liquide et le ramollissement de la membrane. L'exsudat liquide dissocie les cellules de la couche de Malpighi, qui constitue avec le reste de l'épithelium ou de l'épiderme la paroi de la vésicule.

La localisation buccale s'accompagne d'une salivation abondante et d'un bruit fréquent et très caractéristique de succion.

La localisation podale se manifeste par la douleur dans ces régions et la gène dans la marche.

La localisation mammaire siège de préférence sur les tétines et rend la mulsion douloureuse. C'est la rupture des aphtes au moment de la traite qui rend le lait virulent.

Sauf complication, la guérison des aphtes rupturés est rapide, tandis que l'infection des plaies aux pieds et aux mamelles peut entraîner des mammites et des décollements des onglons suivis d'abcès et d'arthrites qui peuvent être causes de pertes très importantes. A côté de ces formes bénignes et typiques, il peut se présenter des formes graves résultant soit de l'évolution des aphtes sur les muqueuses digestives ou respiratoires, soit d'une sorte d'intoxication septique.

Tandis que la forme bénigne est rarement suivie de mort et peut, par complication, entraîner 2 à 5 p. c. de mortalité, la forme grave au contraire peut amener la mort dans 15 à 20 p. c. des cas. Cette dernière forme a été signalée dans différents pays. Vers les années 1898 à 1901, elle a provoqué de grandes pertes. On ne connaît guère sa nature exacte.

B) *Chez le mouton et chez la chèvre :*

La maladie évolue chez ces animaux sous une forme plus bénigne et se limite généralement aux localisations podales.

C) *Chez le porc :*

Le porc souffre parfois beaucoup de l'affection. Comme localisation, celle-ci se limite généralement aux onglons. Mais la douleur y est souvent considérable, au point que le malade ne sait plus marcher.

La stomatite aphteuse est une maladie extrêmement contagieuse. Toutes les bêtes d'une étable sont successivement infectées

par le virus, surtout celui renfermé dans la salive, qui souille les aliments des autres bêtes ou les objets divers en contact avec elles. Le virus est transporté d'une étable à une autre par le personnel ouvrier dont les habits, les chaussures ou les mains sont infectés, de même que par les marchands, les bouchers, les visites d'amis, les chiens, les chats, les oiseaux, les fourrages; la maladie se transporte par les mêmes intermédiaires d'une pâture à une autre, de même que par des abreuvoirs communs.

Le passage d'une bête saine sur une route infectée, surtout pendant les temps humides, l'exposition sur des champs de foire où se trouvent des bêtes malades, le transport par des wagons qui ont véhiculé des bêtes atteintes de stomatite peuvent être des causes d'infection.

Les facteurs de propagation les plus importants, lors des épizooties de cette maladie, sont : le commerce des bêtes bovines, le colportage des porcelets, le pâturage le long des voies publiques des troupeaux de moutons et les laiteries coopératives. Ces dernières, par les relations multiples qu'elles créent entre les cultivateurs, favorisent la dissémination du virus aphteux. Mais c'est surtout par la vente aux coopérateurs du petit lait infecté non chauffé qu'elles peuvent être des causes redoutables d'extension de la maladie. Un coopérateur peut apporter, pour le travail commun, un lait virulent, qui, sans être stérilisé, est mêlé au lait de plusieurs autres cultivateurs et rendu ainsi à de nombreux coopérateurs. On crée de cette façon une série de foyers où les porcs et les veaux sont les premières victimes.

Lors d'infection expérimentale, la maladie a une incubation variant de vingt-quatre à quarante-huit heures; par la contagion naturelle, cette incubation varie de deux à six jours.

Le virus aphteux est peu résistant, il est détruit par la désinfection sommaire des lieux et résiste peu à l'action de l'air et de la lumière. Sa virulence est détruite par un chauffage à 70° pendant dix minutes. A 100° la destruction est immédiate.

La résistance aux antiseptiques est peu marquée et à l'abri de la lumière le microbe de la stomatite résiste à une température de —8°-10°.

On constate, en pratique, qu'une première atteinte de la maladie confère une immunité pendant huit mois à deux ans. On a naturel-

lement cherché à tirer profit de ce fait. On constata d'abord que le sérum des animaux immunisés par une atteinte ordinaire, ne conférait aucune immunité aux animaux neufs. Löffler a tenté ensuite l'immunisation active par l'injection intravaccineuse du virus atténué par la chaleur. Mais les résultats furent inconstants. Les animaux immunisés par ce procédé donnent un sérum peu actif mais non dépourvu cependant d'un certain pouvoir immunisant. Ce dernier est trop faible pour pouvoir être utilisé en pratique.

Plus tard, Löffler a tenté l'immunisation combinée en injectant aux animaux neufs un mélange titré de sérum et de virus. Cette méthode a même été employée en pratique. Le produit utilisé s'appelait séraphtine; l'utilité pratique en est très discutée et le produit ne s'emploie plus guère.

Le traitement doit consister en des soins de propreté; il sera symptomatique en cas de complications. Il y a quelques années, M. Baccelli avait préconisé à titre curatif surtout, des injections intraveineuses de sublimé : ce traitement ne montra aucune efficacité particulière. Bien des auteurs déclarent même avoir constaté des empoisonnements mercuriels; aussi la vogue de ce spécifique n'a guère duré.

Pour la prophylaxie de cette affection on a tenté d'abord différents *procédés d'immunisation*.

Dès qu'un animal est atteint dans une exploitation, en pratique, on tente d'infecter immédiatement tous ses compagnons d'étable en prenant un linge imprégné de virus et en le frottant sur la muqueuse buccale de toutes les bêtes bovines. Ce procédé a pour résultat de faire évoluer en même temps la maladie chez tous les animaux, ce qui facilite les soins d'entretien et en diminue la durée. Divers auteurs déclarent en outre que cette pratique a pour résultat de donner la maladie sous une forme plus bénigne; les avis sont cependant partagés sur ce dernier point. Cette immunisation n'est indiquée qu'au moment où la maladie a éclaté dans une exploitation (inoculation de nécessité), elle ne se justifie pas dans les autres cas.

Nous avons rappelé déjà la sérovaccination, qui avait pour objet de donner aux animaux une immunité par l'injection d'un mélange de sérum et de virus. Ce procédé a été beaucoup employé en Allemagne et n'y a guère donné de résultats brillants.

Une troisième méthode de vaccination consiste à injecter sous la peau une certaine quantité de sérum des animaux surimmunisés. Nous avons dit que ces sérums ont un pouvoir immunisant peu élevé. Aussi chez les bœufs de 600 kilos, faut-il injecter 240 centimètres cubes de sérum pour obtenir une immunité pendant quatorze jours. Il est évident qu'un semblable procédé implique des dépenses trop élevées en fait de préparation de sérum, pour une durée d'immunité d'ailleurs trop brève. Cependant cette sérothérapie peut être indiquée pour immuniser des bovidés devant être mis avec d'autres pendant quelque temps, par exemple à un concours, une exposition, etc. A ce titre la sérothérapie a déjà été appliquée. Par suite de l'inefficacité pratique des méthodes de vaccination, il ne reste plus qu'à recourir aux *mesures de police sanitaire*.

La grande contagiosité de la stomatite aphteuse rend difficile et disons même impossible la préservation des pays non protégés par des frontières naturelles. Quand un pays indemne de l'affection reçoit du bétail d'un pays infecté, la mesure qui s'impose immédiatement est la fermeture de la frontière à tout envoi suspect; une simple visite sanitaire dans ces cas ne suffit pas, à moins qu'elle ne soit suivie d'une quarantaine prolongée, encore la première mesure doit-elle être préférée. Nous dirons même, que ce qu'il importe surtout d'éviter dans ces cas, c'est le voyage dans ces pays infectés de marchands de bétail de boucherie qui, n'ayant aucun intérêt en jeu, ne prennent aucune mesure pour éviter le contact avec des bêtes atteintes de stomatite. Ce sont de dangereux intermédiaires qui ramènent dans le pays sain le virus de la maladie.

La fermeture radicale des frontières n'empêchera pas toujours une affection qui s'étendant de proche en proche, évolue près de la frontière en pays voisin. Cependant dans ces cas, les foyers restent isolés et des mesures spéciales peuvent être prises plus efficacement dans le pays sain.

L'exemple de la Grande-Bretagne est très intéressant dans l'étude de la question qui nous occupe. Ce pays, protégé contre une contagion immédiate par contiguïté, avait prohibé toutes les importations du continent et fut cependant envahi à trois reprises : deux fois en 1893 et une fois en 1894. Des mesures sanitaires énergiques ont eu raison du mal, qui prenait cependant déjà une certaine extension. L'origine de ces infections est encore ignorée.

Quand un pays est contaminé, une mesure qui s'impose avant toute autre est celle de la déclaration obligatoire par le propriétaire du bétail infecté. Cette déclaration sera suivie de la séquestration du bétail malade, de la désinfection du fumier, de l'interdiction de circulation dans un certain rayon autour du foyer; toutes ces mesures ne seront rapportées qu'un certain temps après la guérison et quand tout danger d'infection aura disparu.

Quand la maladie débute dans un pays ou dans une contrée, il peut être indiqué d'avoir recours à l'abatage en masse de tous les animaux malades; cette mesure a donné, il y a quelques années, d'excellents résultats dans un État de l'Amérique du Nord. 15 000 bêtes ont été ainsi sacrifiées en un court laps de temps et ce sacrifice important a réussi à faire disparaître l'infection.

Pendant les épizooties de stomatite, les foires et marchés doivent être l'objet d'une surveillance minutieuse et la désinfection des wagons doit être rigoureuse.

Les laiteries coopératives doivent en temps d'épizootie aphteuse faire l'objet d'une inspection sévère. Il importe de pasteuriser ou de bouillir le petit lait, de désinfecter les cruches, bref, de prendre de multiples précautions sans lesquelles ces organismes peuvent propager la maladie chez les animaux et même chez l'homme.

En 1838, trois vétérinaires prussiens absorbèrent, pendant quatre jours, chacun un quart de litre de lait cru provenant de vaches atteintes de stomatite aphteuse grave. Tous trois présentèrent des éruptions aphteuses localisées à la bouche ou étendues aux mains et aux doigts. De nombreuses observations de transmission de la stomatite aphteuse de la bête bovine à l'homme ont été recueillies dans toutes les grandes épizooties. Cette infection se fait soit par l'ingestion d'aliments renfermant le virus aphteux, soit par l'inoculation de ce dernier dans des plaies aux mains ou aux pieds. En 1874, M. Hulin constata une véritable épidémie de stomatite chez les habitants d'Héverlé près de Louvain. La contamination de l'homme a donc été constatée, mais il ne s'ensuit pas que cette infection soit fréquente; d'ailleurs, les soins élémentaires de propreté des mains et des plaies permettent de l'éviter. Il est indiqué, surtout quand il s'agit de lait pour enfant, de faire bouillir cet aliment avant son utilisation, quand il provient de

vaches atteintes de stomatite aphteuse. Le règlement sur le débit du lait défend d'ailleurs la vente de cet aliment non bouilli, en cas de maladie chez le bétail.

La stomatite aphteuse est une infection particulièrement grave pour l'agriculteur, non pas par la mortalité fréquente qu'elle provoque, mais par sa propagation facile et par l'infection consécutive d'un nombre extrêmement considérable de bovidés.

De 1889 à 1900, elle a sévi dans presque tous les pays de l'Europe centrale : l'Allemagne, la Belgique, la Suisse, la Hollande, l'Italie, la Hongrie, la Roumanie, la Russie ont été victimes de ce fléau de l'élevage.

Par suite de l'amaigrissement qu'elle provoque, des pertes de lait, des complications diverses et de la mortalité éventuelle, on estime de 50 à 60 francs les pertes subies par bête bovine atteinte.

En adoptant cette base d'appréciation on peut estimer que l'Europe centrale a subi, de 1889 à 1900, une perte d'un milliard et demi à deux milliards. Dans ce chiffre l'Allemagne aurait perdu 500 millions, la France près de 200 millions. L'agriculture belge a perdu de ce fait, près de 20 millions en onze ans. Pour les deux années 1898 et 1899, ces pertes s'élèvent à plus de 12 millions.

L'épizootie actuelle de 1906-1907 est arrivée en Belgique par la frontière française; les marchands-bouchers, qui s'approvisionnèrent en bétail gras sur les marchés français infectés, amenèrent la maladie en Belgique.

Ce qui caractérise cette invasion c'est la rapidité avec laquelle elle a envahi le pays : depuis le 9 novembre (date du premier cas observé) jusqu'au 30 du même mois, la stomatite aphteuse a visité 110 communes belges de toutes les régions du pays créant 180 foyers. Depuis lors la maladie s'est propagée rapidement par l'intermédiaire des marchands de bestiaux et des laiteries. A la fin du mois de janvier 1907 plus de 7000 bovidés avaient été infectés, représentant une première perte d'environ 350 000 francs ; heureusement que la maladie revêt cette fois et jusqu'à ce moment une certaine bénignité.

Les quelques chiffres ci-dessus suffisent amplement pour montrer combien la stomatite aphteuse est une maladie ruineuse pour l'agriculture ; ajoutons qu'elle paralyse les transactions commerciales et désorganise les cours réguliers des marchés.

M. le Président remercie M. l'Inspecteur Mullie de son intéressante communication.

M. le Dr Van Velsen, Directeur de l'Institut hypnotique et psychothérapique, entretient ses collègues de la question de *l'Hypnotisme* et de la *Psychothérapie,* et s'attache à réfuter les erreurs qui ont cours à propos de cette méthode thérapeutique. Voici cette étude :

En inscrivant en tête de cette communication le titre : *L'Hypnotisme et les erreurs existant quant à son emploi en médecine*, j'ai en vue d'exposer et de réfuter les idées erronées et si difficiles à déraciner, concernant la psychothérapie. Comme vous le verrez plus loin il faut dissocier Hypnotisme de Psychothérapie.

La *Psychothérapie* consiste dans l'application rationnelle et thérapeutique de la suggestion. *L'Hypnotisme* est un terme qui devrait être réservé pour les expériences et il vaudrait même mieux que le mot n'existât pas.

Ce qui a fait et fait encore un tort considérable à l'acceptation de la psychothérapie par le public, par une foule de confrères et par le monde religieux, c'est :

1° L'hypnotisme de théâtre et de salon, pratiqué par des forains ou des amateurs;

2° Charcot et son école de la Salpêtrière;

3° L'idée fausse que l'application de la suggestion comporte le fait de provoquer le sommeil, ainsi que celui de commander, d'imposer, d'employer la violence;

4° L'idée encore une fois fausse, que le réveil présente des difficultés ou des dangers, qu'on reste suggestible par n'importe qui, que la volonté est abolie, remplacée par celle d'un autre.

Ce sont ces erreurs-là que je vais m'efforcer de réfuter. Je sais que la tâche est difficile parce que je sais par expérience combien il est dur d'écarter des préjugés et de sortir de la routine.

« Je sais, dit Ch. Richet, combien il est difficile de croire à ce qu'on a vu, quand ce qu'on a vu n'est pas en accord avec les idées générales, banales qui forment le fond de nos connaissances. Il y a quinze jours, j'ai vu tel fait étonnant qui m'a convaincu, aujourd'hui je commence à douter et je hoche la tête. Dans six mois je n'y croirai plus du tout. C'est là une

curieuse anomalie de notre existence. Il ne suffit pas, en définitive, pour amener la conviction, qu'un fait soit logiquement et expérimentalement prouvé, il faut encore que nous en ayons pris l'habitude intellectuelle. S'il heurte notre routine, il est repoussé et dédaigné. C'est ce qu'on appelle le bon sens. C'est le bon sens qui fait rejeter toutes les idées inattendues, nouvelles, c'est le bon sens qui règle notre conduite et nos opinions. Hélas! ce bon sens qu'on prône tant n'est guère qu'une routine de notre intelligence. Le bon sens d'aujourd'hui n'est pas le bon sens d'il y a deux cents ans, ni celui d'il y a deux mille ans. »

Combien ces paroles sont vraies! Celui qui aurait avoué, il n'y a pas longtemps, chercher le moyen de transmettre la voix humaine à plusieurs lieues de distance, de photographier à travers des corps dont l'opacité n'était contestée par personne ou de transmettre un télégramme sans employer le fil, aurait été considéré comme un déséquilibré. Les médecins qui prétendent mettre en jeu les forces psychiques du malade (sans bien entendu pour cela négliger les moyens physiques) sont encore, par beaucoup du moins, considérés comme des illuminés.

Le brave Liébault, de Nancy, fut mis au ban de la société des médecins de sa ville. Actuellement on n'en est plus à ce point, mais quand on parle de suggestion beaucoup font un hem! hem! qui en dit long sur leurs pensées intimes. Manque d'habitude intellectuelle! et surtout d'expérience!

Au théâtre et au salon, les forains ou les amateurs n'avaient qu'un but : amuser et intéresser le public. Ceux qui basent leur conviction sur les expériences vues dans ces deux milieux, commettent la même erreur que ceux qui, voulant étudier l'effet du vin et n'ayant vu que des ivrognes, concluraient : le vin provoque l'ivrognerie, donc il est mauvais, donc n'en usons pas.

Il faut, somme toute, faire la distinction entre l'usage et l'abus, et ce n'est pas parce qu'il est possible d'abuser d'une chose qu'on doit la condamner. Car alors il faudrait condamner tout, absolument tout. On peut trop manger, trop boire, trop dormir, trop fumer, etc... cela n'interdit pas l'usage modéré de la nourriture, de la boisson, du sommeil, du tabac, etc...

Au point de vue médical ce qui a fait et fait encore un grand tort à la psychothérapie, c'est que Charcot s'en soit occupé, ou du moins se soit occupé d'hypnotisme. *Ceci vous paraîtra étrange et même un peu lèse-majesté*. Et cependant c'est la vérité!

Le très grand nombre de confrères, peu au courant de la question (on ne peut pas tout connaître) ne connaissent que les expériences inquiétantes et troublantes de la Salpêtrière. Ils ne connaissent que les trois états de Charcot : la léthargie, le somnambulisme et la catalepsie.

Or, parmi ceux qui sont au courant de la question d'hypnotisme, *il n'y a plus un seul adepte des théories de Charcot*. Voici ce que dit le docteur van Eeden, d'Amsterdam, dans une communication faite au Congrès de psychologie de Londres en 1902. « Le Dr Hack Tuke dans son *Traité de l'influence de l'esprit sur le corps* a fait entrevoir la possibilité de guérir celui-ci par celui-là. Si l'on avait accepté dans sa pureté cette idée riche et simple et si on l'eût rendue applicable dans la pratique, grâce à la doctrine de la suggestion de Bernheim, nous serions déjà beaucoup plus avancés. Il semble qu'alors la psychothérapie n'aurait jamais rencontré d'opposition sérieuse et qu'elle aurait été étudiée et perfectionnée sans préméditation par les médecins comme une chose naturelle et pleine de raison.

» Cependant les recherches de l'hypnotisme, si intéressantes en elles-mêmes, ont séquestré l'attention des savants, au détriment du développement normal de cette science. L'hypnotisme, porté par le nom de l'éminent Charcot, popularisé par les exhibitions publiques, a pénétré plus tôt et plus avant dans l'esprit des savants et du public.

» La psychothérapie a eu le grand tort d'être venue à sa remorque. Elle ne vint pas au monde comme une découverte nouvelle et importante de la thérapeutique, comme l'idée pure et indépendante : le corps peut être guéri par l'esprit. Elle naquit au contraire comme une partie inhérente, une conséquence de la doctrine de l'hypnotisme.

» C'est bien cela surtout qui a valu à cette nouvelle branche de la thérapie d'être reçue avec tant de méfiance et d'inimitié. Or, l'hypnotisme, tel que Charcot l'introduisit dans la science, fut censé être d'une importance peu commune au point de vue

psychologique et scientifique en général, mais il présentait un caractère tellement baroque, inquiétant et anormal, que les médecins — avertis qu'on allait s'en servir comme méthode thérapeutique — y virent de suite l'exploitation banale d'une nouveauté à des fins charlatanesques.

» Le sort de la psychothérapie eût été meilleur si le docteur Liébault eût réussi à attirer à sa modeste clinique, une dizaine d'années plus tôt, les professeurs de Nancy, avant l'avènement de la doctrine de l'hypnotisme de la Salpêtrière. L'idée qu'on ait jamais pu faire courir du danger aux patients dans la clinique de Liébault est tout bonnement ridicule. Mais l'hypnotisme tel que le font comprendre l'école de la Salpêtrière et les séances des Hanssen et Donato a terni, dès le premier abord, et rendu suspecte l'idée si simple et si intelligible de guérir les malades par leur propre esprit guidé par la suggestion et favorisé par le sommeil...

» L'hypnotisme de la Salpêtrière est le plus grand ennemi de la psychothérapie. Il fait peur aux malades et rend les médecins méfiants. »

Écoutons encore ce que dit notre distingué confrère M. Crocq, de Bruxelles, dans une communication faite à la Société Médico-Chirurgicale du Brabant.

« Vous savez, Messieurs, qu'autrefois Charcot, Gilles de la Tou-
» rette et l'école de la Salpêtrière affirmaient que la suggestion
» hypnotique ne doit et ne peut être utilisée, en thérapeutique,
» qu'avec une extrême modération. « Il est médicalement interdit,
» disait un de ces auteurs, sous peine de voir se développer une
» foule d'accidents plus graves que ceux que l'on entreprend
» de guérir, d'hypnotiser des sujets ne présentant pas les symp-
» tômes de l'hystérie confirmée. » En présence, dit M. Crocq, des progrès réalisés dans ces derniers temps il était permis de croire que cette *doctrine surannée* ne serait plus défendue par aucun expérimentateur sérieux. Il n'en est rien. L'auréole créée par Charcot fut à tel point éblouissante — et je tiens à reconnaître que pour d'autres questions elle rayonnera toujours — que, malgré l'évidence indiscutable des faits, on rencontre, actuellement encore, des savants qui défendent les opinions du maître concernant les dangers de l'hypnothérapie.

» Je suis resté stupéfait à la lecture d'un passage écrit par Gilles de la Tourette (ici M. Crocq relate un cas vraiment typique du parti-pris de ce dernier).

» Heureusement, continue M. Crocq, les obstinés partisans des dangers de l'hypnotisme thérapeutique sont devenus excessivement rares. Presque tous les neurologistes se sont rangés à l'avis de Liébault et Bernheim, qui considèrent comme absolument illusoires les dangers de l'hypnotisation thérapeutique. »

Je disais plus haut qu'il n'y a plus un seul adepte des théories de Charcot, du moins je le pensais. Mais l'apparition du livre du docteur Lapponi est venue démontrer qu'il y en avait encore un. L'étude sur l'hypnotisme du confrère défunt est très regrettable. Sa qualité de médecin des papes l'a fait jouir d'une autorité, très méritée pour d'autres matières, mais injustifiée dans la question qui nous occupe. Et malheureusement, avec son livre ont pénétré un peu partout, surtout dans le monde religieux, des idées entièrement erronées et qui vont, à nouveau, former obstacle à la vulgarisation de la psychothérapie.

Pour se faire une bonne idée de ce qu'est la psychothérapie, il faut exposer brièvement la théorie de la suggestion et de la suggestibilité.

En prenant la filiation suivante : présentation de l'idée au cerveau; acceptation de l'idée par le cerveau; réalisation de l'idée par le cerveau, nous arrivons à la loi établie par M. Bernheim.

Toute cellule cérébrale actionnée par une idée actionne à son tour les fibres nerveuses qui doivent réaliser cette idée.

La *suggestion* est donc le fait de présenter une idée au cerveau; et la *suggestibilité* consiste dans la faculté que possède le cerveau d'accepter l'idée et de la réaliser. J'insiste sur le terme : faculté, car la suggestibilité est une faculté aussi naturelle qu'une autre, par exemple la sensibilité.

Si je pique quelqu'un avec la pointe d'une aiguille, il faut que ce dernier sente une piqûre d'aiguille, sans plus. C'est là la sensibilité normale. Ne sent-il rien? il y a trop peu de sensibilité, soit anesthésie. Sent-il comme un coup de poignard? il y a trop de sensibilité, soit hyperesthésie.

Pour la suggestibilité il en est de même.

On présente une idée au cerveau, idée juste et raisonnable, 1° le cerveau examine, juge et accepte. C'est la suggestibilité normale. C'est-à-dire que le cerveau accepte normalement;

2° Le cerveau n'accepte pas, malgré tout; il y a manque de suggestibilité; c'est-à-dire entêtement comparable à l'anesthésie.

Mais par contre il peut se faire que :

3° Le cerveau accepte trop rapidement les idées; qu'il y a transformation trop rapide d'idée en acte, avant que le jugement ait pu intervenir. Il y a hypersuggestibilité.

C'est chez les hypersuggestibles qu'on trouve ceux qu'on désigne sous le nom de « bons sujets », c'est-à-dire, sujets à expériences et à exhibition foraine ou de salon. On peut dire de plus que les hystériques sont en général hypersuggestibles, soit par suggestion *directe, indirecte, paranto-suggestion* et c'est là qu'on doit trouver la cause des erreurs de Charcot qui, n'expérimentant *que* sur des hystériques, ne se défiait nullement de leur suggestibilité exagérée. Seulement, dire que les suggestibles sont des hystériques, n'a vraiment aucune raison d'être.

Les hystériques sont, en général, des hypersuggestibles; mais les hypersuggestibles ne sont pas pour cela des hystériques.

Un fait à ce propos.

Je me trouvais à la Salpêtrière. Charcot venait de faire des expériences en touchant avec une baguette de verre telle ou telle partie du crâne d'un des sujets qui servaient là, comme à la Charité, de sujets à expériences. Il provoquait de cette manière diverses expressions de physionomie qu'il attribuait à une modification réflexe centripète. Je me permis de faire remarquer que, somme toute, il communiquait une idée en touchant telle partie du crâne. Par exemple, lui dis-je, dans le fait de serrer la main à quelqu'un, vous n'envisagez que la compression de la peau, des muscles, etc., alors qu'il y a cependant communication d'une idée, celle d'amitié, de politesse, etc. Le maître me répondit brusquement que ces idées n'avaient rien à voir avec les réflexes.

Et cependant, si je viens mettre mon doigt sur votre front vous vous demanderez immédiatement ce que je veux, quelle est mon *intention* en faisant cela; et la compression de la peau n'a *aucune* importance. Dans le fait d'être giflé, l'impression physique ne

compte pour rien, il ne reste absolument que l'affront, donc l'impression psychique. Si on comprend bien cette différence entre l'impression somatique et l'impression psychique on comprend de suite l'origine des différends qui ont existé entre Paris et Nancy.

Tous les procédés de suggestion se résument donc à trouver le moyen le plus efficace de faire accepter une idée, en d'autres termes, à trouver le meilleur moyen de mettre en jeu la suggestibilité que chacun possède à un degré personnel. Il est facile de comprendre que la suggestibilité est très variable d'individu à individu.

Il s'agit de faire la distinction entre la suggestion directe et la suggestion indirecte (je laisse de côté l'auto-suggestion). La forme la plus simple de la suggestion directe est la parole, la simple suggestion verbale.

Qu'on pense bien à ceci : *tous* les phénomènes obtenus par des moyens physiques : fixation des yeux, point brillant, imposition des mains, passes, aimant, transfert, etc., peuvent être obtenus par la parole seule, la simple parole.

Je répète : au fond de toute manœuvre physique pour obtenir tel ou tel résultat, il y a toujours la suggestion. On parle quelquefois d'hypnotisation par lettre, par téléphone, etc., mais il n'y a rien d'extraordinaire à cela. Pourvu que l'idée arrive au cerveau par *n'importe quel moyen* et que celui-ci l'accepte, il y a résultat.

Il m'arrive fréquemment d'envoyer des lettres remplies de suggestions à des personnes déjà habituées, bien entendu, au traitement et se trouvant dans l'impossibilité de venir jusque chez moi.

Il y a quelques années, j'avais en traitement une jeune fille de Tournai. En dehors de l'affection pour laquelle je la traitais, elle avait quelquefois des céphalalgies très douloureuses. Je me contentais de lui envoyer une lettre par exprès disant : « Mademoiselle, quand vous aurez lu cette lettre vous vous endormirez bien à votre aise. Pendant votre sommeil vous aurez gravée en vous la suggestion d'avoir la tête dégagée. Vous dormirez pendant une demi-heure et à votre réveil vous ne sentirez absolument plus rien. » Cela réussissait toujours et notre confrère M. Lelubre, de Tournai, a maintes fois assisté à cette petite séance de suggestion par correspondance, qui ne présente d'ailleurs rien d'extraordinaire.

Comme exemple de suggestion indirecte (suggestion matérialisée, comme le désigne le Dr Bérillon) citons les pilules de « mica panis », les cachets de bleu de méthylène, etc. D'ailleurs, beaucoup d'entre vous en sont convaincus : nombre de médicaments et de médications agissent au fond plus par suggestion que par eux-mêmes.

On se figure généralement que suggestionner un malade, consiste à le plonger dans un sommeil qu'on se plaît à qualifier d'hypnotique et à imposer pendant ce sommeil une suggestion avec autorité et même avec violence. Combien il est regrettable qu'une erreur aussi manifeste ait la vie si dure !

Tout d'abord dire sommeil hypnotique ou artificiel, c'est dire un contresens. Il n'y a pas différents genres de sommeils. Il n'y en a qu'un. Et le sommeil dans lequel tombent des personnes suggestibles à ce degré, n'est que le sommeil absolument normal, celui de la nuit. Cela n'est pas contestable et d'ailleurs presque plus contesté. Surtout qu'on ne fasse pas d'analogie avec le sommeil chloroformique. Le chloroforme ne provoque pas de sommeil, mais bien un empoisonnement.

On s'imagine généralement qu'il est très simple de suggestionner et ceux qui n'ont pas la pratique procèdent de la façon suivante. Tout d'abord ils commencent par faire peur au malade en lui disant : « Je vais vous hypnotiser, vous endormir et vous forcer à faire telle ou telle chose. » Puis ils continuent : « Fixez mes yeux ! ne pensez à rien ! Je veux que vous dormiez ! Dormez ! je le veux ! je veux que vous dormiez ! » Et ainsi de suite en répétant à chaque instant : Je veux ! Reprenons ces divers points :

Fixez les yeux ! — Cela ne doit se faire qu'exceptionnellement. On ne doit pas faire fixer les yeux, ce n'est pas nécessaire et cela présente le désavantage pour nombre de malades de voir dans ce fait celui de vouloir dominer. Il se produit très souvent chez les personnes intelligentes un mouvement de révolte, même involontaire. Combien de fois n'entend-on pas répondre par des personnes à qui on veut faire fixer les yeux : cela n'ira pas, je suis plus fort qu'on ne le pense, on ne parviendra pas à me faire baisser les yeux.

Pour ma part j'emploie assez rarement la fixation des yeux et alors encore j'ai soin d'ajouter qu'il ne s'agit pas de vouloir dominer, mais tout simplement d'aider à concentrer l'attention sur ce que je dis.

Ne pensez à rien! — Comment est-il possible de pouvoir arriver à ne penser à rien? Il est tout simplement absurde de demander à quelqu'un de ne penser à rien du tout. Cela est littéralement impossible. Je dirai même plus : il est impossible de s'empêcher de penser à quelque chose.

Supposons que quelqu'un vienne vous annoncer un grand chagrin ou une grande joie. S'il vous dit ensuite : « Maintenant que vous le savez, n'y pensez plus, pensez à autre chose et ne vous occupez plus de la nouvelle que je viens de vous annoncer. » Cette demande paraîtra tout simplement absurde, comme de juste.

Or que dit-on en général au neurasthénique déprimé, démoralisé, obsédé? « Vous n'avez rien du tout; c'est purement imaginaire, mettez ces idées hors de votre tête, distrayez-vous, etc... » On serait épouvanté si on connaissait les ravages que cette phrase banale a produits chez ces malheureux malades. Ceux-ci voudraient bien ne plus penser à leurs maux, mais ils ne *savent* pas faire autrement et les efforts qu'ils font pour chasser leurs obsessions sont non seulement stériles, mais encore *fort nuisibles*. Je reviendrai plus loin sur ce sujet.

Laissez-moi raconter un petit fait caractéristique.

Un confrère de mes amis se trouvant un jour chez moi me disait que d'après lui les obsédés n'avaient qu'à mettre leur volonté en jeu pour chasser leurs obsessions. Tout cela, disait-il, était des idées à rejeter. Je lui demandai s'il pouvait, lui, s'empêcher de penser à quelque chose. Comme il répondait affirmativement je le priai de se soumettre à une petite expérience très simple : aller de chez moi jusqu'à la porte de Schaerbeek et revenir (trajet de dix minutes aller et retour) et pendant ce temps ne pas penser à son parapluie. Je ne crois pas cependant qu'il y ait au monde un objet moins impressionnant qu'un parapluie. Tout d'abord cela lui parut extraordinairement simple, mais quand il revint chez moi il était complètement bouleversé : il avait pensé à son parapluie tout le temps! et ce fait lui avait fait comprendre qu'on ne chasse pas les idées à volonté.

Dormez! — Encore une fois pourquoi faire intervenir le sommeil! Suggestionner ne veut pas dire endormir. Et ***sur 100 personnes guéries (je dis guéries) par la psychothérapie il y en a peut-être quinze à vingt au maximum qui tombent dans le sommeil.***

Prenons les deux extrêmes : l'état de veille absolu et l'état de sommeil profond. Entre les deux il y a une foule de degrés. Mais on peut dire que dès qu'on ferme les yeux il n'y a plus d'état de veille absolu. Il y a déjà état de concentration. Je m'explique.

Si nous représentons par le chiffre 5 la force dont nous disposons pour nos cinq sens il est évident qu'en supprimant un sens la force 5 reste toujours la même et s'éparpille sur les quatre sens qui sont renforcés. Si on supprime deux sens les trois autres sont exaltés.

Dans la vie ordinaire on applique cela à chaque moment. Si vous voulez fixer un objet au loin vous concentrez toute la force ou du moins une grande partie sur les yeux. Pendant ce temps les autres sens diminuent. Un amateur de musique ferme les yeux, donc supprime complètement un sens pour renforcer un autre.

Ce qui se passe pour les sens se passe de même pour le psychique. Il suffit de concentrer le plus de force psychique possible sur la faculté de suggestibilité pour faire accepter une suggestion juste et raisonnable.

Et pour cela, je le répète, il ne faut pas le sommeil. Il suffit de se laisser aller passivement.

Je tiens toujours à mes malades le petit discours suivant : « Mettez-vous bien à l'aise comme quand vous êtes dans votre lit. Tenez les yeux fermés, *pensez à n'importe quoi*, si vous sentez venir le sommeil laissez-le venir, mais si le sommeil ne vient pas, cela est parfaitement indifférent. Et maintenant votre cerveau va s'imprégner de cette suggestion (ici je donne la suggestion qui est indiquée) ». Et à plusieurs reprises, pendant une séance d'une heure, je viens répéter la suggestion : « Continuez de vous laissez aller à l'aise, sans aucun effort, pensez à n'importe quoi, » etc...

D'ores et déjà je vous demande si jamais il peut y avoir inconvénient à adresser ce discours à quelqu'un qui est somnolent, à moitié endormi ou endormi complètement. Voilà en quoi consiste,

réduite à sa plus simple expression, une séance de suggestion, une séance de ce terrible hypnotisme qui épouvante encore tant de personnes et tant de confrères.

Voici à ce propos un fait qui vous paraîtra étrange et que je puis constater bien souvent. C'est que les effets de la suggestion sont en général le plus rapidement obtenus chez les marins (de tout grade), chez les militaires (idem), ainsi que chez les religieux et les prêtres. Cela se comprend quand on sait que ceux-ci ont déjà le cerveau orienté vers l'obéissance passive. Il s'agit bien entendu, de suggestions thérapeutiques et non pas de suggestions d'expérience.

Il en est de même des intelligents, de ceux qui comprennent ce que c'est que la suggestion et ce qu'on veut obtenir de leur suggestibilité.

Je le veux! — C'est là certes un des termes les plus maladroits qu'on puisse employer quand il s'agit de psychothérapie.

Citons à nouveau ce que dit le docteur van Eeden, dans la communication citée plus haut.

« Quiconque étudie à Nancy la thérapeutique suggestive croit d'abord que cette méthode est très simple et des plus facile. On suggère le sommeil plus ou moins profond, selon l'impressionnabilité de l'individu; on enlève les douleurs et fait disparaître les symptômes morbides. On commande l'appétit, le repos normal la nuit, les selles à heure fixe; on normalise la diurèse, et il semble qu'on n'ait pas à suivre d'autre technique que de payer d'énergie et d'aplomb. Celui qui sait donner la suggestion de la façon la plus décisive, celui-là recueillera les meilleurs résultats. Si la suggestion énergique échoue, il faut abandonner la cure.

» Mais l'expérience personnelle nous apprend que la chose n'est pas aussi simple que cela. Nous avons déjà insisté sur ce point : la différence capitale qu'il y a entre traiter des gens sans éducation notable ou bien des personnes d'un développement intellectuel supérieur. L'application de la psychothérapie dans la pratique des indigents ou dans un service d'hôpital présente peu de difficultés et donne un grand succès.

» Le système à suivre est bien simple : on se pose avec autorité, on commande, on ne dépense pas beaucoup de mots, on ne se

perd pas en explications et les résultats qu'on obtient sans peine sont brillants.

» Cependant, du moment qu'il s'agit de personnes instruites, on s'aperçoit bien vite que ce système ne réussit pas. Celles-ci sont plus sceptiques, plus indépendantes. Un ton d'autorité les irrite et leur semble ridicule. Elles ne veulent pas être commandées et surtout elles ne veulent pas accepter sans comprendre. Vous ne pouvez pas faire une impression sur elles sans que vous leur ayez donné une idée claire de la chose. Si cela ne vous réussit pas et si vous voulez obtenir gain de cause en payant d'aplomb et en donnant vos suggestions avec plus d'énergie, elles vous rient au nez, perdent confiance et abandonnent la cure.

» Et voilà une difficulté énorme et d'intérêt capital pour l'avenir de la psychothérapie. Car il est évident, qu'on ne crée pas une thérapie pour les gens sans éducation et pour les pensionnaires d'hôpital seuls. C'est un sentiment très raisonnable de l'homme que celui de ne pas vouloir être commandé, de s'opposer à un ton d'autorité et c'est un désir des plus raisonnable de vouloir comprendre ce qu'on veut faire de vous et comment on vous guérit.

» Le cas échéant, nous ne pourrions donc pas soigner les plus intelligents, les plus nobles d'esprit de nos prochains! Et ne comptons-nous pas surtout dans cette classe le plus grand nombre de malades psychiques et de névrosiques? La psychothérapie est mal vue de la classe aisée et intelligente. Ce n'est pas la frayeur du danger seulement ni l'opposition des médecins qui en sont cause. Cela vient de ce qu'elle ne comprend pas bien la chose et qu'elle n'a pas confiance dans ce qu'elle ne saisit pas : elle y voit une question *d'autorité* et dans leur qualité d'hommes indépendants, ses membres ne veulent pas être commandés. Ils n'ont pas tout à fait tort. Jusqu'à ce jour la psychothérapie, comme elle a été, malheureusement, appliquée la plupart du temps, est une affaire d'autorité, une question de prépondérance du médecin vis-à-vis de son malade.

» ...La classe intelligente s'oppose à la psychothérapie parce qu'elle y voit une atteinte permanente ou accidentelle au libre arbitre. La manière de faire de beaucoup de médecins dans leurs applications de la psychothérapie est en effet de commander. »

Je donne, dans leur intégralité, ces lignes de mon éminent

confrère d'Amsterdam, parce qu'elles reflètent exactement ma pensée et que je ne pourrais mieux l'exprimer.

Oh oui, c'est bien vrai! Vouloir dominer des semblables aussi intelligents que soi-même, c'est faire de la mauvaise besogne. Même quand ils veulent se soumettre complètement à la suggestion et même quand ils sont personnellement intéressés à la réussite, il se produit chez eux, quand on prend le ton d'un sous-officier vis-à-vis d'un simple soldat, un mouvement de révolte involontaire. Laissons donc de côté ce néfaste : *je veux!* ou du moins réservons-le pour certains cas spéciaux et chez des êtres de nature fruste qui ne demandent pas à réfléchir et sont d'ailleurs incapables de le faire.

Le point le plus délicat dans les applications psychiques est de savoir se mettre au niveau de l'intelligence de la personne qu'on a à traiter.

Dans les maladies organiques on ne modifie pas le traitement selon les sujets. Que le roi et un paysan soient atteints de fièvre typhoïde on ne fera pas pour l'un autrement que pour l'autre. Dans la psychothérapie il en va tout autrement. Il faut tenir compte d'une foule d'éléments : intelligence, éducation, caractère, etc... Il est certain, en effet, qu'on ne traitera pas de façon identique une dame du monde ou une fruste paysanne, un être intelligent ou un qui ne l'est pas. Le difficile est de choisir le procédé qui s'adapte le mieux à l'esprit du sujet. Un jour se présente chez moi une paysanne ayant l'obsession d'avoir la tête remplie de fourmis, depuis plus d'un an. La pauvre femme souffrait atrocement et était profondément démoralisée parce que personne ne la croyait. Après avoir regardé dans ses yeux, dans ses oreilles et dans sa bouche, je lui garantis de les tuer en une demi-heure. Avec quelque peu de mise en scène je lui appliquai une sorte de bonnet sur la tête et... une demi-heure après tout était fini. Un peu de manganèse ajouté au sel anglais que je lui fis prendre, lui procura des selles noires et confirma la disparition définitive des insectes. .

Chàrlatanesque, dira-t-on. C'est possible, mais le moyen convenait à ce sujet fruste. Si j'avais parlé d'obsession, de suggestion, etc..., je n'aurais rien obtenu.

Ce moyen, d'ailleurs, n'est pas réservé aux seuls non-intelligents. Malebranche, pas un imbécile cependant, fut délivré par un semblant d'opération, d'une obsession bizarre dont il souffrait : celle d'avoir greffé sur son nez une sorte de petit gigot. C'est le cas de dire que les plus grands génies ne sont pas à l'abri (souvent même au contraire) des obsessions.

Une réflexion qui se présente naturellement à l'esprit est la suivante : Pourquoi ne puis-je pas me donner à moi-même telle ou telle suggestion ?

Au premier abord, cette réflexion paraît assez rationnelle. Cependant, quand on observe bien ce qui se passe dans les faits ordinaires de la vie, on peut aisément remarquer combien grand est le rôle de la *stimulation extérieure*. Prenons le cas d'un nageur. Vous savez, par exemple, nager un peu, vous êtes en train de vous ébattre, mettons au bord d'un canal, et, malgré toute votre volonté, vous n'oseriez pas vous risquer à le traverser. Vienne un défi, un danger, vous passerez facilement.

Si vous devez aller dire quelque chose de désagréable à quelqu'un, vous serez plus à l'aise si vous êtes accompagné d'un ami. Un acteur devant des banquettes n'aura pas la verve qu'il a devant une salle comble. Un acte d'héroïsme s'accomplira plus facilement au milieu de la mêlée d'une bataille que dans quelque bois écarté. On met alors en avant le fameux proverbe : « Qui veut, peut ». Oui, mais à condition, comme le dit Levy dans son beau livre : *l'Éducation de la volonté*, que : 1° ce qu'on veut soit une chose possible ; 2° qu'on sache vouloir.

Mais c'est là précisément la pierre d'achoppement dans une foule de psychoses et de névroses : on ne sait pas vouloir, ou bien on veut bien mais on s'y prend d'une façon maladroite pour mettre sa volonté en jeu. On a beau se dire : « Je veux », « je veux », on n'arrive à rien, parce qu'on veut mal et qu'on se dépense en efforts inutiles et maladroits.

La psychothérapie intervient pour apprendre à mettre sa volonté en jeu, pour la diriger, la soutenir et, finalement, la fixer.

Un exemple :

Un buveur se présente chez moi. Il se plaint de ce que malgré toute sa bonne volonté il ne parvient pas à passer outre de son

café habituel. Il est malheureux, l'obsession est plus forte que sa volonté et il succombe régulièrement. Que faire? Je le mets, comme je l'ai dit plus haut, bien à son aise, et puis je lui donne la suggestion suivante : « Au fur et à mesure que vous approcherez de votre café habituel, vous sentirez votre volonté se raffermir. Vous sentirez en vous l'appui de la suggestion et vous passerez outre avec la plus grande facilité ». Qu'ai-je fait? J'ai opposé à l'obsession une suggestion bienfaisante et cette suggestion lui sert de stimulant, de soutien. Elle joue le rôle que jouerait un ami qui voudrait l'empêcher d'entrer au café.

Prenons maintenant quelques points qui inspirent encore grande crainte, celle des prétendus dangers que courent les suggestionnés.

Difficultés de réveil

C'est une crainte qu'on manifeste souvent, celle de ne plus se réveiller. Elle est absolument chimérique. Il est vrai que certaines personnes, profondément endormies, ont quelquefois besoin de plusieurs minutes pour se réveiller. Mais n'en est-il pas de même pour le réveil du matin? Il n'y a pas mal de personnes qui doivent être secouées à l'heure du lever. Si le réveil tarde un peu, il suffit tout simplement de dire : « Vous allez vous réveiller à votre aise, » et puis de ne plus s'en occuper.

Il est arrivé des cas où des hypnotiseurs amateurs ne parvenant pas à obtenir le réveil (malgré les légendaires souffles sur les yeux et des passes inverses) s'affolaient. Plus ils s'affolaient, plus la personne dormait. Ce fait se comprend facilement parce que le sujet partage lui-même la crainte de son hypnotiseur. Mon unique, absolument unique façon de réveiller ceux de mes malades qui tombent en sommeil, consiste à dire tout simplement : « C'est fini, réveillez-vous tout doucement à votre aise. » C'est tout et ce n'est pas bien compliqué. Et j'assure que depuis mes seize années de pratique journalière je n'ai jamais dû recourir à un autre moyen.

Un soir, à la terrasse d'un café, un amateur s'était amusé à hypnotiser la femme d'un de ses amis. Ne parvenant pas à la réveiller, il s'affola et partit, en disant qu'il avait trop de fluide et que sa présence empêchait le réveil. La dame continuant toujours à

dormir, on la mit en voiture et on l'amena à mon institut. Le sommeil était vraiment très profond. Je lui adressai simplement la parole en lui disant : « Madame, vous dormez bien, n'est-ce pas? continuez tout à votre aise, le réveil se prépare et dans deux minutes vous serez complètement éveillée. » Cela se passa exactement de cette façon. J'ajoute que je l'ai rendormie pour lui donner la suggestion de ne plus se laisser hypnotiser par des amateurs, si ce n'est dans un but utile.

Une remarque à ce sujet. On demande souvent comment il est possible qu'une personne profondément endormie puisse entendre ce qu'on lui dit. Le cerveau entend toujours, reste toujours en communication avec l'extérieur. Excepté bien entendu dans un sommeil extrêmement profond, anormal et qui touche à la pathologie. La mère qui dort à côté de son enfant ne se réveille pas, alors qu'il y a beaucoup de bruit autour d'elle. Au moindre gémissement du bébé elle se réveillera en sursaut.

Enlèvement de la volonté

Cette objection est peut-être la plus grave qu'on fasse concernant l'emploi de la suggestion ; car elle est très accréditée, la croyance d'après laquelle un suggestionné perd toute volonté propre.

Il faut s'entendre.

La suggestion est une puissance considérable, bonne ou mauvaise selon celui qui la met en jeu. Au théâtre et au salon on s'amuse à faire accomplir des actes contraires à la volonté des sujets. Je dirai que ces suggestions-là sont hautement blâmables et répréhensibles.

Le suggestionneur sait enlever la volonté, mais il n'a pas le droit de le faire et s'il le fait, il commet un acte malhonnête.

On ne peut donner à quelqu'un que les suggestions qu'il désire recevoir et en les lui donnant, on n'enlève pas sa volonté, mais au contraire on la renforce

Prenons le cas du buveur cité plus haut. Il ne *veut* plus boire, seulement la tentation est plus forte que sa volonté. Par la suggestion sa volonté se fortifie et devient plus forte que la tentation.

Il ne suffit pas d'avoir la *volonté* de se dominer, il faut que cette

volonté soit appuyée, stimulée. C'est là le beau rôle de la psychothérapie. Je le répète : donnez à celui qui s'adresse à vous la suggestion qu'il vous demande, rien de plus. Je me demande où il peut y avoir dans ce cas, enlèvement de sa volonté et remplacement de celle-ci par une autre? Si on travaillait *contre la volonté* du sujet, l'objection resterait debout. Mais on doit bien se pénétrer de ceci : c'est qu'on travaille avec le plein consentement de l'intéressé.

Hypnotisations postérieures

Ceci paraît plus sérieux. On craint lorsqu'on a été hypnotisé une fois, qu'on ne reste suggestible pour toujours et par n'importe qui.

Au premier abord cela paraît grave, et s'il en était ainsi, on ne devrait user de la suggestion qu'avec une grande réserve.

Mais

1° Les personnes qui sont suggestibles à ce point, le sont *par leur nature même.* Le premier hypnotiseur n'a fait que mettre en jeu la suggestibilité innée de cette personne. Il n'a pas créé la suggestibilité, il l'a mise au jour.

2° C'est pourquoi, et j'appelle spécialement l'attention sur ce point capital :

A toute personne facilement hypnotisable, je donne toujours la suggestion de ne plus jamais pouvoir être hypnotisée par personne, pas même par moi, si ce n'est quand elle le demande. Et même hypnotisée, de n'accepter que les suggestions qu'elle désire recevoir et pas d'autres.

C'est une suggestion qui ne rate jamais.

La suggestion *de ne pas* être endormi est aussi bien acceptée que celle d'être endormi.

Dans un livre intitulé *Le Merveilleux divin et le Merveilleux démoniaque,* l'auteur, Dom M. B. Maréchaux me prend à partie pour cette déclaration et dit :

« On ne saurait convenir avec plus de candeur que le libre arbitre de l'hypnotisé reste lié, que sa personnalité est diminuée. Il faut l'hypnotiser contre l'hypnotisme, il faut lui donner la suggestion d'être réfractaire à toute suggestion. »

Mais non! qu'on comprenne bien ceci :

Les hypnotisables à ce point-là sont des hypersuggestibles par *leur nature* même, et on ne fait que rendre *normale* leur suggestibilité anormale, exagérée.

Celle-ci existe en dehors de toute manœuvre suggestive.

Le suggestionneur n'intervient que pour faire l'éducation de la suggestibilité. Pour un hyperesthésique on travaille à lui rendre la sensibilité normale; et pour un hypersuggestible on agit de même. Je pourrais citer nombre de cas où des malheureux servant de jouets entre des mains d'hypnotiseurs plutôt maladroits ont vu cette suggestibilité exagérée disparaître après une seule séance de suggestions rectificatives.

Citons un cas :

Une demoiselle de très bonne famille servait de sujet d'expériences souvent répétées et cela sans aucune mesure. Elle s'en trouvait fort peinée et était arrivée au point de ne plus oser regarder personne de peur d'être endormie. De plus, tout ce qui lui rappelait l'hypnotisme la faisait tomber dans des crises, légères mais pénibles. Cette situation durait depuis dix ans.

Or, il y a une dizaine d'années de cela, je demandai à la famille et à la demoiselle elle-même de pouvoir l'endormir.

Eh bien! *dès la première séance*, pendant laquelle je lui donnai les suggestions appropriées à son état, il n'y a plus personne qui pût avoir de l'influence sur elle. Et actuellement, lorsqu'elle vient de temps à autre chez moi pour recevoir telle suggestion qu'elle demande, il faut qu'elle consente formellement à dormir. Si non, rien n'est obtenu.

Elle a fait plusieurs fois, à mon insu, l'expérience de ne pas vouloir dormir alors qu'elle manifestait le désir d'être endormie. Elle me déclarait que la résistance à tout ce que je tentais, se faisait sans l'ombre d'une lutte quelconque.

Il y a encore plusieurs autres objections qu'on fait à l'emploi de la suggestion, mais les principales sont celles que je viens de rencontrer.

Reste cependant l'objection religieuse.

Quelques religieux et prêtres pensent encore que dans tout cela, il s'agit d'intervention diabolique. Rassurons-les. Voici entre autres témoignages, le passage d'une lettre adressée à M. Jules

Bois par Mgr Méric, docteur en philosophie et lettres, docteur en théologie et professeur à la Sorbonne :

« J'estime que l'hypnotisme pratiqué consciencieusement par des médecins et par des hommes de science rendra de grands services. Il permettra de guérir des malades par la suggestion en réveillant l'action puissante de l'âme sur le corps. Des philosophes y trouveront des indications pour explorer les ravages inconnus de l'âme; mais c'est principalement au point de vue médical que je reconnais son efficacité et sa puissance. Une observation de trente ans me permet de parler ainsi. »

Je n'ajoute rien à ces lignes si ce n'est que beaucoup de prêtres, de religieux et religieuses me font l'honneur de se faire traiter par la suggestion. Et ce fait peut rassurer les timorés qui voient un peu trop le diable là où il n'a rien à faire.

La communication de M. le Dr Van Velsen a été écoutée avec la plus vive attention et a suscité une brève discussion. Comme le promettait son auteur, si compétent dans cette question si captivante de l'Hypnothérapie, bien des erreurs ou des malentendus ont été rencontrés par lui et dissipés.

Les enfants débiles sont-ils condamnés à une fin précoce ou du moins conservent-ils fatalement, soit physiquement, soit intellectuellement, des traces de leur débilité native? M. le Dr Ed. Cordier s'inscrit en faux contre cet arrêt et y voit une erreur trop répandue qu'il importe de dissiper. C'est, en un mot, la question de la *viabilité des enfants débiles* qu'il traite devant la Section.

Les rares praticiens qui ont étudié les débiles, nous dit-il, déclarent hautement l'inanité de ces préjugés néfastes. Je ne rapporterai que l'opinion autorisée du professeur Budin :

« Que deviennent plus tard ces débiles qui ont été sauvés, demande-t-il? On a prétendu qu'ils restaient chétifs, malades toute leur vie, que beaucoup d'entre eux étaient atteints de la maladie de Little et que, au point de vue intellectuel, ils se développent mal.

» Je ne crois pas que ces affirmations soient exactes.

» Ces enfants restent-ils habituellement chétifs? Je ne le pense pas, tout au moins quand ils n'ont pas de tare originelle. Quant à

l'intelligence de ces débiles, que devient-elle? Je vous ai parlé de cette petite fille d'un médecin qui, mise sur la balance trois jours après sa naissance, pesait 950 grammes. Elle est aussi développée intellectuellement que ses frères aînés; elle est âgée de sept ans et elle parle comme eux le français et l'allemand (*). »

L'enfant dont, très succinctement, je vais vous relater l'observation, est un exemple saisissant qui démontre la viabilité des enfants débiles. L'enfant M..., serait né à neuf mois, le 18 février 1906, après un travail qui a duré plus de quarante-huit heures et qui n'exigea aucune intervention obstétricale. Il n'y a aucun antécédent syphilitique du côté des parents. Je le vis le 23 et proposai de le mettre en couveuse eu égard à son état de faiblesse congénitale. Il entra dans mon Institut le même jour. Il pesait 1950 grammes et mesurait 46 centimètres; sa température rectale était de 35°7.

Il présentait de l'ictère et les signes d'une affection bizarre dont le diagnostic de polioencéphalo-myélite aiguë hémorragique fut posé par mon collègue et ami le Dr Léon Laruelle.

Contrairement à toutes les prévisions, vu la gravité de l'affection dont il était atteint, que compliquait singulièrement son état de faiblesse congénitale, cet enfant survécut et quitta mon Institut le 4 avril, pesant 2 kil. 450 gr.

Les phénomènes de paralysie avaient presque totalement disparu.

Quelques semaines avant son départ, sur mon conseil, sa mère, qui avait beaucoup de lait, vint plusieurs fois par jour allaiter son enfant. Le 9 juin, il pesait 6 kilogs et le 11 janvier 10 kil. 770 gr.

C'est, à l'heure présente, un enfant superbe et intelligent.

La grande fontanelle est presque totalement fermée, il a cinq incisives : trois inférieures et deux supérieures; il n'a plus de traces de paralysie sauf au bras droit où il semble qu'il reste encore un peu de raideur.

M. Cordier expose ensuite ses idées et les résultats de sa pratique quant à l'*Élevage artificiel des enfants débiles*. Si, d'une part, nous dit-il, les découvertes des laboratoires ont démontré que c'était une utopie de vouloir chercher à fabriquer un lait qui soit le succé-

---

(*) *Le Nourrisson*, p. 122.

dané du lait de femme, son « second lui-même », l'expérience quotidienne, d'autre part, prouve que l'allaitement naturel, toujours sans conteste le meilleur, dans maintes circonstances doit céder le pas à l'allaitement artificiel.

Chez les enfants débiles, l'allaitement maternel est la plupart du temps impossible. Et pourquoi? Parce que les causes organiques ou accidentelles qui ont amené l'expulsion prématurée de l'œuf mettent la plupart du temps la mère dans un état d'infériorité organique manifeste pour pouvoir allaiter.

D'un autre côté, la montée du lait qui se fait d'un façon lente et imparfaite ne peut être excitée par la succion d'un être incomplètement formé, qui, le plus souvent, doit être gavé.

L'allaitement maternel dans ces circonstances, fait presque toujours défaut. L'allaitement artificiel devient donc une nécessité.

Suppléera-t-on par l'allaitement mercenaire à l'allaitement maternel impossible? Nous touchons ici à une question d'intérêt social puissant.

Le lait de la mère appartient à son enfant. Peut-elle le vendre? Oui, la loi l'autorise à le faire; mais, c'est le plus souvent, aux dépens de sa santé morale, de celle des siens et de la santé physique de son propre nourrisson.

Indépendamment de cette considération sociale dont je souligne l'importance, permettez-moi de vous rappeler les multiples difficultés qui, la plupart du temps, accompagnent l'élevage d'un enfant débile. L'insuffisance de succion du débile nécessite le gavage, le gavage énerve la nourrice dont le lait diminue. Par crainte de le perdre elle va exercer ailleurs son métier. Plusieurs nourrices sont souvent nécessaires. En outre le lait de la nourrice est susceptible, par suite des multiples ébranlements dont son système nerveux est l'objet dans l'exercice de son métier difficile, de modifications diverses.

L'estomac de l'enfant débile, si sensible et si délicat, en souffrira; c'est, je pense, l'origine des selles vertes qui accompagnent si souvent l'élevage d'un enfant débile nourri au sein.

Enfin, il faut craindre la transmission de la syphilis : de la nourrice au débile ou du débile à la nourrice. De récents jugements des tribunaux sont là pour témoigner de la responsabilité qu'en l'occurrence les médecins encourent.

L'allaitement artificiel sera donc nécessaire. Mais, me direz-vous, il sera fatal à l'enfant débile et dans ces conditions j'ai recours à l'allaitement mercenaire malgré ses inconvénients et ses dangers !

Vous me permettrez de répondre que l'allaitement artificiel est très possible et contre Wins (thèse de Paris 1885) que le lait d'ânesse n'est pas indispensable.

A l'heure actuelle, j'ai suivi l'élevage artificiel de trente-neuf enfants débiles.

Je les ai élevés sans encombre et aucun décès ne peut être mis sur le compte de l'allaitement artificiel, je puis le certifier.

J'emploie habituellement le lait Backhaus auquel j'adjoins le lait stérilisé pur.

A quelle dose? Tout ce que je puis dire pour le moment, c'est que les enfants débiles exigent de très grandes quantités de lait par rapport à leur poids et qu'ils les supportent sans la moindre réaction.

Après ces nombreuses observations dont vingt-deux ont été publiées dans les ANNALES DE LA POLYCLINIQUE CENTRALE, 1906, je me suis fait la conviction que l'allaitement artificiel donnait des résultats magnifiques chez les enfants débiles.

Le nombre de ces enfants est considérable, plus grand qu'on ne le pense communément. Dans la classe indigente ou nécessiteuse, ils meurent en très grand nombre, parce qu'ils ne reçoivent pas de soins.

J'ai la grande satisfaction de vous annoncer que les religieuses de Saint-Joseph ouvriront le 1er avril prochain, rue de Louvain, 94, un établissement destiné à recevoir ces enfants. Les mères auront la liberté de venir plusieurs fois par jour allaiter leur enfant.

Je recommande à la bienveillante attention des membres de la *Société Scientifique* cette œuvre nouvelle, sur l'utilité de laquelle il n'est pas nécessaire que j'insiste, et qui, sera, je l'espère, féconde en résultats.

M. le Président remercie M. le Dr Cordier et l'engage à continuer à faire part à ses collègues des résultats de son expérience dans la poursuite du remède à apporter à la mortalité et à la morbidité infantile.

De l'emploi du Pyrénol dans l'Asthme bronchique, tel est le titre d'une communication de M. le Dr Meessen, qui nous apporte une contribution sur ce médicament peu connu encore :

Nous considérons l'asthme bronchique comme une névrose, nous dit M. Meessen, comme la névrose-réflexe des Allemands dont le point de départ peut siéger dans divers organes. Il semble que ces organes manifestent leur influence sur la genèse de l'asthme par l'intermédiaire de la muqueuse nasale. Un exemple : il existe un certain rapport entre l'état des pieds et le coryza ; le refroidissement des pieds entraîne à sa suite un catarrhe du nez. Beaucoup d'asthmatiques transpirent des pieds.

Autre exemple. Il est des personnes, chez qui l'apparition des règles est précédée d'éternuement et d'une sécrétion nasale abondante et sanguinolente : or chez certains sujets prédisposés les accès d'asthme coïncident avec l'époque menstruelle.

Il doit y avoir un étroit rapport entre l'innervation du nez et celle du poumon : la muqueuse nasale préside au mouvement des excursions thoraciques et elle règle ces excursions suivant la quantité d'air qui vient la frapper.

Les émotions ne sont pas sans influence sur l'apparition des accès d'asthme. Une petite fille a ses accès régulièrement le lundi, car la classe commence par une leçon d'anglais. Or elle n'a aucune prédisposition pour cette langue et comme la leçon est mal sue, elle craint une retenue.

Les changements brusques de température, les oscillations barométriques, l'apparition des brouillards, tous ces phénomènes météorologiques qui ont leur retentissement sur le système nerveux et sur l'état des vaisseaux de l'appareil respiratoire, et particulièrement du nez, provoquent à l'occasion un accès d'asthme ou en prolongent la durée.

L'asthme est héréditaire et se rencontre chez des personnes issues de parents qui ont une tare névropathique. Au point de vue de l'hérédité l'asthme peut alterner avec une autre névrose : tel père neurasthénique, telle mère sujette à des migraines a des enfants asthmatiques. Les accès d'asthme viennent et s'en vont comme les crises d'urticaire, de névralgie et d'hémicranie.

L'asthmatique est à un haut degré suggestionnable et il y a

beaucoup de vrai dans le mot de Brügelmann (*) : c'est le médecin qui guérit l'asthme et non la drogue qu'il administre. Il faut donc être très circonspect dans l'appréciation des effets d'un médicament.

Dans ces derniers temps, le Dr Georges Luda (**), de Berlin, a prétendu que l'asthme est dû à une auto-intoxication par l'acide carbonique. Il est certain qu'il existe des asthmes à la suite d'auto-intoxications, comme par exemple l'asthme urémique, l'asthme diabétique; mais la surcharge d'acide carbonique qu'on a trouvée dans le sang durant les accès nous semble plutôt une conséquence qu'un effet.

Dans tout accès d'asthme nous considérons :

1° L'excitation qui d'ordinaire part du nez, soit directement, soit indirectement et dans ce dernier cas c'est un autre organe (matrice, estomac, pieds, etc.) qui a déterminé la congestion ou la lésion de la muqueuse nasale.

2° Le réflexe pulmonaire qui se décompose en trois phénomènes distincts :

a) La sécrétion (névrose de sécrétion des Allemands). Les bronches et bronchioles se remplissent presque subitement de mucosités;

b) Le spasme des bronchioles;

c) La perversion du rythme respiratoire : l'inspiration est courte; l'expiration se prolonge, devient pénible : elle est saccadée.

Quant au traitement de l'asthme les médecins ont cherché à agir sur ces trois symptômes. La suggestion combat avec succès la perversion du rythme respiratoire; il faut apprendre à l'asthmatique à respirer. Nous avons maintes fois fait disparaître presque à l'instant un accès d'asthme en forçant le malade à reprendre le rythme normal. D'autre part, Strübing (***) a vu chez un étudiant en médecine, indemne jusqu'alors, survenir un accès d'asthme, alors que celui-ci imitait plus longtemps qu'il ne fallait le *rythme* respiratoire de l'asthmatique. — Trousseau préconisait l'iodure qui

---

(*) Brügelmann, *Das Asthma*, VIe édition, Wiesbaden.

(**) Luda, *Asthma eine Kohlensäure vergiftung*, Berlin, 1906.

(***) Strübing, *Ueber Asthma bronchiale*, DEUTSCH. MEDIC. WOCHENSCHRIFT, 1906, nos 31 et 32,

fluidifie la sécrétion et l'atropine qui enraye le spasme. — Dans ces derniers temps von Noorden, de Vienne, a publié des résultats favorables obtenus par une cure d'atropine. D'autres ont vu les accès céder à la suite d'un usage plus ou moins prolongé de teinture de Lobelia.

Depuis peu nous avons eu l'occasion d'expérimenter le *Pyrénol,* un composé d'acide benzoïque, d'acide salycilique, de thymol combinés à de la soude pour former un sel soluble. Ce médicament est très bien toléré et peut être pris longtemps. Ce que nous avons constaté surtout, c'est l'abondante expectoration qu'il provoque. Il semble régulariser, grâce au thymol, le rythme respiratoire et enrayer le spasme. Par l'acide benzoïque il a une action sur le cœur. Non seulement nous l'avons donné à des asthmatiques, mais encore à des personnes qui souffrent d'un état asthmatique, c'est-à-dire qui, à la suite d'un coryza, sont atteintes d'un catarrhe bronchique avec râles sibilants à l'expiration. Ici, le spasme peut faire défaut; parfois il y a une légère dyspnée la nuit qui rappelle de loin les accès d'asthme vrai.

Toutes les personnes, indistinctement, qui ont pris le Pyrénol, en vantent les bienfaits.

Voici quelques cas.

Mme G..., durant tout l'été à la suite d'une fièvre de foin a eu accès sur accès. Depuis qu'elle prend le Pyrénol l'expectoration au début était très abondante et les accès ont cessé. A peine lui arrive-t-il parfois une légère oppression la nuit qui ne dure que quelques moments.

Melle B..., 18 ans, a été atteinte, dans son enfance, de croûte de lait, depuis lors des accès d'asthme surviennent périodiquement. Tout l'été il y avait à peine un espace de huit jours entre les différents accès et ces accès duraient de trois à quatre jours. Depuis trois mois qu'elle prend le Pyrénol, il n'y a plus eu qu'un seul accès et encore celui-ci n'a duré qu'un jour.

M. J..., souffre chaque année, en hiver, d'un état asthmatique. Il a pris froid et son rhume est descendu sur la poitrine. L'auscultation révèle des râles sibilants à l'expiration. Chaque année il doit se soigner pendant six semaines à deux mois. Le médicament qui lui faisait le plus de bien était l'ipéca associé à de l'iodure. Cette année-ci il a pris du Pyrénol, au bout de huit jours le sibilement avait disparu.

M. R..., 65 ans, vante également les bienfaits du Pyrénol, il souffre également d'un état asthmatique.

Le Pyrénol se présente sous forme d'une poudre blanche légèrement hygroscopique, d'odeur faiblement aromatique et de saveur sucrée. Il est facilement soluble dans l'eau (1/5) et dans l'alcool (1/10); on peut en prendre facilement 1,50 gramme à 2 grammes par jour en plusieurs fois.

Mme G..., voulant déraciner son mal a pris de son chef, comme elle l'a avoué plus tard, 3,50 grammes et 4 grammes par jour sans le moindre inconvénient. Du reste, sa parfaite innocuité a été démontrée à l'Institut du Dr Piorkovoski, à Berlin, par des expériences sur des animaux.

Il est évident que les quelques cas que nous relatons ne peuvent permettre un jugement définitif.

Pour nous le Pyrénol est un excellent médicament dans l'asthme bronchique et nous voudrions voir nos confrères l'essayer à leur tour.

Cinquième section

—

La section a poursuivi l'étude de la *fonction économique des ports*.

La séance a eu lieu sous la présidence de M. Beernaert, ministre d'État.

M. G. Eeckhout a communiqué d'abord les résultats de l'enquête dont le port de Londres a fait l'objet de sa part.

Aujourd'hui comme au XVIIe siècle, c'est-à-dire depuis que Londres est devenue le marché central des colonies anglaises, le port de la Tamise est le premier port de l'Europe. Son mouvement total se chiffre (1905) par 17 millions et demi de tonnes, et la valeur des importations et exportations s'élève à plus de 7 milliards de francs.

Les besoins de l'immense agglomération londonnienne absorbent une large part de ce trafic. Mais l'arrière pays économique du port, dépasse de beaucoup les limites de cette zone relativement étroite. A certains égards l'Ile britannique tout entière est tributaire des

entrepôts de la Tamise. Grâce à la puissance des habitudes commerciales et des traditions séculaires, Londres reste le marché exclusif d'une catégorie de produits.

Les avantages de cette situation privilégiée et l'importance du commerce local ont puissamment développé la fonction transitaire du port. La part des réexportations dans l'ensemble du mouvement maritime est de 36 p. c. Londres se trouvait naturellement appelée, avant les transformations économiques du XIXe siècle, à jouer le rôle d'intermédiaire entre les nations du continent et les marchés de l'Amérique, de l'Afrique et de l'Orient.

La puissance financière de la cité a largement contribué à maintenir la prépondérance qu'elle avait acquise sur les ports rivaux : la solidité et la souplesse de ses banques, l'importance de la livre sterling dans le commerce international activent la participation de Londres dans les échanges et exercent une attraction puissante sur le fret. La force de son marché monétaire appelle surtout le trafic maritime par les facilités qu'elle offre au commerce de consignation. C'est en général à Londres que l'argent est le moins cher, c'est là que le consignataire trouve le plus de fonds disponibles et la capitale britannique est le marché par excellence des pays d'outre-mer auxquels la consignation offre le plus d'avantages, parce qu'ils sont les moins pourvus de capitaux.

Le trafic du port de Londres continue de s'accroître, mais suivant une proportion qui ne cesse de fléchir. Cette décroissance relative tient à des circonstances d'ordre économique général et à des causes particulières au port lui-même. Le développement de la production, l'accroissement de la population et de la richesse chez les peuples continentaux, l'ouverture de nouvelles routes commerciales, les progrès de la navigation maritime et l'organisation des ports de création moderne ont permis aux nations concurrentes de s'affranchir de la tutelle de Londres.

D'autre part, le port de la Tamise n'offre aux navires qui le visitent que des installations généralement insuffisantes ou vieillies. Tous les inconvénients qu'il présente se traduisent en définitive par une majoration du coût général des transports. Le manque de direction unifiée, l'éparpillement des responsabilités et la diversité des intérêts retardent l'application des réformes nécessaires ; mais on s'accorde à reconnaître que Londres ne pourra retenir la clien-

tèle séculaire de son port qu'à la condition d'assurer à la navigation le bon marché du fret.

M. Van der Smissen, secrétaire, donne ensuite connaissance des résultats des démarches qu'il a faites en vue de la continuation de l'enquête.

M. Alph. Roersch, professeur à l'Université de Gand, fera la monographie du port de Délos à l'époque de sa plus grande activité, au IIe siècle avant notre ère.

M. Karl Hanquet, professeur à l'Université de Liége, étudiera le port de Palos à l'époque où Colomb s'y embarqua.

M. G. Blondel, professeur à l'École des Hautes Études commerciales de Paris, parlera du port de Marseille.

Le R. P. Charles, S. J., professeur à l'Institut Saint-Ignace à Anvers, fera la monographie de Rotterdam.

M. le Président propose d'ajouter à ce programme l'étude des consignations de denrées dont les grands ports sont le siège et plus spécialement l'examen de la vaste opération de warrantage projetée à Anvers pour les cafés du Brésil. M. Ernest Dubois, directeur de l'Institut supérieur de Commerce d'Anvers, accepte de faire ce rapport.

Le programme ainsi complété est adopté.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE

L'assemblée générale de l'après-midi s'est tenue au local *Patria*, sous la présidence de M. Éd. Goedseels.

La parole est donnée à M. le Dr H. Lebrun, conservateur au Musée royale d'Histoire naturelle de Bruxelles, pour une conférence sur l'*Évolutionnisme*. En voici un résumé.

L'orateur se propose de détruire cette légende : on est ou on n'est pas évolutionniste suivant les opinions philosophiques que l'on professe : les catholiques en particulier sont obligés de combattre l'évolution au nom de leurs dogmes religieux.

Dans une première partie, se plaçant au point de vue purement scientifique, il expose comment et par qui la notion évolutionniste a été introduite et donne quelques exemples et quelques arguments qui plaident en sa faveur. Ces exemples sont empruntés à la géologie, à l'anatomie comparée et à l'embryologie. Il en conclut à la variabilité des espèces, mais démontre, en s'appuyant sur les découvertes cytologiques et embryologiques modernes, que la vie est autonome et absolument indépendante, dans certains de ses caractères essentiels, des lois physiques et chimiques. Elle ne peut donc avoir commencé sur la terre que par l'intervention créatrice.

Appliquant la théorie à l'origine de l'homme, il montre que l'évolution pourrait théoriquement être acceptée, car rien ne s'y oppose aussi longtemps qu'elle reste une théorie scientifique naturelle s'occupant de phénomènes naturels. Mais pour traiter de l'origine de l'homme, être mixte, corporel et spirituel, la zoologie n'est pas la seule science à laquelle il faille demander son avis ; la psychologie doit être interrogée, or elle nous oblige à conclure à une seconde intervention de Dieu créant l'âme humaine et l'unissant au corps.

D'ailleurs la descendance animale du corps de l'homme, quoique théoriquement possible et admissible, n'est pas démontrée; les faits paléontologiques connus tendraient plutôt à montrer que l'homme est apparu sur la terre tel qu'il est actuellement. L'attitude scientifique qui convient ici est donc l'expectative.

Le Président félicite et remercie l'orateur, et donne la parole à M. Mansion pour une communication *sur le choix d'une langue auxiliaire internationale.* En voici le résumé emprunté en grande partie à deux notes publiées par lui dans les BULLETINS de l'Académie royale de Belgique.

I. *Les langues internationales dans le passé.* Trois langues ont, dans le passé, joué le rôle de langue internationale : le grec, en Orient, après les conquêtes d'Alexandre le Grand jusque bien avant dans le moyen âge; le latin, en Occident, après César jusqu'à la fin du XVII[e] siècle et au delà; le français, dans une grande partie de l'Europe, au XVIII[e] siècle et, dans une certaine mesure, au XIX[e].

A la longue, aucune de ces langues internationales n'a pu maintenir son ascendant : le grec classique était trop difficile, le latin l'est redevenu à la Renaissance quand les érudits ont imposé aux savants l'obligation d'écrire en langage cicéronien; la prépondérance du français a disparu avec la prépondérance de la France. Aujourd'hui les grandes nations, jalouses d'exprimer ainsi leur complète autonomie, se servent de leur propre langue dans le domaine scientifique comme dans toutes les manifestations de leur vie nationale.

On ne peut donc espérer que les savants des divers pays adoptent de nos jours, comme langue internationale de la science, soit le grec ou le latin classiques, langues synthétiques dont le génie est trop opposé à celui des grandes langues modernes, soit l'une ou l'autre de ces langues modernes rivales, le français, l'allemand, l'anglais. Autrement dit, à l'avenir, il n'y aura très probablement plus de langue internationale *naturelle*, comme il y en a eu dans le passé.

II. *Langue internationale artificielle.* Mais on peut espérer qu'il y en aura une *artificielle*, surtout si l'*Association internationale des Académies* prend la chose sous son patronage.

Que la création de pareille langue ne soit pas impossible, Leibniz l'a cru pendant toute sa vie ; c'est ce que prouvent d'ailleurs les expériences du passé et du présent.

Le latin analytique du moyen âge, que saint Thomas d'Aquin et ses émules ont assoupli au point de lui faire exprimer toutes les subtilités de la philosophie aristotélicienne et de la théologie catholique, n'était pas le latin de Cicéron. C'était une langue en grande partie artificielle, qui, sans être la langue maternelle de personne, était la langue savante de tout le monde. On peut en dire autant du latin botanique de Linné et de celui des anatomistes.

En 1881, le curé Schleyer a inventé de toutes pièces le *volapük*, langue synthétique, ayant une grammaire régulière mais assez compliquée et un vocabulaire artificiel difficile à apprendre ; malgré ses défauts, le volapük a obtenu pendant huit ans un grand succès dans le monde commercial.

En 1887, le médecin Zamenhof a créé une autre langue internationale, l'*esperanto*, qui a à peu près supplanté le volapük : l'esperanto est presque entièrement analytique, sa grammaire est simple et son vocabulaire, qui comprend tous les mots déjà internationaux, est assez facile à apprendre.

Une troisième langue auxiliaire internationale digne d'être signalée est le *latin sans flexion* imaginé en 1903 par Peano. Le savant professeur de Turin, à qui l'on doit déjà un admirable système d'idéographie mathématique, est parvenu à supprimer, non seulement les désinences des cas, des nombres, des genres et des personnes, comme le voulait Leibniz, mais aussi celles des temps et des modes. Le vocabulaire est le vocabulaire latin ou néolatin (l'ablatif ou parfois le nominatif pour les mots déclinables, l'infinitif moins la terminaison *re* ou *ri* pour les verbes) ; tous les mots sont invariables ; la construction est celle des langues néolatines.

Le latin sans flexion semble le dernier terme d'une évolution linguistique entièrement logique : le moyen âge a donné au latin et, par lui, aux langues modernes une syntaxe analytique. Peano va plus loin dans la même direction et, pour ainsi dire, il *passe à la limite ;* il débarrasse complètement la vieille langue de Rome de

l'héritage encombrant des désinences et en réduit ainsi la grammaire au dernier degré de simplicité (*).

On a imaginé d'autres langues artificielles, dont plusieurs, intermédiaires entre l'esperanto et le latin sans flexion, n'ont les qualités ni de l'une ni de l'autre et ne semblent pas appelées à recueillir beaucoup d'adhérents sérieux.

III. *Objections.* On a fait bien des objections contre la création et l'emploi d'une langue auxiliaire internationale :

1° L'expérience prouve que les langues vivent, se déforment et se transforment d'après le génie de chaque peuple. Si l'esperanto, par exemple, est employé par des Russes et des Français, au bout d'un certain temps ils y introduiront inconsciemment, conformément à l'usage de leur langue maternelle, des mots dérivés, des mots composés, des acceptions figurées qui rendront l'esperanto russe incompréhensible aux Français, l'esperanto français incompréhensible aux Russes.

Réponse. Non ; car, par hypothèse, les langues artificielles seront employées surtout dans les relations scientifiques, commerciales, utilitaires, et, par suite, auront un vocabulaire précis, presque entièrement fixe. Elles ne vivent pas et, par suite, ne se déforment ni ne se transforment, ou ne se transforment guère. Si, d'ailleurs, pareille langue auxiliaire artificielle se transforme quelque peu, elle se transformera internationalement et non nationalement, comme le prouve ce qui est arrivé maintes fois pour des termes scientifiques : ainsi le mot *acide* et les mots correspondants des diverses langues européennes ne signifient plus la même chose que du temps de Lavoisier; mais le sens de tous ces mots s'est modifié simultanément et de la même manière chez tous les peuples civilisés.

2° Quand on veut étendre ses relations, il est plus avantageux d'apprendre une des grandes langues modernes, le français, l'anglais, l'allemand, l'espagnol, comme on le fait partout dès aujourd'hui, que n'importe quelle langue artificielle.

(*) Le latin sans flexion est employé par Peano et d'autres géomètres italiens dans la REVISTA DE MATHEMATICA et dans la cinquième édition du *Formulario mathematico.*

Réponse. C'est évident. Mais il est plus avantageux encore d'apprendre une ou plusieurs de ces langues vivantes et, *en outre*, une langue auxiliaire artificielle.

3° Les langues artificielles qui ont eu ou ont quelque succès jusqu'à présent, le volapük, l'esperanto, le latin sans flexion, le doivent, en Europe et en Amérique, à leur organisme grammatical emprunté aux langues les plus internationales de l'Occident, comme aussi leur vocabulaire. *Elles n'ont rien de mondial* propre à les faire accepter par les Slaves, les Hindoux, les Chinois, les Japonais ou les peuples musulmans.

Réponse. C'est tout l'inverse. C'est le caractère occidental du vocabulaire et de la grammaire des langues artificielles les plus célèbres qui les rend accessibles aux personnes instruites de l'Orient comme de l'Occident, car ces personnes apprennent ou savent déjà, pour la plupart, l'une ou l'autre des grandes langues internationales qui se parlent des deux côtés de l'océan Atlantique. Toutes ont ainsi une clef pour apprendre les langues artificielles de type occidental.

4° Somme toute, outre le français, ou l'anglais, ou l'allemand, ou l'espagnol ou plusieurs de ces langues que savants, commerçants et voyageurs doivent connaître aujourd'hui, vous voulez leur faire apprendre *de plus* une langue auxiliaire artificielle. C'est un travail considérable devant lequel beaucoup reculeront.

Réponse. Considérable, non; car, pour chacun, *dans sa branche*, pareille étude est un jeu quant au vocabulaire et presque rien pour la grammaire. L'expérience prouve, que l'on peut, sans beaucoup de peine, au moyen d'une langue artificielle, étendre assez considérablement le cercle de ses relations scientifiques ou commerciales.

Les congrès espérantistes de Boulogne (1905) et de Genève (1906) ont prouvé d'ailleurs que l'on peut arriver à se servir d'une langue auxiliaire artificielle, même dans les relations habituelles de la vie sociale.

IV. *Choix d'une langue auxiliaire internationale*. Une association internationale s'est fondée à Paris en 1901 pour faire adopter dans tous les pays une *même* langue auxiliaire artificielle, suffisamment simple pour servir aux relations scientifiques, com-

merciales, et aussi à celles de la vie sociale. Le choix de la langue auxiliaire appartient à l'*Association internationale des Académies*, ou, si celle-ci refuse de s'occuper de cette question, à un *Comité* élu par l'Association, ou *Délégation pour l'adoption d'une langue auxiliaire internationale* (résumé des statuts).

La question du choix d'une langue auxiliaire internationale va très probablement entrer dans une phase décisive en 1907.

La Délégation pour l'adoption d'une pareille langue comprend aujourd'hui les représentants de plus de *deux cent cinquante* sociétés savantes et associations professionnelles de tous pays; elle a reçu l'adhésion de plus de *mille* membres des académies et des universités.

Forte de ce double appui, elle va s'adresser, conformément à ses statuts, à l'Académie impériale de Vienne pour la prier d'inscrire la *question de la langue auxiliaire internationale* à l'ordre du jour de la prochaine assemblée de l'Association internationale des Académies, qui se tiendra à Vienne, le 29 mai 1907.

Pour les Académies, la question de la langue auxiliaire internationale se pose en 1907 de la manière suivante : Vaut-il mieux que ce soit l'*Association internationale des Académies* qui fasse le choix de cette langue auxiliaire, soit cette année, soit plus tard, et en assure la rapide diffusion, grâce à son immense autorité scientifique? ou, se désintéressant de la question, est-il préférable qu'elle en abandonne la solution à la Délégation elle-même? Personnellement, nous préférerions que la décision fût prise par l'Association internationale des Académies; mais, si celle-ci s'abstient, le choix d'une langue auxiliaire internationale se fera très prochainement, par le Comité dont il est question plus haut.

Dans ce dernier cas, il est utile que la *Société scientifique de Bruxelles* soit représentée dans la Délégation et puisse ainsi prendre part à l'élection du Comité qui sera chargé du choix de la langue auxiliaire internationale. Pour cela, il suffit que notre Société donne son adhésion aux statuts de la Délégation résumés plus haut.

Cette adhésion ne peut entraîner aucun inconvénient, et peut nous permettre d'intervenir utilement dans le choix d'une langue auxiliaire internationale.

Je proposerai donc à notre prochaine session de Pâques, mais

seulement si cette motion est acceptée par le Conseil de la Société, que celle-ci donne son adhésion à la *Délégation pour l'adoption d'une langue auxiliaire internationale* (*).

Le Président déclare close la session de janvier.

(*) Le Conseil de la Société, dans sa séance du 18 février, la Société ellemême dans son assemblée générale du 9 avril 1907, se sont ralliés à la proposition de M. Mansion.

SESSION DES 9, 10, 11 AVRIL 1907

A BRUXELLES

—

SÉANCES DES SECTIONS

—

Première section

—

Mardi, 9 avril 1907. La section procède au renouvellement de son bureau. Sont nommés :

Président :	M. CH.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN.
Vice-Présidents :	VICOMTE R. D'ADHÉMAR.
	R. P. WILLAERT, S. J.
Secrétaire :	M. H. DUTORDOIR.

La section met au concours la question suivante : *Faire un Précis des Œuvres mathématiques de Grégoire de Saint Vincent,* analogue au Précis des œuvres mathématiques de Fermat par Brassine.

M. Mansion fait rapport sur la Note de M. de la Vallée Poussin intitulée : *Démonstration nouvelle du théorème de Bernoulli.*

« Le point de départ de l'auteur est une formule remarquable démontrée par Poisson dans les §§ 73 et 74 de la *Probabilité des jugements;* cette formule donne la somme des $n + 1$ premiers termes du développement de $(p + q)^{m+n}$ exprimée sous forme du quotient de deux intégrales eulériennes de première espèce, l'une incomplète, l'autre complète. *Sans recourir à la formule de Stirling,* M. de la Vallée Poussin parvient, par des transformations ingénieuses très simples, à enfermer le rapport des deux intégrales

entre deux limites très rapprochées. Il est facile de déduire de là le théorème de Bernoulli puisque la probabilité que l'on y considère est la différence de deux rapports analogues à ceux dont il vient d'être question. D'autres questions de probabilités peuvent être traitées plus simplement qu'on ne l'a fait jusqu'à présent, par la méthode de M. de la Vallée Poussin.

Je propose l'impression de son remarquable travail dans les ANNALES. » Ces conclusions sont adoptées par la section.

Voici la note de M. de la Vallée Poussin :

Préliminaire. Cette Note a son origine dans une communication obligeante de M. Mansion, à qui nous devons tous nos remerciements pour avoir attiré notre attention sur la formule suivante :

$$p^{\mu} + \frac{\mu}{1} p^{\mu-1} q + \cdots + C_{\mu}^{n} p^{\mu-n} q^{n} = (n+1) C_{\mu}^{n+1} q^{n+1} I,$$

où l'on a

$$p + q = 1, \qquad I = \int_0^p \frac{x^{\mu-n-1}\, dx}{(q+x)^{\mu+1}}.$$

En transformant cette relation attribuée à Poisson, nous en avons tiré, sous une forme très élégante, deux limites qui comprennent la probabilité pour que, sur μ épreuves répétées, l'écart entre le nombre d'arrivées d'un événement de probabilité p et le nombre d'arrivées le plus probable ne surpasse pas un écart assigné.

Ces deux limites, qui ont la forme de l'intégrale classique

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2}\, dx,$$

ont le grand avantage de s'obtenir par des calculs très élémentaires et, ce qui est remarquable, *sans qu'il faille recourir à la formule de Stirling.*

Quoique nous ayons attaché plus de prix à simplifier nos calculs qu'à resserrer nos limites définitives, ces limites n'en sont pas

moins très pratiques, car le maximum de leur différence est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$.

Tels sont les résultats dont la démonstration fait l'objet de cette Note. Ils sont beaucoup plus complets que ceux que nous venons de publier dans la deuxième partie des ANNALES (p. 119) sous le titre *Étude sur le théorème de Bernoulli*, et les démonstrations en sont beaucoup plus simples. Cependant notre premier Mémoire ne perd pas tout intérêt. Il renferme des formules qui peuvent être utiles et sa conclusion n'est pas contenue dans nos nouveaux résultats : elle peut servir à les compléter dans certains cas particuliers.

1. *Première expression de la somme* S *des premiers termes de* $(p+q)^\mu$ *par un quotient de deux intégrales.* Soient p et q deux fractions positives telles que $p+q=1$, μ un nombre entier. Nous désignerons par S la somme des $n+1$ premiers termes de $(p+q)^\mu$, à savoir

$$S = p^\mu + \frac{\mu}{1} p^{\mu-1} q + \cdots + C_\mu^n p^{\mu-n} q^n.$$

Cette somme peut être représentée par le quotient de deux intégrales définies effectuées sur la même fonction, à savoir

$$S = \frac{\int_0^p x^{\mu-n-1}(1-x)^n\,dx}{\int_0^1 x^{\mu-n-1}(1-x)^n\,dx}.$$

En effet, le dénominateur n'est autre que l'eulérienne $B(\mu-n, n+1)$ et a, comme on le sait, pour valeur

$$\frac{n!\,(\mu-n-1)!}{\mu!}$$

Pour calculer le numérateur, intégrons par parties de manière à élever l'exposant de x et à abaisser celui de $1-x$; il vient

$$\int_0^p x^{\mu-n-1}(1-x)^n\,dx = \frac{p^{\mu-n}q^n}{\mu-n} + \frac{n}{\mu-n}\int_0^p x^{\mu-n}(1-x)^{n-1}\,dx.$$

C'est une formule de réduction qui s'applique de proche en proche jusqu'à ce que l'exposant de $1-x$ soit abaissé à zéro. En divisant le résultat ainsi obtenu par le dénominateur, on retrouve, dans l'ordre inverse, tous les termes de S.

2. *Transformation de* S. Si l'on change de variables dans les intégrales précédentes par la relation $x = \frac{y}{1+y}$, il vient

$$S = \int_0^{\frac{p}{q}} \quad \text{sur} \quad \int_0^{\infty} \frac{y^{\mu-n-1}\,dy}{(1+y)^{\mu+1}}.$$

Comme S est représenté par le quotient de deux intégrales effectuées sur la même fonction, on jouit de la faculté précieuse d'introduire ou de supprimer à volonté des facteurs constants dans cette fonction. Nous allons effectuer quelques changements de variables en profitant de cette faculté.

Nous définirons d'abord deux nombres positifs a et b en posant

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \mu-n-1 &= a(\mu+1) \\ n+2 &= b(\mu+1) \end{aligned}\right. \qquad \text{d'où} \qquad a+b=1.$$

Changeons alors de variables dans nos intégrales par la relation

$$y = \frac{a-x}{b};$$

il vient

$$S = \int_{a-\frac{p}{q}b}^{a} \quad \text{sur} \quad \int_{-\infty}^{a} \frac{\left(\frac{a-x}{b}\right)^{(\mu+1)a}}{\left(1+\frac{a-x}{b}\right)^{\mu+1}}\,dx,$$

ou, en observant que $a+b=1$ et en se débarrassant d'un facteur constant,

$$S = \int_{a-\frac{p}{q}b}^{a} \text{ sur } \int_{-\infty}^{a} \frac{\left(1-\frac{x}{a}\right)^{(\mu+1)a}}{(1-x)^{\mu+1}}\,dx.$$

Observons maintenant que la fonction à intégrer a pour logarithme

$$(\mu+1)\left[a \log\left(1-\frac{x}{a}\right) - \log(1-x)\right],$$

ce qui peut s'écrire sous les différentes formes

$$-(\mu+1)\int_0^x \left(\frac{a}{a-x}-\frac{1}{1-x}\right)dx = -(\mu+1)\int_0^x \frac{bx\,dx}{(a-x)(1-x)}$$

$$= -(\mu+1)\frac{bx^2}{2a}\int_0^1 \frac{2u\,du}{\left(1-\frac{ux}{a}\right)\left(1-ux\right)} = -(\mu+1)\frac{bx^2}{2a}\varphi(x),$$

en posant

(2) $$\varphi(x) = \int_0^1 \frac{2u\,du}{\left(1-\frac{ux}{a}\right)\left(1-ux\right)};$$

il viendra

$$S = \int_{a-\frac{p}{q}b}^{a} \text{ sur } \int_{-\infty}^{a} e^{-(\mu+1)\frac{bx^2}{2a}\varphi(x)}\,dx.$$

Pour simplifier l'écriture, posons encore

(3) $$\alpha = a - \frac{p}{q} b, \qquad m = \sqrt{(\mu + 1)\frac{b}{2a}}$$

et changeons dans les deux intégrales x en $\frac{x}{m}$; il viendra

(4) $$S = \int_{\alpha m}^{am} \text{ sur } \int_{-\infty}^{am} e^{-x^2\varphi\left(\frac{x}{m}\right)} dx.$$

C'est notre valeur définitive.

3. *Limite supérieure de* S. On peut obtenir une limite supérieure de S presque sans aucun calcul. Il suffit de s'appuyer sur deux propriétés de la fonction $\varphi(x)$ qui s'aperçoivent immédiatement dans sa définition par la formule (2) du paragraphe précédent : 1° Cette fonction est constamment croissante quand x varie de $-\infty$ à a; 2° elle est égale à 1 pour $x = 0$.

Il résulte d'abord de la première propriété que l'on augmente le quotient

$$\int_{\alpha m}^{am} \text{ sur } \int_{-\infty}^{am} e^{-x^2\varphi\left(\frac{x}{m}\right)} dx$$

en y remplaçant $\varphi\left(\frac{x}{m}\right)$ par $\varphi(\alpha)$. En effet, cette substitution augmente tous les éléments de l'intégrale entre αm et am; les deux termes de la fraction précédente subissent la même augmentation de ce chef, et la valeur de la fraction en est augmentée, car elle est inférieure à l'unité. D'autre part, cette substitution diminue tous les éléments de l'intégrale entre $-\infty$ et αm; cette diminution n'affecte que le dénominateur et il en résulte une nouvelle augmentation pour le quotient. Il vient donc

$$S < \int_{\alpha m}^{am} \text{ sur } \int_{-\infty}^{am} e^{-x^2\varphi(\alpha)} dx.$$

On augmente encore le second membre de cette inégalité en étendant les intégrations jusqu'à $+\infty$ au lieu de am, car on ajoute ainsi la même quantité aux deux termes de cette fraction dont la valeur est < 1. Il vient donc *à fortiori*

$$S < \int_{am}^{\infty} \quad \text{sur} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2\varphi(\alpha)}\,dx.$$

Changeons encore x en $x : \sqrt{\varphi(\alpha)}$ et rappelons-nous que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi};$$

nous trouvons

$$S < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{am\sqrt{\varphi(\alpha)}}^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Pour rendre les calculs aussi simples que possible, nous allons simplifier davantage encore cette limite. Puisque $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\alpha)$ est > 1 si α est positif et < 1 si α est négatif. Il en résulte que dans les deux cas on augmente l'intervalle d'intégration en remplaçant $\varphi(\alpha)$ par l'unité dans l'intégrale précédente. Il vient donc, en définitive,

(5) $$S < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{am}^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

4. ***Détermination d'une limite supérieure de* S *symétrique en* p *et* q.** Il y a deux cas à distinguer : 1°) $a > p$ et 2°) $a < p$.

Premier cas : $a > p$.

Posons dans cette hypothèse

$$a = p + \epsilon, \qquad \text{d'où} \qquad b = q - \epsilon;$$

il vient, par les formules (3) du § 2,

$$\alpha = a - \frac{p}{q} b = p + \epsilon - \frac{p}{q}(q - \epsilon) = \frac{\epsilon}{q},$$

$$m = \sqrt{(\mu + 1)\frac{b}{2a}} = \sqrt{(\mu + 1)\frac{q}{2p}} \sqrt{\frac{1 - \frac{\epsilon}{q}}{1 + \frac{\epsilon}{p}}}.$$

$$\alpha m = \epsilon \sqrt{\frac{\mu + 1}{2pq}} \sqrt{\frac{1 - \frac{\epsilon}{q}}{1 + \frac{\epsilon}{p}}} > \epsilon \sqrt{\frac{\mu + 1}{2pq}} \sqrt{1 - \frac{\epsilon}{pq}}.$$

Nous poserons, en abrégé,

$$(6) \qquad T = \epsilon \sqrt{\frac{\mu + 1}{2pq}}, \qquad h = \sqrt{1 - \frac{\epsilon}{pq}},$$

d'où $\alpha m > Th$, de sorte que nous tirons *à fortiori* de la formule (5)

$$(7) \qquad S < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{Th}^{\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

Dans ce calcul, nous avons évidemment supposé $\epsilon < pq$. Le produit Th augmente avec ϵ tant que ϵ est $< \frac{2pq}{3}$; donc il est clair que le résultat obtenu subsistera *à fortiori* si l'on remplace ϵ par une quantité moindre, ou, autrement dit, si l'on a

$$a > p + \epsilon, \qquad b < q - \epsilon,$$

pourvu que $a - p$ soit $< \frac{2pq}{3}$.

Deuxième cas : $a < p$.

Nous poserons dans cette hypothèse (ϵ étant supposé $< pq$),

$$a = p - \epsilon, \qquad b = q + \epsilon.$$

Il faut changer ϵ en $-\epsilon$ dans les valeurs précédentes de m et α; il vient donc

$$m\alpha = -\epsilon\sqrt{\frac{\mu+1}{2pq}}\sqrt{\frac{1+\frac{\epsilon}{q}}{1-\frac{\epsilon}{p}}} > -\epsilon\sqrt{\frac{\mu+1}{2pq}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\epsilon}{pq}}}.$$

Par conséquent, en posant encore

$$(8) \qquad T = \epsilon\sqrt{\frac{\mu+1}{2pq}}, \qquad h = \sqrt{1-\frac{\epsilon}{pq}},$$

on aura

$$(9) \qquad S < \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{T}{h}}^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Comme $T : h$ augmente avec ϵ, cette formule subsiste *à fortiori*, si l'on a (ϵ étant $< pq$),

$$a > p - \epsilon, \qquad b < q + \epsilon.$$

5. *Limite inférieure de la somme des termes de* $(p+q)^\mu$ *qui avoisinent le terme maximum*. Écrivons maintenant le développement du binôme sous la forme

$$(p+q)^\mu = \sum a_{r,s}\, p^r\, q^s \qquad (r+s=\mu).$$

La somme S étudiée jusqu'ici est celle de tous les termes du développement dans lesquels l'exposant r est égal ou supérieur à $\mu - n$ et l'exposant s égal ou inférieur à n.

Revenons au premier cas ($a > p$) considéré dans le paragraphe précédent. En remplaçant les nombres a et b par leurs valeurs tirées des formules (1) du § 2, les deux conditions (équivalentes entre elles)

$$a \geqslant p + \epsilon, \qquad b \leqslant q - \epsilon,$$

peuvent s'écrire aussi

$$\begin{aligned} \mu - n &\geqslant (\mu + 1)(p + \epsilon) + 1, \\ n &\leqslant (\mu + 1)(q - \epsilon) - 2. \end{aligned}$$

Donc, dans ce cas, la somme S comprend tous les termes du développement où les exposants r de p et s de q vérifient les deux conditions (équivalentes entre elles)

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} r &\geqslant (\mu + 1)(p + \epsilon) + 1, \\ s &\leqslant (\mu + 1)(q - \epsilon) - 2. \end{aligned} \right.$$

Le résultat obtenu dans le paragraphe précédent (premier cas) peut donc se formuler dans le théorème suivant :

Théorème I. *Soit* P′ *la somme des termes de* $(p + q)^\mu$ *où les exposants* r *de* p *et* s *de* q *satisfont aux conditions* (10); *on aura*

$$\mathrm{P}' = \mathrm{S} < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathrm{T}h}^{\infty} e^{-x^2}\, dx, \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{T} &= \epsilon \sqrt{\frac{\mu + 1}{2pq}} \\ h &= \sqrt{1 - \frac{\epsilon}{pq}} \end{aligned} \right. .$$

Mais, cette limite étant symétrique en p et q, on obtient, par la permutation des deux lettres, cet autre théorème :

Théorème II. *Soit* P″ *la somme des termes de* $(p+q)^\mu$ *où l'exposant r de p satisfait à la condition*

$$r \leqslant (\mu+1)(p-\epsilon)-2;$$

on aura (avec les valeurs précédentes de T *et h),*

$$P'' < \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{Th}^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

De la combinaison de ces deux théorèmes, on en tire un troisième qui est celui que nous avons en vue et que voici :

Théorème III. *Soit* P *la somme des termes de* $(p+q)^\mu$ *où l'exposant de p est compris entre*

$$(\mu+1)(p-\epsilon)-2 \qquad \text{et} \qquad (\mu+1)(p+\epsilon)+1;$$

on aura

$$P > \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{Th} e^{-x^2}\,dx \qquad \text{où} \qquad \left\{\begin{aligned} T &= \epsilon\sqrt{\frac{\mu+1}{2pq}} \\ h &= \sqrt{1-\frac{\epsilon}{pq}} \end{aligned}\right.$$

En effet, on obtient ce résultat en portant dans l'équation

$$P = 1 - P' - P'' = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx - P' - P''$$

les limites de P′ et de P″ fournies par les deux théorèmes précédents.

Toutefois, on a supposé au § 4 (Premier cas) $a - p < \frac{2pq}{3}$; donc, puisque a est la plus grande fraction de dénominateur $\mu+1$

contenue dans $p+\epsilon$, on supposera aussi, dans ces trois premiers théorèmes,

$$\epsilon < \frac{2pq}{3} - \frac{1}{\mu+1}.$$

6. *Limite supérieure de la somme des termes de* $(p+q)^\mu$ *qui avoisinent le terme maximum.* THÉORÈME IV. *Soit* Q′ *la somme des termes de* $(p+q)^\mu$ *où les exposants* r *de* p *et* s *de* q *satisfont aux deux conditions (équivalentes entre elles)*

$$r \geqslant (\mu+1)(p-\epsilon)+1,$$
$$s \leqslant (\mu+1)(q+\epsilon)-2;$$

on aura

$$Q' = S < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{T}{h}}^{\infty} e^{-x^2}\,dx, \qquad \text{où} \qquad \left\{ \begin{array}{l} T = \epsilon\sqrt{\dfrac{\mu+1}{2pq}} \\ h = \sqrt{1-\dfrac{\epsilon}{pq}} \end{array} \right. .$$

En effet, les conditions assignées reviennent aux deux conditions $a \geqslant p-\epsilon$ et $b \leqslant q+\epsilon$, considérées dans le paragraphe 4 (second cas) et le théorème lui-même reproduit la conclusion de ce paragraphe.

THÉORÈME V. *Soit* Q″ *la somme des termes de* $(p+q)^\mu$ *où l'exposant* r *de* p *satisfait à la condition*

$$r \leqslant (\mu+1)(p+\epsilon)-2;$$

on aura (avec les valeurs précédentes de T *et* h*),*

$$Q'' < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{T}{h}}^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

En effet, ce théorème se déduit du précédent par la permutation de p et q.

Théorème VI. *Soit* Q *la somme des termes de* $(p+q)^\mu$ *où l'exposant de p est compris entre*

$$(\mu+1)(p-\epsilon)+1 \qquad \text{et} \qquad (\mu+1)(p+\epsilon)-2;$$

on aura (avec les valeurs précédentes de T *et* h*),*

$$Q < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{T}{h}} e^{-x^2}\,dx.$$

En effet, cette relation s'obtient en portant dans l'équation

$$Q = Q' + Q'' - 1 = Q' + Q'' - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx,$$

les limites de Q′ et de Q″ fournies par les deux théorèmes précédents, puis en réduisant les intégrales à une seule et en changeant le signe de x.

Remarque. Ce théorème suppose évidemment que la limite inférieure assignée à p soit moindre que la limite supérieure et, pour cela, que l'on ait

$$\epsilon > \frac{3}{2(\mu+1)}.$$

Rappelons encore que ϵ a été supposé $< pq$ (voir § 4).

7. *Conclusion. Application au théorème de Bernoulli.* Soient A et B deux événements contradictoires de probabilités p et q. On fait μ épreuves amenant N fois l'événement A et, par conséquent, $\mu - N$ fois l'événement B. Dans ce cas, nous appelons

écart absolu la différence absolue entre le nombre N et le nombre $(\mu+1)p-\frac{1}{2}$, *écart relatif*, le quotient de l'écart absolu par $\mu+1$.

La probabilité pour que, sur μ épreuves, l'écart relatif reste inférieur à une fraction donnée l est égale, d'après cela, à la somme des termes de $(p+q)^\mu$ où l'exposant de p est compris entre

$$(\mu+1)(p-l)-\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad (\mu+1)(p+l)-\frac{1}{2}.$$

Cette probabilité peut donc s'évaluer par les théorèmes qui précèdent, ce qui nous conduit à formuler le théorème suivant :

THÉORÈME VII. *Soit* P *la probabilité pour que, sur μ épreuves, l'écart relatif soit inférieur à l; on aura*

$$P > \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{Th} e^{-x^2}\,dx, \qquad P < \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{T'}{h'}} e^{-x^2}\,dx,$$

en posant respectivement

$$\left\{\begin{aligned} \epsilon &= l-\frac{3}{2(\mu+1)} \\ T &= \epsilon\sqrt{\frac{\mu+1}{2pq}} \\ h &= \sqrt{1-\frac{\epsilon}{pq}} \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \epsilon' &= l+\frac{3}{2(\mu+1)} \\ T' &= \epsilon'\sqrt{\frac{\mu+1}{2pq}} \\ h' &= \sqrt{1-\frac{\epsilon'}{pq}} \end{aligned}\right.$$

pourvu que l vérifie les conditions :

$$l>\frac{3}{2(\mu+1)},\quad l<pq-\frac{3}{2(\mu+1)} \quad \text{et} < \frac{2pq}{3}+\frac{1}{2(\mu+1)}.$$

En effet, si l'on substitue à l sa valeur en fonction de ϵ, les limites imposées à l'exposant de p deviennent

$$(\mu+1)(p-\epsilon)-2 \qquad \text{et} \qquad (\mu+1)(p+\epsilon)+1,$$

de sorte que la première inégalité se ramène au théorème III.

Si l'on substitue à l sa valeur en fonction de ϵ', ces mêmes limites deviennent

$$(\mu+1)(p-\epsilon')+1 \qquad \text{et} \qquad (\mu+1)(p-\epsilon')-2,$$

de sorte que la seconde inégalité se ramène au théorème VI.

D'ailleurs les conditions imposées à l ont pour effet de rendre ϵ positif et $< \frac{2pq}{3} - \frac{1}{\mu+1}$ et $\epsilon' < pq$.

Théorème de Bernoulli. Le théorème précédent est plus qu'un théorème asymptotique comme celui de Bernoulli. Il fournit un procédé pratique d'approximation dont nous allons reparler. Mais le théorème de Bernoulli s'en déduit immédiatement, le voici : *quelque petit que soit l'écart relatif l supposé fixe, la probabilité* P *tend vers la certitude quand* μ *tend vers l'infini. En effet,* Th *tend alors vers l'infini avec* μ.

Mais les deux limites du théorème précédent permettent de préciser davantage le théorème de Bernoulli. On peut concevoir que l'écart relatif soit variable avec μ. Les deux limites mettent en évidence que *la condition nécessaire et suffisante pour que* P *tende vers la certitude quand* μ *tend vers l'infini, est que* $\frac{l}{\sqrt{\mu}}$ *tende aussi vers l'infini.*

Du degré d'approximation obtenu. Formule classique. Quand Th est grand et h petit, les deux intégrales du théorème VII sont extrêmement voisines l'une de l'autre. L'approximation de P fournie par le théorème est donc singulièrement exacte. L'intégrale classique pour calculer P est la suivante :

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{L} e^{-x^2}\, dx \qquad \text{où} \qquad L = l\sqrt{\frac{\mu+1}{2pq}}.$$

On voit immédiatement que cette intégrale est intermédiaire entre les deux autres du théorème VII. Donc, quand L est grand la formule précédente présente une exactitude très grande, même beaucoup plus grande que ne pourraient le faire supposer les procédés grossiers dont on se sert le plus souvent pour l'établir.

Les conditions sont moins avantageuses quand Th est petit et il y a lieu d'examiner le degré d'approximation obtenu dans le cas le plus défavorable. Nous allons traiter cette question dans une note finale.

Mais auparavant il n'est pas inutile de montrer par un exemple le caractère pratique des formules du théorème VII. Soient $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$ et $\mu = 1\,000\,000$ le nombre d'épreuves; la probabilité pour que l'écart ne surpasse pas $\frac{1}{1000}$ est comprise d'après ces formules entre 0,96587 et 0,96634; celle pour que l'écart ne surpasse pas $\frac{1}{500}$ entre 0,9999769 et 0,9999789.

Note sur le degré d'approximation obtenu dans le cas le plus défavorable. L'indétermination que le théorème VII du paragraphe précédent laisse subsister dans la valeur de P est égale à la différence des deux limites fournies par le théorème, c'est-à-dire à l'intégrale

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{Th}^{\frac{T'}{h'}} e^{-x^2}\, dx.$$

Nous allons en déterminer une limite supérieure. On a

$$\int_{Th}^{\frac{T'}{h'}} e^{-x^2}\, dx = \int_{Th}^{T} + \int_{T}^{T'} + \int_{T'}^{\frac{T'}{h'}}$$

$$< e^{-T^2h^2}\, T(1-h) + e^{-T^2h^2}\, (T'-T) + e^{-T'^2}\, T'\, \frac{1-h'}{h'}.$$

Pour arriver à un résultat pratique, nous supposerons que l'on ait

$$l < \frac{pq}{2} - \frac{2}{3(\mu + 1)},$$

de façon que ϵ et ϵ' soient inférieures à $\frac{pq}{2}$.

Dans ce cas, les deux quantités

$$h = \sqrt{1 - \frac{\epsilon}{pq}}, \qquad h' = \sqrt{1 - \frac{\epsilon'}{pq}},$$

sont supérieures à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et par suite à $\frac{2}{3}$.

Il vient alors

$$1 - h = \frac{1 - h^2}{1 + h} < \frac{3}{5}(1 - h^2) = \frac{3\epsilon}{5pq} = \frac{6T}{5\sqrt{2(\mu + 1)pq}},$$

et, de même,

$$1 - h' < \frac{6T'}{5\sqrt{2(\mu + 1)pq}}.$$

D'autre part,

$$T' - T = (\epsilon' - \epsilon)\sqrt{\frac{\mu + 1}{2pq}} = \frac{3}{\sqrt{2(\mu + 1)pq}}.$$

Par la substitution de ces limites, il vient

$$\int_{Th}^{\frac{T'}{h'}} e^{-x^2}\,dx < \frac{3}{\sqrt{2(\mu + 1)pq}}\left[e^{-T^2h^2}\left(\frac{2T^2}{5} + 1\right) + e^{-T'^2}\frac{2T'^2}{5h'}\right].$$

Comme h^2 est $> \frac{1}{2}$, on reconnaît facilement que

$$e^{-T^2h^2}\left(\frac{2T^2}{5} + 1\right)$$

est une fonction constamment décroissante de T^2 quand T^2 croît à partir de 0, son maximum est donc l'unité. Quant à $e^{-T'^2}T'^2$ son maximum est $\frac{1}{e}$. Il vient donc

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{Th}^{\frac{T'}{h'}} e^{-x^2}\,dx < \frac{6}{\sqrt{2\pi(\mu+1)pq}}\left(1+\frac{2}{5eh'}\right).$$

Comme h' est $> \frac{2}{3}$, on a encore

$$\frac{12}{5eh'} < 2$$

et, par suite,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{Th}^{\frac{T'}{h'}} e^{-x^2}\,dx < \frac{8}{\sqrt{2\pi(\mu+1)pq}}.$$

Le maximum de l'écart entre nos deux limites est donc de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ et tend vers zéro quand μ augmente indéfiniment. Nous rappellerons que, pour établir la formule précédente, nous avons supposé $l < \frac{pq}{2} - \frac{2}{3(\mu+1)}$.

M. Goedseels donne lecture du rapport suivant sur la note du R. P. Willaert, S. J., intitulée : *Une interprétation géométrique de la méthode de Mayer. Discussion de cette méthode. Méthode nouvelle.*

La méthode de Tobie Mayer permet de déduire un système d'équations finales d'une série d'équations linéaires d'une manière très expéditive, mais tout à fait empirique. Nous avons montré, dans divers articles des ANNALES de la Société scientifique et dans notre *Théorie des erreurs d'observation*, que cette méthode jouit, dans le cas d'une ou de deux inconnues, d'une propriété relative

aux valeurs moyennes, et qui peut, faute de mieux, être considérée comme un avantage; mais, nous avons exprimé des doutes et fait nos réserves pour les équations contenant plus de deux inconnues.

Le travail du P. Willaert montre clairement que nos réserves et nos doutes étaient fondés. Dans le cas de trois inconnues, par exemple, où la méthode peut être assimilée à la détermination d'un plan, elle peut conduire à des erreurs si grandes qu'au lieu de trouver le plan cherché, on trouve un plan perpendiculaire, ou même qu'on ne trouve rien. A ce seul titre, le travail du P. Willaert constitue un réel progrès. Mais l'auteur ne s'en tient pas là. Après avoir signalé le mal, il propose un remède.

La méthode de Tobie Mayer est atteinte, à notre avis, du vice constitutionnel commun à toutes les méthodes empiriques, y compris celles des moindres carrés.

La guérison ne peut donc pas être radicale. Mais l'amélioration est considérable et la *méthode nouvelle* proposée par le P. Willaert peut certainement rendre service.

Je propose donc d'insérer le travail dans nos Annales et d'adresser des félicitations à l'auteur. Ces conclusions sont adoptées.

Voici la note du R. P. Willaert :

Une interprétation géométrique de la méthode de Mayer pour la résolution des équations de condition. Discussion de cette méthode. Méthode nouvelle.

1. *Méthode de Mayer.* Dans les sciences d'application, il est assez rare qu'une grandeur se détermine par une mesure directe. Le plus souvent il existe entre plusieurs grandeurs L, M, N, qu'on doit évaluer, une relation linéaire,

$$L + xM + yN + z = 0.$$

Les observations fournissent les valeurs des coefficients x, y, z. Ces valeurs sont affectées d'erreurs. Dans le problème, tel que je le traite, je suppose que la seule donnée que l'on possède sur ces

erreurs soit la suivante : les erreurs sont *relativement petites* (*).

Soit un système de valeurs,

$$x_i, \quad y_i, \quad z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; \quad n > 3)$$

On forme, au moyen de ces valeurs, n équations linéaires, en général incompatibles,

$$(1) \qquad \begin{aligned} & L + x_1 M + y_1 N + z_1 = 0, \\ & L + x_2 M + y_2 N + z_2 = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & L + x_n M + y_n N + z_n = 0. \end{aligned}$$

Aux équations ainsi formées, on applique, pour la détermination des valeurs L, M, N, les diverses méthodes de la théorie des erreurs.

La méthode dite des moindres carrés est la plus usitée. Elle a soulevé bien des controverses. M. Goedseels a établi récemment (**) que si l'on détermine quadratiquement les approximations des fonctions linéaires, la méthode en question fournit les valeurs les plus approximatives des inconnues.

Mais la méthode des moindres carrés donne lieu à des calculs très laborieux. Afin de les éviter on se sert souvent d'une méthode rapide imaginée par Tobie Mayer (***).

Pour appliquer la méthode de Mayer aux équations (1), on range celles-ci suivant les valeurs croissantes des x. On les divise en trois groupes, renfermant à une unité près (IV) le même nombre d'équa-

(*) Je ne me dissimule pas que ce langage n'a rien de la précision mathématique. La question, telle qu'elle se présente ici, ne comporte pas plus de rigueur.

(**) *Théorie des erreurs d'observation*, par E. Goedseels. Louvain, Peeters, 1902.

(***) L'auteur a exposé sa méthode dans les KOSMOGRAPHISCHE NACHRICHTEN UND SAMMLUNGEN 1748, 1760. — Sous le nom de Mayer est souvent enseignée une méthode différente à laquelle il est tout à fait étranger et dont nous ne nous occupons pas dans cette communication.

(IV) En réalité, Mayer ne considérait qu'un système formé d'un nombre d'équations multiple de 3. La généralisation introduite ici s'impose.

tions; on additionne membre à membre les équations de chaque groupe et l'on obtient ainsi les trois équations finales

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
p\mathrm{L} + \mathrm{M}\Sigma_p x + \mathrm{N}\Sigma_p y + \Sigma_p z &= 0\\
q\mathrm{L} + \mathrm{M}\Sigma_q x + \mathrm{N}\Sigma_q y + \Sigma_q z &= 0\\
r\mathrm{L} + \mathrm{M}\Sigma_r x + \mathrm{N}\Sigma_r y + \Sigma_r z &= 0
\end{aligned}
$$

p, q, r étant respectivement le nombre d'équations de chaque groupe, et les Σ ayant un sens évident.

Ces trois équations fournissent les valeurs de L, M, N.

2. *Interprétation géométrique du problème.* Construisons dans l'espace les n points x_i, y_i, z_i.

On sait que, si les observations s'étaient faites sans erreur, ces points se distribueraient suivant un plan d'équation

$$\mathrm{L} + x\mathrm{M} + y\mathrm{N} + z = 0.$$

On sait, de plus, que les erreurs commises sont relativement petites, et que, par conséquent, les points s'écarteront relativement peu de ce plan.

Borné à ces seules données, le problème à résoudre consiste à choisir un plan passant *dans le voisinage* de tous les points donnés.

Mayer définit ce plan de la manière suivante : Ayant divisé les points en trois groupes, il assujettit le plan à passer par le centre de gravité de chacun des trois groupes de points.

En effet, la première équation (2) montre que le plan passe par le point de coordonnées

$$\frac{\Sigma_p x}{p} \qquad \frac{\Sigma_p y}{p} \qquad \frac{\Sigma_p z}{p},$$

centre de gravité du groupe formé par les points

$$x_1,\quad y_1,\quad z_1;\quad x_2,\quad y_2,\quad z_2;\quad \ldots;\quad x_p,\quad y_p,\quad z_p.$$

Les deux autres équations ont une signification semblable.

3. *Discussion de la Méthode de Mayer* (*). La justification analytique de la méthode de Mayer n'existe pas. M. Goedseels a montré que, dans le cas d'une ou deux inconnues, parmi toutes les solutions linéaires, celle de Mayer jouit de certaines propriétés qu'on peut regarder comme des avantages.

L'interprétation géométrique que j'ai donnée, peut être prise, si l'on veut, et faute de mieux, pour une justification de la méthode (**).

Cependant, si le principe en est acceptable, l'application qu'en fait Mayer est sujette à certaines critiques.

Les points observés, s'écartant peu d'un plan, peuvent être considérés comme distribués à l'intérieur d'un disque d'une certaine étendue et d'épaisseur relativement faible.

1° Supposons le disque sensiblement parallèle au plan des yz. Mayer divise les points en groupes d'après les x croissants, c'est-à-dire par des plans parallèles au plan des yz, ce qui revient à diviser le disque en tranches suivant son épaisseur.

Les trois centres de gravité des tranches seront alors très voisins, condition défavorable pour la détermination du plan.

2° Quelle que soit l'orientation du disque par rapport aux axes, la division par plans parallèles forme des groupes (fig. 1) dont les

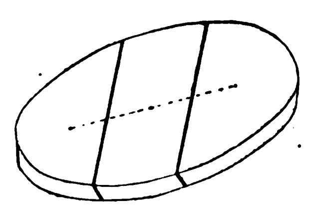


Fig. 1.

(*) La méthode de Mayer donne lieu à des solutions diverses d'après la forme de l'équation primitive et d'après la lettre qu'on choisit pour déterminer l'ordre des équations. Les 12 solutions différentes qu'on obtient sont à priori toutes également valables, et leur multiplicité ne prouve rien contre la méthode.

(**) A ce point de vue, il est utile de rappeler la propriété suivante du centre de gravité : la somme algébrique des distances des points d'un groupe à tout plan passant par leur centre de gravité est nulle.

centres de gravité seront, en général, à peu près en ligne droite, condition défavorable pour la détermination du plan.

4. *Nouvelle méthode.* Admettons le principe de la méthode de Mayer qui est de diviser les points trouvés en trois groupes et de définir le plan cherché par les trois centres de gravité de ces groupes. Admettons de plus, que la division se fera, pour une raison de simplicité, par des plans parallèles aux plans des coordonnées.

On voit immédiatement que, pour éviter les inconvénients signalés dans la méthode de Mayer, il faut chercher à diviser le disque dont il a été question 1° suivant des sections normales autant que possible au plan moyen du disque; 2° de manière que le triangle formé par les trois centres de gravité et qui doit déterminer le plan ait la plus grande surface possible.

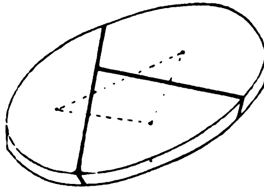


FIG. 2.

Pour réaliser le mieux possible le premier desideratum, on coupera le disque par des plans perpendiculaires à celui des axes sur lequel le disque se projette en plus grande longueur.

On rangera donc les équations (1) suivant les x, les y ou les z croissants, d'après que la série des x, des y ou des z renfermera des valeurs dont la différence soit la plus grande. Et l'on prendra, pour former le premier groupe, le premier tiers de ces équations

Ensuite on réalisera la seconde condition imposée de la manière suivante.

Les équations restantes seront rangées d'après celle des deux lettres restantes dont la série fournit deux valeurs dont la différence soit la plus grande. On prendra la première moitié de ces équations pour former le second groupe, la seconde moitié pour former le troisième groupe.

Ce procédé de division répond à une division du disque analogue à celle représentée par la figure 2.

Cette méthode nouvelle, dont l'application est aussi aisée et aussi rapide que la méthode de Mayer, semble, pour les raisons alléguées plus haut, devoir lui être préférée.

Elle s'applique évidemment en partie au cas de deux inconnues et se justifie de la même manière.

Le procédé se généralise facilement pour le cas de quatre inconnues et plus ; mais ici la justification intuitive fait évidemment défaut.

On peut, dans cette méthode aussi, tenir compte du *poids* des équations. Il suffit de conduire les calculs comme si une équation de *poids m* était remplacée par une série de *m* équations identiques.

M. Mansion fait rapport sur le Mémoire du R. P. Bosmans, S. J., intitulé : *Nicolas Petri de Deventer.*

L'algèbre de Nicolas Petri de Deventer, dont la première édition est de 1583, sans rien contenir d'original dans le sens propre du mot, a grandement contribué à faire connaître, dans les pays de langue flamande, les nouveautés algébriques de l'époque et, en particulier, les découvertes des Italiens sur les équations du troisième et du quatrième degré, publiées dans l'*Ars magna* de Cardan (1545). Elle donne une idée précise de l'enseignement mathématique à la fin du XVI[e] siècle. Nous proposons donc à la section de voter l'impression du mémoire historique du R. P. Bosmans dans les ANNALES, après qu'il l'aura un peu abrégé, en réduisant les notes bibliographiques qui ne se rapportent pas à Petri, et en supprimant les citations flamandes dont il donne la traduction. Il nous semble aussi que le nombre des solutions d'équations cubiques analysées peut être diminué. Bien entendu, il faut laisser l'exemple remarquable où Petri supprime une racine 4 d'une équation en divisant les deux membres par $x - 4$, puis reconnaît lui-même que $x = 4$ vérifie l'équation.

Ces conclusions sont adoptées par la section.

Le rapport sur une note de M. Mansion relative au Kantisme et à la métagéométrie, par M. l'abbé Sentroul, est renvoyé à une autre session, le rapporteur ne pouvant assister à la séance.

M. le Vicomte R. d'Adhémar fait une communication préliminaire sur une nouvelle extension des méthodes d'approximations successives à l'intégration des équations aux dérivées partielles.

M. Mansion commente deux passages de Kant relatifs aux mathématiques pures ou appliquées, qui montrent combien il était peu versé en ces matières.

I. Dans la préface de la seconde édition de la *Critique de la Raison pure* (p. 28 de l'édition de Kirchmann) Kant se comparant à Copernic qui a révolutionné l'astronomie, comme lui, Kant, a révolutionné la théorie de la connaissance, dit du célèbre astronome :

« Il en est ici comme de l'idée première de Copernic : voyant qu'*il ne pouvait réussir à expliquer les mouvements du ciel* en admettant que l'armée des astres tourne autour du spectateur, il chercha s'il ne réussirait pas mieux s'il laissait se mouvoir le spectateur et laissait les astres en repos. »

Malheureusement pour Kant, l'assertion en italiques est complètement fausse. Pour expliquer les mouvements célestes, on peut considérer tel point que l'on veut comme immobile pourvu que l'on transporte en sens contraire, à tous les astres, le mouvement dont il est animé. Copernic, comme Ptolémée, le savait; il savait que l'on peut expliquer les mou ements célestes de plusieurs manières et c'est pour des raisons philosophiques et non pour des raisons mathématiques qu'il dit : « *Vides ergo quod ex his omnibus* PROBABILIOR *sit mobilitas terrae quam ejus quies* » *(De Rev.*, I, 8).

II. Kant a publié, en 1768, une dissertation intitulée : *Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raum* (Kant's Werke, éd. Rosenkranz et Schubert, t. V, pp. 290-301) où il expose longuement ce qu'on a appelé le *paradoxe de l'équivalence (en volume) des objets symétriques* (pp. 295-300).

On retrouve le même paradoxe, sous une forme plus brève, dans le § 13 des *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten konnen* (1783).

Le même, disons-nous : bien entendu *le même*, au point de vue géométrique; car au point de vue philosophique, Kant déduit du paradoxe de l'équivalence des objets symétriques des conclusions

directement opposées en 1768 et en 1783, ou même en 1769. « Au lieu de voir, dit Ruyssen (*Kant*, 2e édition, p. 58), comme en 1768, dans l'espace, une réalité extérieure absolue dans laquelle nous apercevons les objets, il y aperçoit [dès 1769, dans une dissertation latine contenant le premier germe des idées exposées dans la *Critique de la Raison pure* et dans les *Prolegomena*] une nécessité intérieure de la sensibilité, la loi imposée par l'esprit aux choses et qui rend la perception possible. » On peut trouver la conclusion ancienne, celle de 1768, dans la dissertation citée (*Werke*, t. V, p. 294), la conclusion nouvelle et la réfutation de l'ancienne, dans la première phrase du § 13 des *Prolegomena*.

Kant parle du paradoxe des objets symétriques comme d'une question insoluble. Or elle est facile à résoudre, d'une manière élémentaire, comme on le sait :

Considérons un point I pris à égale distance de deux plans se coupant suivant une arête AB, donc dans le plan bissecteur du dièdre qu'ils forment; projetons I en γ, δ sur les deux plans et menons les lignes IA, IB, γA, γB, δA, δB. L'hexaèdre ABγIδAB a pour plan de symétrie ABI; il est *autosymétrique* et comme tel superposable à son image dans un miroir, à son symétrique. Il en est de même d'ailleurs de tous les corps qui ont un plan de symétrie ou sont autosymétriques, comme Kant l'a remarqué explicitement en 1768 (*loc. cit.*, pp. 299-300).

Tout tétraèdre ABCD contient un point I également éloigné de ses faces. C'est le centre de la sphère inscrite, point commun à tous les plans bissecteurs de ses angles dièdres. En joignant I et ses projections α, β, γ, δ sur les faces aux sommets A, B, C, D, on décompose le tétraèdre en six hexaèdres autosymétriques. Tout polyèdre peut être décomposé en tétraèdres et, par suite, en parties autosymétriques et tout corps peut être regardé comme limite d'un polyèdre. Donc enfin, tous les corps sont composés de parties autosymétriques superposables à leur image dans un miroir ou à leurs symétriques.

L'équivalence des corps symétriques s'explique donc aisément au moyen des premiers principes de la géométrie : elle ne s'appuie pas même sur le postulatum d'Euclide; elle ne suppose connue que la première moitié des livres I et XI des Éléments du géomètre grec. On ne conçoit pas comment Kant a pu voir là un

mystère et en déduire, en 1768, que l'espace a une existence *extérieure* absolue indépendante des objets, puis en 1769 et en 1783 qu'il est une forme innée *intérieure* de l'entendement (*).

M. Goedseels commence l'exposition d'une *méthode de résolution définitive et rationnelle du problème de la théorie des erreurs d'observation;* il en fait l'application à la méthode de la quadruple pesée (Voir cette application dans les travaux de la seconde section).

Mercredi, 10 avril 1907. M. Goedseels termine l'exposé de son mémoire sur la théorie des erreurs. M. Mansion est nommé rapporteur du travail de M. Goedseels.

Le R. P. Bosmans, S. J., fait une communication sur la théorie des sections coniques dans l'*Opus geometricum* de Grégoire de Saint-Vincent, d'après l'ouvrage récent de Bopp (**).

Il fait ressortir l'originalité du grand géomètre brugeois que Leibniz estimait à l'égal de Descartes, de Fermat et des meilleurs mathématiciens de cette époque.

Le R. P. Willaert, S. J., fait la communication suivante : *Sur la formule des poids, et sur son application au problème de la théorie des erreurs.*

1. Les traités de probabilités donnent, sans la démontrer, une formule permettant de calculer le poids d'une fonction de grandeurs observées au moyen des poids de ces grandeurs. On montre que cette formule jouit de certains avantages, en particulier de la propriété suivante : on obtient le même poids final, soit qu'on le calcule directement en fonction des poids des grandeurs observées, soit au moyen de fonctions de ces mêmes grandeurs, dont le poids eût été préalablement calculé (***).

Le problème que je me propose de résoudre fournit une démon-

(*) La démonstration de l'équivalence des triangles sphériques symétriques, classique de son temps, et facile à étendre aux tétraèdres symétriques aurait dû lui faire soupçonner que son paradoxe avait sa source dans son ignorance.

(**) *Die Kegelschnitte des Gregorius a S. Vincentio in Vergleichen des Bearbeitung*, von Karl Bopp. Leipzig, Teubner, 1907.

(***) Voir : E. Goedseels, *Théorie des erreurs d'observations*, p. 23.

stration de la formule des poids. Il permet en outre de trouver une solution du problème de la théorie des erreurs.

2. Étant données deux grandeurs x, y dont on connaît la loi de probabilité, trouver la loi de probabilité d'une fonction linéaire de ces grandeurs.

Soit

$$\varpi_x(x)\,dx$$

la probabilité qu'une valeur de x fournie par l'observation soit comprise dans l'intervalle x, $x + dx$.

Soit

$$\varpi_y(y)\,dy$$

la probabilité correspondante pour y.

La probabilité qu'un système de valeurs de x et de y satisfasse simultanément aux deux conditions, est

$$\varpi_x(x)\,\varpi_y(y)\,dx\,dy.$$

Adoptant une représentation géométrique, cette quantité exprime la probabilité qu'un point (x, y), dont on détermine séparément l'abscisse et l'ordonnée, soit compris dans le rectangle $(x, y)\,(x + dx, y)\,(x + dx, y + dy)\,(x, y + dy)$.

La probabilité qu'un point soit compris dans un domaine du plan des xy s'exprime par une intégrale étendue à ce domaine

$$\int\int \varpi_x(x)\,\varpi_y(y)\,dx\,dy.$$

3. Soit la fonction

$$z = ax + by.$$

Proposons-nous d'évaluer la probabilité que la valeur de z calculée par cette formule, au moyen des valeurs x et y, fournies par l'expérience, soit comprise entre z et $z + \Delta z$.

Désignons-la par $\varpi_z(z)\,\Delta z$.

Pour que z calculé soit compris dans cet intervalle, il faut et il suffit que les valeurs de x et de y satisfassent à la double inégalité :

$$z \leqslant ax + by \leqslant z + \Delta z,$$

ou, que le point (x, y) soit compris dans le domaine du plan des xy limité par les deux droites

$$ax + by = z$$
$$ax + by = z + \Delta z.$$

La probabilité cherchée sera donc

$$\varpi_z(z)\,\Delta z = \int_{-\infty}^{+\infty} \varpi_x(x)\,dx \int_{y_1}^{y_2} \varpi_y(y)\,dy,$$

où

$$y_1 = \frac{z - ax}{b}; \qquad y_2 = \frac{z + \Delta z - ax}{b}.$$

En appliquant à l'intégrale intérieure le théorème de la moyenne

$$\int_{y_1}^{y_2} \varpi_y(y)\,dy = (y_2 - y_1)\,\varpi_y[y_1 + \theta(y_2 - y_1)] \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1$$

$$= \frac{\Delta z}{b}\varpi_y\left(y_1 + \theta\frac{\Delta z}{b}\right) = \frac{\Delta z}{b}\left[\varpi_y(y_1) + \theta\frac{\Delta z}{b}\varpi'_y\left(y_1 + \theta'\theta\frac{\Delta z}{b}\right)\right] \quad 0 < \theta' < 1$$

ou, en négligeant les termes infiniment petits par rapport à Δz,

$$\int_{y_1}^{y_2} \varpi_y(y)\,dy = \frac{\Delta z}{b}\,\varpi_y\left(\frac{z - ax}{b}\right).$$

d'où

$$\varpi_z(z)\,\Delta z = \frac{\Delta z}{b}\int_{-\infty}^{+\infty} \varpi_x(x)\,\varpi_y\left(\frac{z - ax}{b}\right) dx.$$

C'est l'expression cherchée.

4. Appliquons cette formule dans l'hypothèse où x et y sont des erreurs, satisfaisant aux lois de probabilité

$$\varpi_x(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2},$$

$$\varpi_y(y) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2y^2}.$$

$$\varpi_z(z) = \frac{hk}{b\pi} e^{\frac{-k^2z^2}{b^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-h^2b^2 - k^2a^2}{b^2}x^2 + \frac{2k^2az}{b^2}x}\, dx.$$

L'intégrale se ramène aisément à la forme

$$\frac{b}{\sqrt{h^2b^2 + k^2a^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2 + 2\alpha u}\, du,$$

où

$$\alpha = \frac{k^2az}{b\sqrt{h^2b^2 + k^2a^2}}.$$

Sa valeur s'obtient facilement. On trouve

$$I = \sqrt{\pi}\, e^{\alpha^2}.$$

Et enfin,

$$\varpi_z(z) = \frac{w}{\sqrt{\pi}} e^{-w^2z^2},$$

où

$$w = \frac{hk}{\sqrt{h^2b^2 + k^2a^2}}.$$

L'extension au cas de plus de deux variables se fait aisément et donne la formule

$$w = \frac{hkl\ldots}{\sqrt{k^2l^2\ldots a^2 + h^2l^2\ldots b^2 + h^2k^2\ldots c^2 + \ldots}}.$$

La loi de probabilité d'une fonction linéaire de grandeurs fournies par l'expérience est semblable à celle de ces grandeurs elles-mêmes.

5. Les paramètres h, k, l... w, sont appelés *indices de précision*. On prend comme *poids* d'une observation le carré de l'indice de précision, relatif à l'erreur qu'on peut commettre.

Soient

$$t = f(x, y, z),$$

x', y', z' un système de valeurs observées de x, de y et de z; ξ, η, ζ les erreurs commises sur x, y et z, τ l'erreur commise en prenant pour t la valeur

$$t' = f(x', y', z').$$

On a, en négligeant les termes aux carrés des erreurs,

$$\tau = \xi \frac{\partial f}{\partial x'} + \eta \frac{\partial f}{\partial y'} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z'}.$$

Le poids de la valeur t' est le carré de l'indice de précision relatif à τ. En désignant par T, X, Y, Z, les poids de t', x', y', z', et en appliquant la formule des indices démontrée plus haut, on trouve :

$$T = \frac{XYZ}{YZ\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)^2 + ZX\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)^2 + XY\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)^2}.$$

C'est la formule connue du poids de la fonction $t = f(x, y, z)$.

6. *Application à la théorie des erreurs.* Soit

$$F(a, b, c) = \varphi_1(a, b, c)\,X + \varphi_2(a, b, c)\,Y + \varphi_3(a, b, c) = 0$$

une relation existant entre les grandeurs à déterminer X et Y et certains paramètres a, b, c, dont l'observation peut fournir une série de valeurs

$$a_i, \quad b_i, \quad c_i \qquad i = 1, \ 2, \dots n; \quad n > 2.$$

On a :

$$F(a_i, \quad b_i, \quad c_i) = \epsilon_i.$$

Nous appellerons ϵ_i le résidu du premier membre.

Soient α_i, β_i, γ_i, les erreurs commises dans l'évaluation de a, b, c. Négligeant les termes au carré des erreurs, nous avons

$$-\epsilon_i = \alpha_i \frac{\partial F}{\partial a_i} + \beta_i \frac{\partial F}{\partial b_i} + \gamma_i \frac{\partial F}{\partial c_i}.$$

Soient h, k, l les indices de précision des observations respectives faites sur a, b, c; la probabilité qu'une valeur ϵ_i est comprise entre 2_i et $\epsilon_i + \Delta\epsilon$ est

$$\frac{u_i}{\sqrt{\pi}} e^{-u_i^2 \epsilon_i^2} \Delta\epsilon$$

où

$$u_i = \frac{hkl}{\sqrt{k^2 l^2 \left(\frac{\partial F}{\partial a_i}\right)^2 + l^2 h^2 \left(\frac{\partial F}{\partial b_i}\right)^2 + h^2 k^2 \left(\frac{\partial F}{\partial c_i}\right)^2}}.$$

La probabilité d'un système de valeurs de ϵ_i comprises dans les intervalles respectifs $(\epsilon_i, \epsilon_i + \Delta\epsilon)$ est

$$\left(\frac{\Delta\epsilon}{\sqrt{\pi}}\right)^n \prod_{i=1}^{n} u_i e^{-u_i^2 \epsilon_i^2}.$$

Cette expression est fonction de X et de Y, $\Delta\epsilon$ étant d'ailleurs considéré comme constant (*).

On peut définir système le plus probable des valeurs de X et de Y, celui qui rend maximum la probabilité d'un système de valeurs ϵ_i.

La recherche des conditions de maximum de

$$\prod_{i=1}^{n} u_i e^{-u_i^2 \epsilon_i^2}$$

est malaisée; u_i étant fonction de X, Y (**).

On trouvera une solution approchée, en déterminant — ce qui est facile — une valeur approchée des u_i au moyen de la formule des poids; il suffira alors de rendre minimum

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \epsilon_i^2 .$$

Nous retrouvons ainsi la solution des moindres carrés, les membres des équations ayant été au préalable multipliés par leurs poids respectifs, et ces poids eux-mêmes étant calculés au moyen de la formule connue (***).

(*) On peut donner à $\Delta\epsilon$ une valeur arbitraire. Si dans le calcul des ϵ_i on veut s'arrêter à une décimale, la cinquième par exemple, la probabilité d'une valeur 3·47892 de ϵ_i est la probabilité que la valeur de ϵ_i est comprise dans l'intervalle (3·47892, 3·47893), et $\Delta\epsilon$ aura la valeur 10^{-5}.

(**) Dans le cas particulier où les quantités a, b, c ont même indice de précision, la condition de maximum se traduit géométriquement de la manière suivante : Étant donnés les points $(a_i\ b_i\ c_i)$ de l'espace mener un plan de manière que la somme des carrés de ses distances aux points soit minimum.

(***) On peut encore définir le système le plus probable de la manière suivante : On a

$$F(a_i b_i c_i) + \alpha_i \frac{\partial F}{\partial a_i} + \beta_i \frac{\partial F}{\partial b_i} + \gamma_i \frac{\partial F}{\partial c_i} = 0 \quad (1).$$

La probabilité d'un ensemble d'erreurs compris dans les intervalles respectifs $(\alpha_i, \alpha_i + \Delta\alpha)$, $(\beta_i, \beta_i + \Delta\beta)$, $(\gamma_i, \gamma_i + \Delta\gamma)$ est

M. Mansion montre ensuite, au moyen de la formule de Cauchy pour la détermination du reste dans la formule d'interpolation de Newton, dans le cas simple de la règle de fausse position double, comment la formule approximative

$$\frac{1}{3}x = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

peut donner les valeurs de x à moins d'un cent millième près, si l'on a calculé la fonction du second membre seulement de degré en degré.

Il fait ensuite remarquer, après Hermite, que la célèbre formule de Jacobi

$$\Pi(u, a) = uZa + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}$$

ne donne avec précision les valeurs de l'intégrale elliptique de troisième espèce que si l'on connaît le chemin d'intégration. Hermite a indiqué comment on peut déterminer Π quand $u = K$, ou $K + K'i$. M. Mansion a essayé d'appliquer la même méthode au cas où $u = K'i$, sans réussir complètement.

$$\left(\frac{hkl}{\sqrt{\pi}}\Delta\alpha\,\Delta\beta\,\Delta\gamma\right)^n e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} h^2\alpha_i^2 + k^2\beta_i^2 + l^2\gamma_i^2},$$

les quantités α_i, β_i, γ_i satisfaisant aux relations (1).

Déterminons α_i, β_i, γ_i, X et Y de manière que cette expression soit maximum $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, $\Delta\gamma$ étant regardés comme constantes.

Pour un système donné de valeurs de X et de Y, le maximum de l'exposant de e est

$$\sum \frac{h^2k^2l^2\,[F(a_i\,b_i\,c_i)]^2}{k^2l^2\left(\frac{\partial F}{\partial a_i}\right)^2 + l^2h^2\left(\frac{\partial F}{\partial b_i}\right)^2 + h^2k^2\left(\frac{\partial F}{\partial c_i}\right)^2}.$$

Nous retrouvons donc pratiquement la même solution approchée.

Sous-section technique

—

Mardi, 9 avril 1907. — La séance s'ouvre à 4 heures et demie sous la présidence de M. Ch. Lagasse-de Locht, président.

M. le Président annonce que sur la proposition du Conseil de la Société, l'assemblée générale a élevé la sous-section des sciences techniques au rang de section autonome.

La section procède à l'élection de son bureau pour l'année 1907-1908. Sont élus :

Président :	M. A. Witz.
Vice-Présidents :	MM. Ch. Beaujean.
	De Preter.
Secrétaire :	M. A. Crame.

M. G. de Fooz, secrétaire, annonce son départ prochain pour la Chine.

La parole est donnée à M. de Maupeou pour une communication *Sur le choc.* En voici un résumé :

Au début de cette étude, l'auteur rappelle que la Mécanique rationnelle suppose les solides invariables, puis il ajoute : la Mécanique céleste s'accommode bien de cette hypothèse, mais l'étude du choc et celle de la résistance des matériaux doivent forcément tenir compte de ce que les solides naturels sont déformables.

La théorie du choc, qu'on peut appeler classique, parce qu'elle figure dans les livres d'enseignement, parle bien de la déformation et de l'élasticité des solides, mais elle le fait en termes vagues et d'une façon tout à fait insuffisante. Dans un mémoire, trop peu connu, présenté en 1866 à l'Académie des Sciences, de Saint-Venant a donné une nouvelle théorie du choc dans laquelle il tient compte, comme il convient, de la manière dont les pressions et les déformations, qui résultent du choc de deux corps, se transmettent dans leur intérieur.

Après avoir résumé les deux théories en présence, M. de Maupeou montre qu'elles conduisent au même résultat lorsque le marteau

et l'enclume, supposés cylindriques, sont identiques, et à des résultats d'autant plus différents que la longueur et la masse du marteau sont plus faibles par rapport à celles de l'enclume. Pour trancher le différent d'une façon certaine il a eu recours à l'expérience, souverain juge en pareil cas.

M. Voigt avait fait à Kœnigsberg des essais avec de petits cylindres, suspendus comme des pendules et qu'il écartait de la verticale. Ce procédé qui ne permet d'obtenir que de très faibles vitesses, avait paru confirmer les formules classiques.

M. de Maupeou a fait à Lorient des expériences avec des barres de 50 millimètres de diamètre, ayant plusieurs mètres de longueur et en laissant tomber le marteau d'une hauteur variant de 1 mètre à 3 mètres. Il enregistrait sur un cylindre tournant le mouvement des extrémités voisines du marteau et de l'enclume avant et après le choc. Ces expériences ont pleinement confirmé la théorie nouvelle, elles ont mis en évidence le mouvement saccadé que prend l'enclume parcourue par une onde alternativement comprimée et étirée, de plus elles ont permis de mesurer la vélocité de cette onde.

Les résultats obtenus par M. Voigt s'expliquent d'ailleurs par l'influence de la couche d'air condensé à la surface des corps et par d'autres causes secondaires dont l'influence diminue à mesure que l'intensité du choc augmente.

M. de Maupeou a mesuré la vélocité des efforts de torsion comme celle des efforts de pression, et il fait remarquer que le procédé d'enregistrement adopté permettrait également de faire des essais d'écrasement et de contrôler les résultats auxquels on arriverait par le calcul, de façon à établir la théorie du choc sur des bases solides et indiscutables.

Cette communication est suivie d'un échange de vues entre les membres présents. M. de Maupeou dépose un mémoire étendu sur le sujet qu'il vient de traiter. Ce mémoire sera soumis, selon l'usage, à deux rapporteurs.

Mercredi, 10 avril. — La séance s'ouvre à 4 heures et demie, sous la présidence de M. L. Cousin.

La parole est donnée à M. A. Renier pour une communication verbale sur *une visite aux mines de sel d'Allemagne et d'Autriche.*

Jeudi, 11 avril. — La séance s'ouvre à 4 heures et demie, sous la présidence de M. A. Witz. La section procède au choix d'une question de concours et adopte celle-ci : *Étudier les conditions d'utilisation des gaz perdus dans les centres industriels.*

M. A. Witz fait la communication suivante sur *la Calorimétrie industrielle.*

L'étude plus approfondie des machines thermiques, à laquelle les ingénieurs et les physiciens se livrent depuis une vingtaine d'années, se traduit par l'établissement de bilans, qui permettent de déterminer les rendements thermiques, et d'analyser les causes intimes de leur amélioration progressive; ces bilans reposent sur la détermination des pouvoirs calorifiques des combustibles employés. La mesure de ces pouvoirs est devenue, dès lors, une opération courante : il importe évidemment qu'elle soit correctement effectuée, à l'aide d'appareils suffisamment sensibles et précis. Mais il est surtout nécessaire que les pouvoirs, dont il est fait usage, soient nettement définis : or, sur ce point, la pratique des ingénieurs présente encore certaines divergences qu'il faudrait supprimer, parce qu'elles nuisent à l'appréciation rationnelle des résultats fournis par les expériences faites sur les diverses machines motrices et à leur comparaison.

Il conviendrait, sinon d'unifier les manières de voir de tous (ce qui serait désirable, mais ne s'obtiendra qu'avec le temps), du moins de s'entendre sur les termes en usage dans la technique des moteurs; cette entente est le but de cette communication.

Suivant les conditions du fonctionnement des machines thermiques, on est amené à considérer le pouvoir calorifique des combustibles *à volume constant* ou bien *à pression constante;* d'autre part, suivant le point de vue auquel on se place ou encore suivant les conditions des contrats, on envisage aussi le *pouvoir supérieur*, ou le *pouvoir inférieur*, correspondant à la condensation ou à la non-condensation de la vapeur d'eau formée dans la combustion. Ces pouvoirs sont différents et ne peuvent être confondus.

Le pouvoir à volume constant C est presque toujours plus faible que le pouvoir à pression constante C'; mais la différence est généralement petite, et l'on n'en tient compte dans la pratique

que pour les gaz. La théorie permet de déterminer exactement la valeur de $C - C'$ par application du premier principe de la thermodynamique.

Appelant

v_0 le volume
U_0 la chaleur interne } du mélange du combustible et du comburant

v_1 le volume
U_1 la chaleur interne } des gaz brûlés

et U'_1 la chaleur interne de ces gaz brûlés pris sous le volume primitif v_0; prenant pour condition que, durant la combustion, la température et la pression, la température et le volume restent constants, et considérant que C et C' sont les chaleurs de formation des gaz brûlés, à partir du mélange, on peut écrire

$$C = U_0 - U_1 + Ap\,(v_0 - v_1)$$
$$C' = U_0 - U'_1$$
$$C - C' = U'_1 - U + Ap\,(v_0 - v_1)$$

Or, on peut admettre que les gaz brûlés sont à un état voisin de l'état parfait, de telle sorte que la variation $U'_1 - U_1$ de la chaleur interne à température constante est nulle; il reste donc $C - C' = Ap\,(v_0 - v_1)$. La différence est égale à la chaleur équivalente au travail externe, changé de signe, produit dans la combustion à pression constante.

Ce travail externe est dû à la diminution du volume initial du mélange par le fait de la combustion; c'est qu'en effet les gaz brûlés, ramenés à la température initiale du mélange, occupent presque toujours un volume moindre que celui du mélange avant la réaction; on dit qu'il y a condensation.

On peut expliquer encore l'origine de la différence $C - C'$ ainsi qu'il suit : par suite de la condensation, la tension des gaz brûlés, ramenés à leur température initiale, est moindre qu'avant la combustion; pour les évacuer dans l'atmosphère il faut, par suite, développer un certain travail, dont l'équivalent vient en décompte de la chaleur disponible et constitue la différence $C - C'$. Ce travail est précisément égal à $\int_{v_1}^{v_0} p\,dv = p\,(v_0 - v_1)$: il est positif, puisque $v_0 > v_1$ dans la plupart des cas.

La différence C — C′ dépend donc des volumes v_0 et v_1 : la chimie permet de calculer ces volumes. Appelons en effet n et n' le nombre d'unités de volume (221,32 à 0° et 760 mm) des gaz composants et composés, on a $v_0 = n \times 22,32 \times (1 + \alpha T)$ et $v_1 = n' \times 22,32 (1 + \alpha T)$; donc $v_0 - v_1 = (n - n') 22,32 (1 + \alpha T)$ et enfin

$$C - C' = A \frac{1,033}{1,000} (n - n') 22,32 (1 + \alpha T).$$

Cette formule fait ressortir l'influence de la température sur la chaleur de combustion; mais cette influence est négligée dans la pratique et nous n'en tiendrons pas compte.

La différence C — C′, est donc fonction de $n - n'$.

Pour la combinaison de l'hydrogène avec l'oxygène $n - n' = \frac{1}{2}$, et $C - C' = 0,286$: M. Berthelot a confirmé ce chiffre par une détermination expérimentale qui a donné pour C et C′ 34,500 et 34, 214, dont la différence est précisément 0,286.

On a de même pour l'oxyde de carbone $n - n' = \frac{1}{2}$.

Pour le formène et l'éthylène, $n = n'$; donc $C = C'$.

Avec la benzine, n' est plus grand que n; le phénomène est donc interverti.

Considérons maintenant le gaz de distillation de houille, dit gaz d'éclairage ou gaz de ville : c'est un mélange en proportion variable de H, CO, CH^4, C^2H^4, O, AZ, CO^2, et de carbures divers parmi lesquels il faut noter l'acétylène, le benzol, le propylène, etc. La condensation de combustion varie évidemment avec la composition du gaz; elle est comprise généralement entre 4,25 et 6 pour cent, le mélange renfermant la quantité d'air comburant nécessaire et suffisante pour assurer une combustion complète. La différence C—C′ se calcule d'après la valeur de $v_0 - v_1$; elle peut atteindre exceptionnellement 50 calories sur 5500, mais elle n'est souvent que de 10 calories, ce qui justifie les ingénieurs qui la négligent.

Pour les gaz pauvres, formés de H, CO, CH^4 avec un très faible contingent de C^2H^4, la différence absolue est habituellement encore très faible, quoique supérieure en valeur relative; il en est de même pour les gaz de hauts fourneaux.

La valeur de C est donnée par les calorimètres à combustion, celle de C' par les calorimètres ouverts, genre Hartley et Junkers. La première valeur est à appliquer aux moteurs à explosion : la seconde, aux moteurs à combustion.

Sur ces divers points, la pratique des ingénieurs est correcte et l'on ne peut pas leur reprocher de confondre les deux pouvoirs.

La question est plus importante pour ce qui est des pouvoirs supérieur et inférieur : sur ce point, les manières de voir sont très divergentes.

Le pouvoir inférieur est notablement plus faible pour tous les gaz combustibles utilisés dans les moteurs ; pour l'hydrogène, il est de 29,500 au lieu de 34,500, ce qui correspond à une diminution de 14 pour cent ; pour le gaz de ville, la diminution est souvent de 8 pour cent, mais elle oscille plus ou moins largement aux alentours de ce chiffre, suivant la proportion relative d'hydrogène et de carbure d'hydrogène. Elle n'est jamais négligeable dans un bilan correct.

En Allemagne, l'usage a prévalu de n'envisager que le pouvoir inférieur ; on favorise de la sorte les moteurs : par contre, cette manière de faire tend à attribuer aux gazogènes un rendement trop faible.

Dans notre *Traité des moteurs à gaz* (4e édition, t. I, p. 103) nous avons indiqué les arguments sur lesquels nous nous appuyons pour ne faire emploi que des pouvoirs supérieurs dans l'établissement des bilans de moteurs ; nous avons fait observer que : 1° Si les moteurs à gaz ne récupèrent pas les chaleurs latentes de la vapeur d'eau, c'est par suite d'une imperfection dont ils doivent porter la charge ; 2° la prise en considération des pouvoirs inférieurs favorise les moteurs alimentés d'un gaz riche en hydrogène et en carbures, et empêche d'établir des parallèles rationnels et impartiaux entre les divers cas de la pratique ; 3° elle nuit surtout à la mise en parallèle des moteurs et des machines à vapeurs pour lesquelles la chaleur latente de condensation est portée au passif de leur bilan ; 4° la mesure de la quantité de vapeur condensée ne peut se faire que pour les calorimètres ouverts, dans lesquels du reste elle est assez mal faite ; elle n'est pas pratique pour les bombes qui sont pourtant les meilleurs calorimètres, attendu que seuls ils garantissent une combustion complète.

En attendant que ces idées prévalent, il faut tout au moins demander que les ingénieurs déclarent clairement qu'ils ont employé les pouvoirs inférieurs, lorsqu'ils en font usage pour dresser les bilans d'utilisation de la chaleur.

M. P. Daubresse, présente l'étude suivante sur le *Calcul des pièces courbes de forte courbure relative.*

La difficulté à laquelle donnent lieu les pièces courbes, lorsque, comme il est de règle de le faire, on conserve la double hypothèse de l'invariabilité des sections planes (loi de Bernouilli) et de la proportionnalité des tensions aux allongements (loi de Hooke), provient de ce que les tensions n'y sont plus réparties suivant une loi linéaire mais bien suivant une loi hyperbolique.

Il en résulte que les formules de flexion et de cisaillement établies pour les pièces droites ne sont plus applicables et doivent être remplacées par d'autres.

Pour ce qui concerne la flexion en particulier, au lieu de pouvoir appliquer, pour la détermination de la tension t_r d'une fibre quelconque située à une distance y de la fibre moyenne la formule connue $M_r = t_r \frac{I}{y}$, on doit employer une formule relativement compliquée dans laquelle intervient, au lieu de I (qui est comme on le sait $\int d\omega y^2$), un facteur $I_1 = \int \frac{d\omega y^2}{1 + \frac{y}{\rho}}$, ρ étant le rayon de courbure de la fibre moyenne, expression qui ne peut se calculer que par le développement en série :

$$I_1 = \int d\omega y^2 - \frac{1}{\rho}\int d\omega y^3 + \frac{1}{\rho^2}\int d\omega y^4 - \frac{1}{\rho^3}\int d\omega y^5 + \ldots.$$

La méthode que j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui consiste à ramener, par un artifice bien simple, le calcul des pièces courbes à celui des pièces droites, c'est-à-dire qu'elle permet de leur appliquer les formules ordinaires des pièces droites, qui restent donc les seules à retenir pour les applications.

Cet artifice, je me hâte de le dire, ne comporte aucune approximation, et ne touche en rien à la rigueur des opérations. Dans la pratique, il donnera même, comme on le comprendra, des résultats

plus exacts que les méthodes ordinaires actuellement connues, celles-ci faisant intervenir, je viens de le rappeler, un I_1 dont on ne peut faire qu'un calcul approché.

Il consiste à substituer à la section réelle S, de centre de gravité G, une autre section S′, de centre de gravité G′ différent de G, que j'ai appelée jusqu'ici Section réduite (*) et que je déduis de S de la manière que je vais montrer.

Dans ce qui suit, j'affecterai d'un accent tous les termes relatifs à la section S′,

Je dois d'abord faire choix d'un axe ou base de réduction : transversale que je puis prendre en principe à une hauteur arbitraire; supposons-la à la hauteur des fibres C.

A cette hauteur, je donnerai à S′ la même largeur qu'à S, donc $z'_C = z_C$.

Pour toute autre hauteur, par exemple pour les fibres D, je ferai $z'_D = z_D \frac{\rho_C}{\rho_D}$, — ρ étant le rayon de courbure des fibres respectives.

Les z' pourront donc se déduire très simplement des z, ou bien par le calcul, ou encore graphiquement (en projetant les z sur l'axe de réduction à partir d'un point quelconque de l'axe de courbure).

On comprend qu'au delà de l'axe de réduction les z' seront inférieurs aux z, tandis qu'en deçà ils leur seront supérieurs. Le centre de gravité G′ sera donc en deçà de celui G.

Imaginons maintenant que S′ appartienne à une pièce droite : elle jouira de la propriété de s'y comporter exactement comme S se comporte dans la pièce courbe, sous l'action du même effort sollicitant, c'est-à-dire de subir une rotation de même amplitude autour du même axe des fibres neutres, en donnant lieu en C à la même tension : $t'_{rC} = t_{rC}$. Pour un point quelconque, la tension t'_r sera déterminée par la formule des pièces droites : $t'_{r'} = M_r : \frac{I'}{y'}$ (I' = par rapport à l'axe passant par G′), t_r s'en déduira par

(*) Il existe déjà à ma connaissance pour le calcul des pièces courbes une méthode dite des sections réduites, mais qui n'a avec celle que je présente rien de commun que le nom. Plusieurs membres ont proposé pour la mienne le nom de « Sections transformées ».

la relation bien simple $t_r = t'_{r'} \frac{\rho_C}{\rho}$ (ρ = rayon de courbure de la fibre considérée).

C'est ce que j'ai à démontrer.

Nous nous trouvons en présence de la pièce courbe réelle de section S et d'une pièce droite de comparaison de section S'. Considérons dans les deux un tronçon ayant en C la même longueur de fibre. Dans la pièce droite, toutes les fibres auront la même longueur initiale $l = l_C$. Dans la pièce courbe au contraire les l seront variables et proportionnels aux ρ.

Envisageons dans les deux cas un même déplacement de la section terminale du tronçon par rapport à sa section initiale, c'est-à-dire une même rotation, d'amplitude d'ailleurs quelconque, autour d'un axe quelconque comme axe des fibres neutres, et voyons quelles seront les tensions respectives. Les allongements totaux Δl sont les mêmes dans les deux cas, mais les allongements spécifiques, déterminant l'intensité des tensions, seront différents par le fait que les longueurs initiales de fibres sont différentes, à la seule exception de C.

Pour un point quelconque D, on aura : dans S' : $t'_{r\mathrm{D}} = \mathrm{E}\frac{\Delta l_\mathrm{D}}{l = l_\mathrm{C}}$, et dans S : $t_{r\mathrm{D}} = \mathrm{E}\frac{\Delta l_\mathrm{D}}{l_\mathrm{D}}$, donc $t'_{r'\mathrm{D}} = t_{r\mathrm{D}} \cdot \frac{l_\mathrm{D}}{l_\mathrm{C}}$, et comme $\frac{l_\mathrm{D}}{l_\mathrm{C}} = \frac{\rho_\mathrm{D}}{\rho_\mathrm{C}}$, $t_{r'\mathrm{D}} = t_{r\mathrm{D}} \frac{\rho_\mathrm{D}}{\rho_\mathrm{C}}$, ce qui constitue déjà la démonstration d'un premier point.

Dans la pièce courbe, $t_{r\mathrm{D}}$ règne sur une largeur z_D, et dans la pièce droite $t'_{r\mathrm{D}}$ règne sur une largeur z'_D. Or, d'après les expressions de $t'_{r\mathrm{D}}$ et de z'_D, il est visible que $t_{r\mathrm{D}} \times z_\mathrm{D} = t'_{r\mathrm{D}} \times z'_\mathrm{D}$.

Ceci fait comprendre immédiatement que la force intérieure totale, et, par conséquent, aussi l'effort sollicitant seront les mêmes dans les deux cas, — et achève donc la démonstration demandée.

Il résulte de la propriété ainsi établie que, sous l'action d'un couple de flexion, l'axe des fibres neutres passera toujours par G'; la position de ce dernier est donc connue *à priori* avant tout calcul.

J'ai laissé plus haut complètement arbitraire le choix de la base de réduction. Les surfaces réduites correspondant à différentes

bases auront évidemment toutes le même G′, puisque leurs z' restent toujours proportionnels. Leurs I′ sont également proportionnels et l'on peut donc rapidement et facilement passer de l'un à l'autre.

Si les calculs à faire ne demandent la connaissance que d'une seule t_r, par exemple celle d'une fibre extrême, c'est évidemment là qu'on placera la base de réduction, puisqu'on aura alors directement $t_r = t'_r$.

En autre cas, il semblera assez naturel de prendre comme base de réduction l'axe passant par G (donc de confondre C avec G).

Quoi qu'il en soit, après avoir construit S′ et déterminé G′, il reste à évaluer I′.

Or, pour ceci, nous disposons d'un procédé bien plus simple et plus avantageux que le mode de détermination (graphique ou numérique) ordinaire.

Considérons l'ellipse centrale de S′, et soit k' son demi-axe (= rayon de gyration). On sait que l'on a $I' = S.k'^2$.

D'autre part, on peut facilement reconnaître qu'une force centrale sur S, c'est-à-dire une force normale N appliquée en G ne peut avoir qu'un effet : faire tourner S autour de l'axe de courbure O. Les Δl des différentes fibres sont alors proportionnels à leurs l respectifs, la tension est identique pour toutes, et on a, comme pour les pièces droites, $N = S.t$.

Or, si nous appliquons à ce cas spécial de sollicitation la propriété générale d'après laquelle l'axe de rotation de la section est l'antipolaire du point d'application de la force sollicitante par rapport à l'ellipse centrale de la dite section, nous en conclurons que l'axe O doit être l'antipolaire de G par rapport à l'ellipse centrale de S′ et que, par conséquent, on a $GG' \times G'O = k'^2$, — ce qui nous donne un moyen de détermination immédiate et d'ailleurs absolument rigoureuse de I′.

Je ne me suis occupé dans ce qui précède que du calcul des t_r.

En ce qui concerne l'influence de l'effort tranchant, que les auteurs laissent généralement de côté — et pour cause — on comprendra que l'on pourra continuer à considérer la section S′ au lieu de celle S et lui appliquer les formules des pièces droites. On trouvera ainsi des t'_s dont on déduira les t_s par la relation toujours simple $t_s = t'_s \frac{z'}{z}$.

Telle est la méthode que je me proposais de faire connaître, et il me resterait, si j'en avais le temps, à faire apprécier sa remarquable fécondité d'application. Je me contenterai de montrer par un exemple combien elle simplifie les choses.

Je prendrai le cas, dont tout le monde connaît l'importance, des vases cylindriques à parois épaisses, soumis à pression intérieure ou extérieure, des frettages, calages, etc.

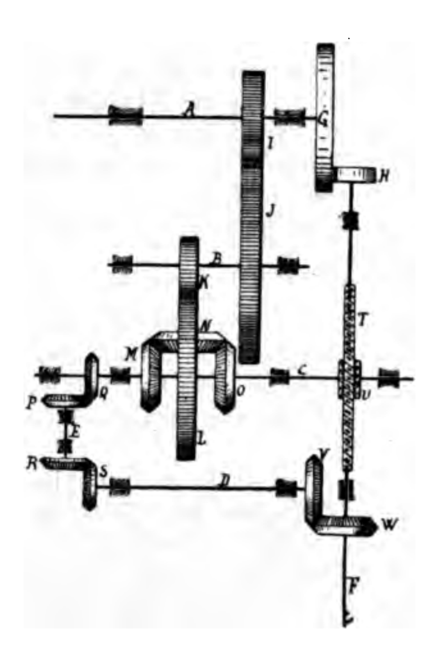
Dans les cas de ce genre, les sections ne subissent, comme on le sait, que des translations sans rotation. Or une translation est une rotation autour d'un axe reporté à l'infini, et par conséquent dans un tel cas le point d'application de la force sollicitante doit être en G' (point dont l'antipolaire par rapport à l'ellipse centrale de S' est à l' ∞). On connaît donc *à priori* la position de cette force. Dans les vases cylindriques soumis à la pression d'un fluide, on connaît aussi *à priori* son intensité : $\frac{pD}{2}$, de sorte qu'on est en mesure de pouvoir faire immédiatement le calcul des tensions sans devoir se rappeler la formule de Brix. Il est clair d'ailleurs qu'en appliquant au cas actuel le calcul analytique, on retrouvera cette dernière formule, ainsi que les autres similaires (Lamé, etc.).

J'ajouterai encore que les théories graphostatiques de la déformation totale de l'ensemble des pièces, basées notamment sur l'intervention des ellipses d'élasticité, et qui, jusqu'ici, n'étaient applicables qu'aux pièces droites (rigoureusement) et à celles de faible courbure relative (par approximation), deviennent applicables rigoureusement aux pièces de courbure quelconque. Il suffit qu'on remplace leurs S par des S' et qu'on substitue aux axes curvilignes réels, lieux des G, ceux des G'.

C'est ainsi que le calcul des pièces fermées telles que les maillons de chaîne, les anneaux, quelle que soit leur forme, irrégulière ou pas, devient abordable par des moyens simples autant que pratiques et expéditifs.

M. de Fooz, secrétaire, présente, au nom de M. J. Carlier, une note sur *un transformateur automatique des vitesses ;* en voici le résumé.

L'appareil représenté schématiquement par la figure ci-jointe permet de réaliser la transformation continue et automatique des *vitesses* d'un arbre commandé, en même temps que la transformation inverse du *couple moteur* agissant sur cet arbre : Quand le nombre de tours de l'arbre commandé diminue de tant, la valeur du couple moteur augmente du même tantième.



Pour cela, l'arbre moteur F, supposé à un nombre de tours fixe et invariable, est garni d'un filetage T et surmonté d'un galet à adhérence magnétique H, qui commande le plateau G, calé sur l'arbre A. La vis T passe sur l'engrenage U, dont la vitesse de rotation dépend de celle d'un train d'engrenages, commandé différentiellement par l'arbre A.

Dans ces conditions, le travail dû à N tours de l'arbre F est, à la périphérie du galet H, égal à $2\pi N r P$. A la circonférence de rayon r_1 du plateau G, le travail transmis est, abstraction faite des frottements, égal à $2\pi N_1 r_1 \times P_1$.

L'égalité devant s'établir entre les vitesses circonférentielles, et la position du galet H étant variable sur le plateau G, le nombre de tours de G est diminué ou augmenté sur celui du galet H. On pourra donc écrire, abstraction faite des frottements, etc. : $2\pi N r P = 2\pi N_1 r_1 P_1$.

Si, par hypothèse, le premier terme de l'équation est constant dans chacun de ses facteurs et que le mécanisme de l'appareil permette des variations relatives des facteurs du second membre de l'équation, une variation sur le facteur N, sera compensée par une variation sur r_1 ou sur P_1 ou sur ces deux facteurs à la fois.

Le fonctionnement de l'appareil s'explique comme suit. Si on suppose que l'arbre F tourne dans un certain sens, il tendra à éloigner le rouleau H du centre du disque G, car la vis T se dévisse de l'écrou formé par la denture de l'engrenage U. Mais le disque G étant entraîné par le galet H, fait tourner les engrenages I, J, K et L ainsi que l'équipage satellite N, qui tendent à ramener le galet H vers le centre du disque G.

Ce galet étant entraîné dans un sens par l'arbre F et dans l'autre par l'arbre A, choisit sur le disque G, une position stable correspondant à l'équilibre entre la vitesse de l'arbre F et celle de l'arbre A.

Pour réaliser cet appareil, il faut appliquer l'adhérence magnétique du galet H. Divers moyens peuvent être employés. L'auteur en décrit plusieurs. Il montre ensuite, en développant une application concrète, que l'adhérence magnétique appliquée aux galets peut largement suffire à entraîner une transmission mécanique de voiture.

Appliqué à une automobile, ce mécanisme permet :

1° D'avoir un embrayage doux et progressif par voie électromagnétique ;

2° D'obtenir toujours la pleine puissance du moteur en n'importe quel point d'une route à profil accidenté ;

3° La variation douce et progressive de *toutes* vitesses ; ce qui ferait ressembler, à l'allure si prisée de la voiture électrique, la voiture avec moteur à essence.

Enfin, appliqué à des transmissions fixes, cet appareil peut réaliser d'énormes progrès industriels.

Seconde section

Mardi, 9 avril 1907. — La section procède au renouvellement de son bureau. Sont élus :

Président :	M. G. VAN DER MENSBRUGGHE.
Vice-Présidents :	le R. P. SCHAFFERS, S. J.
	M. VAN DE VYVER.
Secrétaire :	le R. P. LUCAS, S. J.

Les questions de concours proposées l'an dernier et auxquelles il n'a pas été répondu, sont maintenues. En outre, on demande un électromètre perfectionné et l'étude, par son moyen, de phénomènes électriques de genres divers.

M. le lieutenant-colonel Ariès présente un mémoire intitulé : l'*Électricité considérée comme forme de l'énergie Électrostatique.* M. Van der Mensbrugghe et le P. Schaffers sont nommés commissaires pour l'examen de ce mémoire.

M. le Secrétaire présente, au nom de M. E. Goedseels, la communication suivante sur la *Quadruple pesée.*

But de la Quadruple pesée. — Le procédé d'observation auquel nous donnons le nom de quadruple pesée est une application à un cas simple d'une théorie générale que nous avons présentée à la première section de la Société scientifique de Bruxelles. Ce procédé a un double but.

Il sert premièrement à obtenir, au moyen d'une balance ayant un certain degré de précision, des pesées d'une précision beaucoup plus grande, grâce à une combinaison algébrique simple des résultats de quatre pesées séparées.

Il sert en second lieu à déterminer une limite inférieure qui est certainement atteinte ou dépassée par les erreurs, et en dessous de laquelle on ne peut, par conséquent, sous peine d'absurdité, fixer le degré de précision des pesées.

Suite des opérations. — Pour appliquer à une substance A le procédé de la quadruple pesée, on doit opérer en même temps sur une seconde substance B, dont on doit connaître également le poids ou qui est uniquement utilisée pour la circonstance.

On pèse d'abord chaque substance isolément. Puis on les pèse ensemble. Enfin on les place séparément dans les deux plateaux de la balance, et on ajoute des poids à la plus légère pour rétablir l'équilibre.

On applique ensuite aux quatre résultats les raisonnements algébriques ci-après.

Calculs algébriques. — Nous exposerons les calculs algébriques sur un exemple concret, mais nous passerons par tous les intermédiaires, de manière qu'il suffira de suivre littéralement nos raisonnements pour les appliquer à n'importe quelle autre quadruple pesée.

Un pharmacien dispose d'une balance dont il croit pouvoir garantir les pesées à six dixièmes de milligramme près. Nous lui avons présenté deux substances et nous lui avons proposé d'effectuer la quadruple pesée de ces substances. Il a fait les opérations sous nos yeux, et trouvé les résultats suivants exprimés en dixièmes de milligramme :

8639 4099 12729 4552.

Désignons par x et y les poids inconnus des deux substances, et par z, u, v, t les erreurs éventuelles, également inconnues, des quatre pesées. Nous avons :

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= 8639 + z \\ y &= 4099 + u \\ x + y &= 12729 + v \\ x - y &= 4552 + t \end{aligned}$$

Supposons provisoirement que l'approximation des pesées soit inconnue et désignons-la par α. Nous avons les inégalités :

$$(2)\quad \begin{array}{l} z < \alpha \\ z > -\alpha \\ u < \alpha \\ u > -\alpha \\ v < \alpha \\ v > -\alpha \\ t < \alpha \\ t > -\alpha \end{array}$$

En remplaçant dans ces inégalités z, u, v et t par leurs valeurs déduites des équations (1), nous obtenons :

$$(3)\quad \begin{array}{r} x - 8639 < \alpha \\ x - 8639 > -\alpha \\ y - 4099 < \alpha \\ y - 4099 > -\alpha \\ x + y - 12729 < \alpha \\ x + y - 12729 > -\alpha \\ x - y - 4552 < \alpha \\ x - y - 4552 > -\alpha . \end{array}$$

Isolons l'inconnue y dans chaque inégalité et groupons ensemble d'une part les expressions inférieures à y, d'autre part les expressions supérieures. Nous trouvons :

$$(4)\left\{ \begin{array}{r} -\alpha + 4099 < y \\ -\alpha - x + 12729 < y \\ -\alpha + x - 4552 < y \end{array} \right. \qquad (5)\left\{ \begin{array}{l} y < \alpha + 4099 \\ y < \alpha - x + 12729 \\ y < \alpha + x - 4552 . \end{array} \right.$$

Chacun des premiers membres du groupe (4) étant inférieur à y est inférieur aussi à chacun des seconds membres du groupe (5). En exprimant ces relations, et en ajoutant les inégalités de la série (3) qui ne contiennent pas y, nous obtenons après suppression des inégalités évidentes telles que

$$-\alpha + 4099 < \alpha + 4099$$

une nouvelle série d'inégalités ne contenant plus y :

$$-\alpha + 4099 < \alpha - x + 12729$$
$$-\alpha + 4099 < \alpha + x - 4552$$
$$-\alpha - x + 12729 < \alpha + 4099$$
$$-\alpha - x + 12729 < \alpha + x - 4552$$
$$-\alpha + x - 4552 < \alpha + 4099$$
$$-\alpha + x - 4552 < \alpha - x + 12729$$
$$x - 8639 < \alpha$$
$$x - 8639 > -\alpha\,.$$

Isolons l'inconnue x dans chacune de ces inégalités, et groupons les résultats ; nous trouvons :

$$(6)\left\{\begin{array}{l} -2\alpha + 8651 < x \\ -2\alpha + 8630 < x \\ -\alpha + 8640{,}5 < x \\ -\alpha + 8639 < x \end{array}\right. \qquad (7)\left\{\begin{array}{l} x < 2\alpha + 8651 \\ x < 2\alpha + 8630 \\ x < \alpha + 8640{,}5 \\ x < \alpha + 8639 \end{array}\right.$$

Puisque $8630 < 8651$, la deuxième inégalité du groupe (6) est une conséquence évidente de la première et peut être supprimée. On peut de même supprimer la quatrième, qui découle de la troisième ; la première du groupe (7), qui résulte de la seconde ; et la troisième qui découle de la dernière.

Il reste ainsi (*) :

$$(8)\left\{\begin{array}{l} -2\alpha + 8651 < x \\ -\alpha + 8640{,}5 < x \end{array}\right. \qquad (9)\left\{\begin{array}{l} x < 2\alpha + 8630 \\ x < \alpha + 8639 \end{array}\right.$$

Chacun des premiers membres du groupe (8) étant inférieur à x, est inférieur à chacun des seconds membres du groupe (9). On a donc les quatre relations

(*) Cette simplification peut ne pas se présenter. Dans ce cas on opère sur les groupes (6) et (7) comme nous opérons sur les groupes (8) et (9).

$$
\begin{aligned}
-2\alpha + 8651 &< 2\alpha + 8630 \quad \text{ou} \quad \alpha > 5{,}25\\
-2\alpha + 8651 &< \alpha + 8639 \quad \text{ou} \quad \alpha > 4{,}00\\
-\alpha + 8640{,}5 &< 2\alpha + 8630 \quad \text{ou} \quad \alpha > 3{,}50\\
-\alpha + 8640{,}5 &< \alpha + 8639 \quad \text{ou} \quad \alpha > 0{,}50
\end{aligned}
$$

qui se résument dans l'inégalité unique

$$(10) \qquad \alpha > 5{,}25$$

En éliminant d'abord x, comme nous avons éliminé y et ainsi de suite, nous trouvons les inégalités suivantes analogues à (8) et (9) :

$$(11) \left\{ \begin{aligned} -2\alpha + 4090 &< y \\ -\alpha + 4099 &< y \end{aligned} \right. \qquad (12) \left\{ \begin{aligned} y &< 2\alpha + 4087 \\ y &< \alpha + 4088{,}5 \end{aligned} \right.$$

Nous trouvons, de plus, comme vérification, l'inégalité (10).

Conclusions. — On voit, par l'inégalité (10), qu'on ne peut donner à l'approximation α des erreurs inconnues z, u, v, t une valeur inférieure à 5,25. L'une au moins de ces erreurs atteint ou surpasse donc 5,25 en valeur absolue, et l'une au moins des quatre pesées est affectée d'une erreur absolue égale à 5,25 dixièmes de milligramme.

Si l'observateur avait attribué à ses pesées une précision plus grande, nous aurions été en droit de lui répondre qu'il se faisait illusion sur l'exactitude de sa balance ou sur ses aptitudes à s'en servir. Comme il renseigne une approximation 6 supérieure à 5,25 nous devons convenir qu'il peut avoir raison. En admettant son renseignement, et en remplaçant α par 6 dans les inégalités (8), (9), (11) et (12) nous arrivons aux conclusions :

$$(13) \qquad 8639 < x < 8642$$
$$(14) \qquad 4093 < y < 4094{,}5.$$

En adoptant pour x la valeur moyenne $\frac{1}{2}(8639 + 8642)$ ou 8640,5 nous sommes certains de ne pas commettre une erreur supérieure à la moitié de l'intervalle (8639, 8642) qui contient x, c'est-à-dire

à 1,5. De même, la valeur 4093,75 de y n'est pas affectée d'une erreur surpassant 0,75.

La méthode de la quadruple pesée a donc permis 1° de trouver au moyen d'une balance dont l'observateur ne répondait pas à plus de 6 dixièmes de milligramme, des résultats exacts à 1,75 et à 0,75; 2° de savoir que la même balance occasionne des erreurs atteignant certainement 5,25.

Comparaison de nos résultats à ceux des moindres carrés. — L'application de la méthode des moindres carrés aux équations (1) donne pour valeurs finales

$$x = 8640$$
$$y = 4092.$$

L'inégalité (14) montre que cette valeur de y est *certainement fausse*.

Deuxième exemple.

Un constructeur nous présente une balance trébuchet et nous assure qu'elle ne donne pas lieu à des erreurs dépassant 1 milligramme. Nous l'invitons à faire une quadruple pesée. Il obtient (*)

$$\begin{aligned} x &= 17686 + z \\ y &= 9042 + u \\ x + y &= 26730 + v \\ x - y &= 8640 + t \end{aligned}$$

(*) On peut simplifier les équations en posant :

$$x = X + 17686$$
$$y = Y + 9042$$

et en calculant X et Y au lieu de x et y.

Les équations deviennent ainsi

$$\begin{aligned} X &= z \\ Y &= u \\ X + Y &= 2 + v \\ X - Y &= -4 + t \end{aligned}$$

Cette simplification peut être appliquée à tous les cas.

En opérant sur ces équations en désignant par α l'approximation des erreurs z, u, v, t nous trouvons 1,5 comme minimum admissible pour α.

Il y a donc au moins une erreur $\geqslant$ 1,5 et le renseignement donné par le vendeur est erroné.

Remarque. — Les nombres qui figurent dans les équations relatives à la quadruple pesée peuvent être obtenus par des pesées simples, mais il vaut évidemment mieux déterminer chacun de ces nombres par la méthode de la double pesée qui consiste, on le sait, à amener d'abord la balance en équilibre chargée d'une part au moyen des substances à peser et d'autre part au moyen de poids ou de matières quelconques, et à remplacer ensuite les substances par des poids.

M. Van der Mensbrugghe présente la communication suivante : *Sur les effets observés dans les liquides soumis à la force centrifuge.*

En 1842 (*), J. Plateau a fait connaître un moyen de faire le vide à l'aide de la force centrifuge. Il s'est servi d'un tube en U dont la partie horizontale avait 38 centimètres de longueur et les deux parties verticales chacune 30 centimètres; le diamètre intérieur était de 5 millimètres environ. Le tube, solidement fixé sur un appareil à force centrifuge, était disposé de manière à le rendre mobile autour d'un axe vertical passant par le milieu de AB; le mercure s'élevait à 8 centimètres dans chacune des branches verticales. En faisant croître graduellement la vitesse de rotation, on arrivait à un moment où le mercure se séparait au milieu de la branche horizontale; ainsi se produisait un espace vide entre les deux colonnes liquides.

En 1898 (**), j'ai tâché de préciser les conditions dans lesquelles s'effectue la séparation du mercure en deux colonnes distinctes. Après quelques essais avec l'appareil même qui avait servi à l'in-

(*) *Sur un moyen de produire le vide à l'aide de la force centrifuge* (BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE, t. IX, août 1842).

(**) *Quelques remarques sur une expérience curieuse de J. Plateau* (ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. XXIII, octobre 1898).

génieux physicien, j'ai constaté que les deux colonnes distinctes apparaissent quand le tube effectue à peu près quatre tours par seconde. Je me suis efforcé de montrer qu'entre deux points matériels placés à égale distance de part et d'autre de l'axe de rotation, il se développe nécessairement une élasticité de traction d'autant plus grande que ces points sont plus distants de l'axe et que la vitesse croît davantage. Or la cohésion du mercure agit absolument comme un système de ressorts reliant toutes les molécules; il s'ensuit que les effets de traction se transmettent de particule à particule, comme le ferait un ensemble de pressions élémentaires.

Cette remarque m'a permis de conclure que la force élastique de traction atteint son maximum immédiatement près de l'axe de rotation. En effet, de deux éléments situés sur une même droite perpendiculaire à l'axe, aux distances respectives r, $r + \Delta r$ à ce dernier, le plus distant subira une force centrifuge plus grande que l'autre; par conséquent le liquide placé dans l'intervalle Δr sera soumis à une tension ou traction. D'autre part, le liquide contenu dans la branche verticale la plus voisine des deux éléments, ne pouvant s'écarter davantage de l'axe, subira donc une compression du même degré que la traction précédente. Or, de même que, en vertu de l'élasticité parfaite des liquides, toutes les pressions de même sens s'ajoutent, de même doivent s'ajouter toutes les forces élémentaires de traction correspondantes.

Il suit de ce raisonnement qu'au voisinage immédiat de l'axe, le mercure est soumis, dans deux sens opposés, à une traction totale égale à la somme de toutes les tractions élémentaires dirigées du même côté de l'appareil; en outre, le liquide contenu dans chaque branche verticale subit une compression égale à la somme des compressions élémentaires produites par la force centrifuge. En supposant que la densité du mercure demeure constante, j'ai pu calculer que si le tube faisait à peu près quatre tours par seconde quand avait lieu la séparation, la traction totale développée par centimètre carré s'élevait à 1,5 kilogramme. Cette valeur correspondait : 1° à la pression de l'atmosphère qui s'exerçait sur le mercure de chaque branche ouverte; 2° à la hauteur du liquide au-dessus de la branche horizontale.

Lorsque j'ai répété l'expérience dont il s'agit, j'ai observé

qu'après la séparation du mercure en deux colonnes, il suffit d'une faible diminution de la vitesse de rotation de l'appareil pour que les colonnes se rejoignent avec le choc caractéristique bien connu ; cela n'est pas étonnant, car tous les filets mercuriels contenus dans la branche horizontale sont tout à fait comparables à des ressorts tendus par la force centrifuge, tandis que ceux des branches verticales sont comprimés ; il résulte de là que si l'élasticité agit avec moins d'intensité, aussitôt la cohésion reprend ses droits.

A l'époque déjà lointaine où J. Plateau a imaginé l'expérience si curieuse que j'ai tenu à rappeler encore, on croyait généralement et peut-être beaucoup de physiciens croient même aujourd'hui qu'un liquide ne peut jamais être soumis à l'élasticité de traction. L'explication précédente montre clairement, je pense, qu'au développement d'une certaine traction correspond une compression du même degré. On conçoit qu'on ne pourrait pas faire abstraction de ces deux effets sous prétexte qu'ils se compensent. Si l'on commettait cette erreur, on ne saurait plus comprendre la vraie cause de la séparation du mercure en deux colonnes distinctes.

A cet égard, je considère l'expérience de J. Plateau comme ayant fourni la première preuve de l'élasticité de traction des liquides, bien que l'auteur n'en eût pas l'intention spéciale. D'autres preuves fondées sur l'emploi de la force centrifuge ont été publiées vers 1877 par le physicien anglais Osborne Reynolds qui a soumis l'eau à une traction d'environ 5 atmosphères et en 1886 par M. A. Worthington qui a pu réaliser une traction de 7,9 atmosphères avec l'alcool et de 11,8 atmosphères avec l'acide sulfurique concentré. Des résultats aussi importants démontrent suffisamment, je pense, les efforts considérables que peut exercer l'élasticité de traction des liquides.

II. Récemment M. de Saintignon (*) a publié un article où il décrit les effets produits par la force centrifuge dans un liquide remplissant complètement une sphère de verre de 20 centimètres

---

(*) *Les Pressions différentielles dans les fluides* (Journal Cosmos, livr. du 3 mars 1906).

de diamètre et contenant en suspension de la poussière de charbon. Quelque temps après avoir imprimé un mouvement rapide de rotation, on aperçoit deux couronnes noires à une latitude d'environ 30° de chaque côté de l'équateur. D'après l'auteur, la force centrifuge est représentée par $\frac{4\pi^2 R \cos\lambda}{T^2}$, où R est le rayon de la sphère, λ la latitude et T la durée d'une révolution; la composante tangentielle de cette force, c'est-à-dire $\frac{4\pi^2 R \sin 2\lambda}{T^2}$ serait constamment croissante des pôles à la latitude de 45°, où elle atteindrait son maximum, et décroîtrait jusqu'à l'équateur où elle serait nulle.

Dans cette hypothèse, il se produirait un mouvement moléculaire des pôles vers l'équateur et un autre de l'équateur vers les pôles; l'auteur n'explique pas pourquoi la rencontre se fait réellement à une latitude de 30° environ.

Le 14 mars 1906 (*), M. E. Lagrange a écrit un article où il déclare avoir répété et modifié les expériences de rotation des fluides tenant en suspension des poussières de densités variées; pour expliquer les résultats obtenus, l'auteur juge nécessaire de tenir compte de l'élasticité propre des liquides. Il trouve que le régime des pressions est donné par la formule

$$p = \frac{2\pi^2 R^2 \cos^2\lambda}{T^2}$$

quand il s'agit de l'équilibre du liquide seul. Si l'on introduit par exemple du charbon de Belloc, l'équilibre des particules charbonneuses sollicitées par une force centrifuge supérieure à celle du liquide, ne peut exister qu'à l'équateur, ou au pôle où il serait instable; au bout de quelque temps apparait une bande équatoriale sombre. M. Lagrange n'a d'ailleurs pu obtenir de bandes fixes ni à 45° ni à 30° de latitude.

Lorsqu'on provoque une diminution plus ou moins brusque de a vitesse de rotation, il se produit aussitôt une détente dans le

(*) *A propos de l'expérience de M. de Saintignon* (Journal Cosmos, livraison du 7 avril 1906).

liquide, laquelle projette des anneaux vers le haut et le bas de la sphère. Le retour s'effectue par suite de la réaction élastique ou bien par une augmentation nouvelle de la vitesse de rotation. L'auteur voit dans ces mouvements une confirmation des idées que j'ai émises depuis plus de dix ans sur le rôle et l'existence de l'élasticité propre du liquide. Par un arrêt brusque de la sphère en rotation, la poussière est projetée dans toute la masse comme par une véritable explosion interne.

III. Dans une des séances de Pâques 1906 de la Société Scientifique de Bruxelles (*), le P. Thirion a annoncé qu'il avait fait à son tour les expériences précédentes; il s'est servi d'un ballon sphérique en verre de 2 litres de capacité (de 15,6 centimètres de diamètre), rempli d'eau pure dans une première série d'expériences, d'eau salée dans une seconde série. Il a opéré successivement avec des poussières de moins en moins denses, depuis la poussière de laiton jusqu'à celle d'aluminium; toujours il a observé dans l'hémisphère inférieur une couronne parallèle à l'équateur; elle reste fixe tant que la vitesse ne change pas, se rapproche de l'équateur sans l'atteindre quand la vitesse augmente, et s'en écarte quand la vitesse diminue. Une variation brusque du mouvement et surtout l'arrêt instantané du ballon détruit la couronne et en projette vivement les débris dans toute la masse du liquide.

Comme l'auteur ne parvenait pas à observer nettement une bande noire dans l'hémisphère supérieur, il a employé les poussières de charbon de Belloc parfaitement mélangées à de l'eau salée; de plus il a fait coïncider l'axe de rotation aussi exactement que possible avec un diamètre de la sphère; pour maintenir la vitesse bien uniforme, il a eu recours à un moteur électrique. A l'aide de ces précautions, et en opérant avec une grande vitesse, il a pu maintenir dans certaines expériences les deux bandes parallèles nettement formées pendant plusieurs minutes, et à moins de 30° du plan de l'équateur. Mais le grand nombre d'insuccès lui a fait soupçonner qu'une cause accidentelle joue là un rôle capital.

(*) *A propos d'une expérience d'hydrostatique* (ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. XXX, 1re partie, 2e section, séance du 24 avril 1906).

Est-il possible, se demande-t-il, de tirer de l'ensemble des faits observés autre chose qu'une application intéressante des principes ordinaires de l'hydrostatique? En conséquence, il cherche l'état d'équilibre d'un liquide pesant de densité ρ, et animé autour d'un axe vertical fixe ascendant Oz d'un mouvement de rotation uniforme, de vitesse angulaire ω. Il trouve que la loi des pressions est donnée en général par la formule

$$p = \rho \left\{ \frac{1}{2} \omega^2 x^2 - gz + c \right\}.$$

Il en déduit que pour une vitesse ω telle que

$$\frac{g}{\omega^2 R} < 1,$$

il y a un parallèle d'équilibre dans l'hémisphère inférieur ; il n'y en a pas dans l'hémisphère supérieur.

L'auteur présente alors des considérations théoriques très simples qui suggèrent l'hypothèse d'une force auxiliaire nécessaire à l'équilibre d'une bande noire dans l'hémisphère supérieur, et fournie par le frottement des particules solides contre les parois du vase. Pour contrôler l'hypothèse de l'intervention du frottement des poussières sur les parois, le P. Thirion a refait ses expériences avec un ballon dont la surface intérieure avait été rendue légèrement rugueuse. Dès lors il a pu obtenir non seulement une bande, mais plusieurs dans l'hémisphère supérieur.

Quant aux phénomènes de projection violente des poussières dans la masse liquide, que provoque toute diminution brusque de la vitesse de rotation, l'auteur les attribue aux déformations élastiques non seulement du liquide, mais encore du vase.

IV. Au mois de juillet dernier (*), M. Ch. Lallemand, à propos des expériences de M. de Saintignon, déclare que la vitesse impri-

---

(*) *Expérience de M. de Saintignon sur les groupements de particules solides en suspension dans une sphère creuse, remplie de liquide et tournant rapidement sur elle-même* (BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ ASTRONOMIQUE DE FRANCE, numéro de Juillet 1906, p. 323).

mée par l'auteur à la sphère était de 800 tours à la minute (soit 13,3 tours par seconde), et que la poudre fine mêlée à l'eau était du charbon de bois de peuplier (densité 1,11) convenablement tamisé (diamètre maximum des grains $0^{mm},09$) ou du sable blanc (densité 2,5) finement tamisé (diamètre maximum des grains 0,25). Dès que le ballon commence à tourner, la masse liquide se trouble, puis elle s'éclaircit vers les pôles, tandis qu'on voit apparaître deux bandes symétriques par rapport à l'équateur à des latitudes sensiblement indépendantes de la vitesse, mais toujours comprises entre 30° et 40°. La boule étant ensuite abandonnée à elle-même de manière que la vitesse n'est plus que de 300 tours par minute, les bandes se séparent, et il se forme un nuage opaque dans la masse.

Tandis que M. de Saintignon attribue le phénomène à des pressions différentielles produites dans la masse en mouvement, M. Lallemand avait pensé pouvoir rattacher le fait aux courants tourbillonnaires causés par le frottement de l'enveloppe et dont l'action ferait équilibre à celle de la force centrifuge.

En définitive, M. Lallemand estime que l'explication la plus simple paraît avoir été donnée par le commandant Guyon, qui voit dans ce phénomène une conséquence des lois du frottement (*).

Dans l'analyse des travaux provoqués par l'expérience de M. de Saintignon, je me suis abstenu à dessein de tout commentaire, de toute critique; car je n'apporte pas moi-même une solution définitive et à l'abri de toute objection. Je me contenterai aujourd'hui de présenter quelques réflexions qui pourront peut-être faciliter la solution complète du problème.

Et d'abord, je suis étonné de ce que les observateurs qui ont répété ou apprécié les expériences du physicien français n'ont guère attaché d'importance à la capacité plus ou moins grande du ballon avec lequel ils ont opéré. Cependant les effets de la force centrifuge sont bien différents suivant que la sphère mise en rotation a 10 centimètres de rayon (4,18 litres de capacité) comme dans les expériences de M. de Saintignon, ou 7,8 centimètres de

---

(*) Comptes rendus de l'Académie des Sciences, séance du 14 mai 1906.

rayon (2 litres de capacité) comme dans celles du P. Thirion. On a vu plus haut que ce dernier observateur a rencontré, malgré toutes les précautions qu'il avait prises, un grand nombre d'insuccès, quand il a voulu réaliser deux bandes noires formées nettement et à des distances à peu près égales de l'équateur.

Pour comprendre la grande différence entre les résultats obtenus, ne faut-il pas invoquer les modifications qu'amène la force centrifuge dans la constitution des diverses parties du liquide? Il est aisé de montrer que le liquide en rotation se divise en deux portions bien distinctes, l'une plus ou moins fortement comprimée contre la surface intérieure du ballon, l'autre soumise à des forces de traction plus ou moins énergiques dans le voisinage de l'axe de rotation. Si l'on néglige l'action de la pesanteur, la pression de l'eau contre la paroi intérieure peut s'exprimer par $p = \frac{\omega^2 R^2 \cos^2 \lambda}{2g}$ d'où l'on déduit une composante normale $\frac{\omega^2 R^2 \cos^3 \lambda}{2g}$ et une autre tangentielle $\frac{\omega^2 R^2 \cos^2 \lambda \sin \lambda}{2g}$. Ces valeurs nous montrent qu'en vertu de la composante normale considérée à part, la compression du liquide sera d'autant plus forte que la vitesse ω est plus grande, que le rayon R de la sphère est plus considérable et qu'on se rapproche davantage de l'équateur.

D'autre part, il ne faut pas oublier que tout autour de l'axe de rotation, le liquide est sollicité par une infinité de tractions de plus en plus marquées à mesure qu'elles agissent plus près de l'équateur. Puisque le ballon est complètement rempli et que le coefficient de compressibilité de l'eau est très petit ($\frac{53}{10^6}$ par atmosphère), le liquide soumis à l'ensemble de toutes ces tractions ne se sépare pas comme dans le cas de l'expérience de J. Plateau ; mais la tendance à la séparation n'en subsiste pas moins; en définitive, la constitution du liquide, au lieu d'être à fort peu près uniforme comme à l'état de repos, est d'autant plus irrégulière que la compression est plus forte dans les couches voisines de la surface intérieure du ballon et que l'élasticité de traction est plus développée dans le voisinage de l'axe. Tout me porte à croire qu'un état si variable dans les diverses régions du liquide contenu dans le ballon entraîne une rupture complète de l'équilibre normal de la masse. N'est-ce pas la

cause principale de l'espèce d'explosion qui se manifeste lorsque, après avoir imprimé une grande vitesse au ballon, on arrête brusquement le mouvement de rotation? A la vérité il convient d'ajouter encore une autre cause aux mouvements tumultueux de la masse, à savoir l'élasticité du verre servant d'enveloppe. Comme l'a déjà fait remarquer le P. Thirion, il serait difficile de faire la part des deux causes indiquées plus haut. Toutefois on peut calculer à peu près l'effort à exercer, près de l'équateur, par le verre contre l'eau par centimètre carré par exemple; cet effort est égal à $\frac{1}{2}\frac{1}{g}\omega^2 R^2$. Pour $R = 10^c$ et $\omega = \frac{2\pi}{\frac{1''}{10}} = 20\pi$ (10 tours par seconde), on trouve 200 grammes. Sauf erreur, la bande équatoriale de 2 centimètres de largeur subirait ainsi une pression de 25 kilogrammes environ. La détente du liquide soumis à un pareil effort suffit amplement, je pense, pour expliquer les effets observés lors du brusque arrêt du mouvement.

Jusqu'à présent, j'ai négligé l'action de la pesanteur. Ne peut-on pas faire remarquer, à cet égard, que dans les expériences classiques concernant la force centrifuge, l'effet de la pesanteur se manifeste d'autant moins que la vitesse de rotation augmente davantage? Faut-il citer ici l'expérience de la chaîne de montre dont on a noué les deux bouts et qu'on a attachée ensuite à une ficelle que l'on tord à partir du moment où les deux moitiés de la chaîne sont verticales? Plus on prolonge le degré croissant de la torsion, plus les deux parties de la chaîne se soulèvent et finissent par dessiner une bande circulaire complète et sensiblement horizontale. Si M. de Saintignon a réalisé sans peine deux bandes à des distances à peu près égales de l'équateur, c'est précisément, je pense, grâce à la grande capacité du ballon tournant et à la vitesse considérable de l'appareil (800 tours à la minute, soit 13,3 tours par seconde). Au surplus, l'influence peu sensible de la pesanteur est nettement accusée par la comparaison des valeurs numériques des termes relatifs à la force centrifuge d'une part et à la pesanteur de l'autre.

Quelle est donc la force qui, du moment où la vitesse devient assez grande, empêche les poussières solides de se ranger ou de rester le plus loin possible de l'axe de rotation et d'occuper ainsi

des points distribués sur une bande équatoriale? Ce ne peut être la pesanteur, puisque son influence devient de plus en plus faible quand la vitesse augmente et que d'ailleurs l'une des bandes observées se trouve au-dessus de l'équateur. C'est sans doute pour ce motif qu'un chercheur, M. le commandant Guyon, a invoqué et appliqué les lois du frottement pour expliquer les phénomènes décrits plus haut. Mais sans vouloir nier absolument le concours de cette force, je ne puis admettre qu'elle exerce une action importante, sauf quand la surface intérieure du ballon n'est pas complètement lisse; dans ce dernier cas, le P. Thirion a pu constater effectivement l'apparition de plusieurs bandes à différentes hauteurs dans l'hémisphère supérieur. Ce qui m'empêche de croire à l'efficacité du frottement dans le cas général, c'est que dans les fleuves à courant rapide, les corps solides du fond sont toujours rejetés non dans les parties concaves des coudes où l'eau est fortement comprimée, mais plus loin vers la gauche du courant et dans les parties droites ou convexes. Au surplus, puisque le frottement est proportionnel à la pression, pourquoi les poussières solides ne se maintiennent-elles pas dans le voisinage de l'équateur, où l'effort contre la paroi est le plus marqué?

A cet égard, ne peut-on pas faire le raisonnement suivant? Comme nous l'avons vu plus haut, la pression contre un élément de la surface intérieure du ballon peut se décomposer en deux autres, l'une normale $\frac{1}{2g}\omega^2 R^2 \cos^3\lambda$, l'autre tangentielle $\frac{1}{2g}\omega^2 R^2 \cos^2\lambda \sin\lambda$; or rappelons-nous que la pression exercée par un liquide normalement à une paroi se transmet dans tous les sens et notamment dans le sens tangentiel; de plus, comme l'a fait remarquer Savart à propos de ses expériences célèbres sur les veines liquides, cette transmission se fait sans perte sensible de force vive. Par conséquent si nous nous dirigeons, par la pensée, de l'équateur vers le pôle supérieur, il y a lieu de comparer pour chaque élément considéré du plan méridien, la composante tangentielle de la force centrifuge à la pression provenant de la composante normale. Or il est aisé de voir que, pour toutes les valeurs de λ comprises entre 0 et 45°, la valeur $\frac{1}{2}g\,\omega^2 R^2 \cos^3\lambda$ est plus grande que $\frac{1}{2}g\,\omega' R^2 \cos^2\lambda \sin\lambda$; il s'ensuit qu'entre 0° et 45°, les éléments

liquides seront sollicités par des efforts dirigés de l'équateur vers le pôle. Au contraire, pour les valeurs de λ comprises entre 45° et 90°, les composantes tangentielles l'emportent toutes sur les pressions dues aux composantes normales, et doivent tendre à faire mouvoir le liquide de la région correspondante, du pôle vers l'équateur. Seulement, la pression due à la force centrifuge est proportionnelle au facteur $\cos^2 \lambda$; or, entre 0 et 45° ce facteur varie de 1 à $\frac{1}{2}$, tandis que, entre 45° et 90° il varie de $\frac{1}{2}$ à 0; d'où l'on voit que s'il y a des poussières de charbon dans le voisinage de l'équateur, elles doivent être entraînées à une certaine distance de l'équateur, distance qui varie non seulement avec la vitesse angulaire de rotation ω, mais encore avec le rayon R de la sphère tournante. Lorsque la vitesse est devenue assez grande pour que l'on voie apparaître deux bandes noires à des distances sensiblement égales de l'équateur, on comprend le rapprochement mutuel de ces bandes quand on fait croître la vitesse; car l'accroissement de ω porte sur un bien plus grand nombre de points sur chaque méridien.

Les considérations qui précèdent ne fournissent pas la solution complète du problème; toutefois je pense qu'elles suffiront peut-être pour montrer qu'il s'agit ici bien plutôt d'une question d'hydrodynamique que d'une simple question d'hydrostatique.

Mercredi 10 avril. — Les membres de la section visitent les installations de l'observatoire royal d'Uccle. Le compte rendu de cette visite sera publié plus tard.

Jeudi 11 avril. — M. le Chanoine De Muynck transmet à la section les deux communications suivantes :

I. — *Sur un phénomène présenté par le platine.* — Au cours d'expériences sur les explosions d'un mélange d'H et d'O se produisit un phénomène d'un caractère particulier dans les conditions suivantes :

Deux gros fils de platine (diamètre 1,5 millimètre), isolés, traversaient le bouchon en caoutchouc qui fermait un tube d'aluminium (diamètre 25 millimètres, longueur 110 millimètres). Les deux fils étaient placés ainsi à l'intérieur du tube, parallèles entre

eux et à l'axe de celui-ci, leur longueur à l'intérieur étant respectivement de 5 et 2 centimètres. L'autre extrémité du cylindre d'aluminium était fermée par un second bouchon perforé, par lequel on pouvait soit introduire dans le tube un mélange détonant d'H et d'O, soit provoquer l'explosion de celui-ci.

Les fils étaient restés ainsi pendant plusieurs jours tantôt dans un vide partiel, tantôt dans une atmosphère soit d'air ordinaire, soit d'H et d'O (avec une forte proportion d'ozone), tantôt dans la flamme explosive elle-même.

On constatait, en unissant les fils aux deux paires de quadrants d'un électromètre de Dolezalek isolé à l'ambroïde, dont l'aiguille était chargée à 80 volts environ, une différence de potentiel entre ces deux fils, variable de sens et d'intensité d'après le régime auquel les fils avaient été soumis, mais de toute façon relativement faible, ne dépassant pas généralement 0,04 volt.

Or, si on reliait, ne fût-ce que pendant quelques secondes, un des fils de platine, l'autre restant isolé, à l'un ou l'autre pôle d'une pile de charge d'électromètre, à un ou plusieurs accumulateurs, on observait, en recommençant la mesure au Dolezalek, que le fil qui avait été uni à la source d'électricité provoquait une forte déviation de l'aiguille, absolument comme s'il avait pris le signe + ou — du pôle avec lequel il avait été mis en communication.

Cette déviation de l'électromètre était d'autant plus grande que la communication avec la source d'électricité avait été plus prolongée : par exemple une communication d'une minute avec une pile de charge de 80 volts produisait une déviation équivalente à une différence de potentiel entre les fils de 0,4 volt environ.

Cette déviation n'est pas due à une charge statique des fils, car elle persiste après que ceux-ci ont été mis en court circuit et au sol pendant plusieurs secondes.

Elle diminue lentement alors même que les fils sont mis aux quadrants de l'électromètre seuls, et s'annule au bout d'un temps qui varie avec la grandeur de la déviation primitive et va de quelques minutes à plusieurs heures. Si c'est le fil long qui a été relié à la pile de charge, on constate que la déviation baisse beaucoup plus lentement qu'avec le fil court. On voit dans certains cas la croisée du réticule traverser le zéro de l'échelle et la déviation se renverser. Cela se présente notamment quand une

communication peu longue du fil de platine à un des pôles de la pile, par exemple au pôle positif, a été précédée immédiatement d'une communication prolongée au pôle négatif; la déviation, accusant d'abord un signe positif, s'annule bientôt, et devient négative.

Enfin, l'atmosphère qui entoure le platine exerce une influence sur cet état électrique : la déviation augmente, diminue, se renverse d'une façon en apparence irrégulière d'après qu'on fait le vide dans le tube d'aluminium, qu'on y fait passer de l'air, ou surtout le mélange d'H, d'O et d'ozone.

Tous ces phénomènes ne se présentèrent que tant que le bouchon portant les fils de platine fut à l'intérieur du cylindre d'aluminium. Retirés de celui-ci, mais maintenus isolés dans le bouchon, et essayés aussitôt, ils manifestèrent en principe le même phénomène, mais les diminutions et renversements de la déviation étaient notablement plus rapides; après six heures de séjour à l'extérieur du cylindre on ne put retrouver que les effets ordinaires des charges statiques communiquées aux fils : ceux-ci étaient revenus à leur état normal.

Le phénomène qu'on vient de décrire est complexe et difficile à analyser.

S'il faut lui chercher une explication physique, on serait tenté de le rapprocher du fait découvert par Elster et Geitel (*), « qu'un fil exposé à l'air et électrisé négativement acquiert et conserve pendant quelque temps la propriété d'ioniser le milieu ambiant, » mais il en diffère, comme on le voit aisément, par plusieurs circonstances.

D'autre part, et ceci le recommande à l'attention, il est peut-être lié aux phénomènes très intéressants décrits récemment par Borgmann (**), concernant l'ionisation de l'air enfermé dans un cylindre métallique mis au sol. Dans une de ses expériences, dont le dispositif se rapproche beaucoup de celui décrit plus haut, Borgmann trouve « qu'un cylindre de plomb dans un cylindre en laiton pendant plusieurs jours produit sur la surface de ce dernier une radio-activité induite de courte durée (quelques minutes) ».

(*) PHYSIK. ZEITSCHR., p. 196, 1901.

(**) JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ PHYSICO-CHIMIQUE RUSSE, *36*, p. 183, 1904; *37*, p. 63, 1905.

Existe-t-il une analogie entre ce phénomène et ceux décrits plus haut? Une étude expérimentale plus serrée permettrait peut-être de répondre à cette question. Cette étude n'a pas été entreprise à cause de la quasi impossibilité de mesures quantitatives et de difficultés d'ordre expérimental qui rendent ces expériences particulièrement pénibles. Tout incomplets qu'ils soient, ces résultats semblent cependant mériter d'être signalés, ne fût-ce que pour appeler l'attention sur l'importance que peuvent avoir, dans le genre de phénomènes étudiés par Borgmann et d'autres, l'atmosphère gazeuse où les conducteurs sont placés, et la charge électrique de ces conducteurs.

II. — *Conductibilité électrique de la flamme explosive de* CO. — Un mélange, en proportions voulues, de deux gaz qui peuvent se combiner par explosion, présente-t-il, au moment de l'explosion, une conductibilité électrique?

A priori, on peut prévoir que la réponse à cette question sera affirmative, car l'onde explosive étant une flamme de courte durée, à une température élevée, doit comme telle conduire l'électricité.

Une expérience facile confirme cette prévision pour le mélange détonant d'H et d'O. Mais, comme dans cette explosion il y a formation d'eau, on pourrait à la rigueur attribuer à cette circonstance une partie sinon toute la conductibilité de la flamme, ou tout au moins soupçonner que les caractères de la conductibilité de la flamme explosive y sont altérés. C'est pour ce motif qu'on étudia les explosions sans formation d'eau, notamment celle d'un mélange de CO et d'O.

M. de Hemptinne (*) constata que l'explosion de ce mélange conduit l'électricité, et ce résultat fut confirmé par Braun (**), mais ces auteurs ne poussèrent pas plus loin l'étude du phénomène.

Nous avons réussi à trouver quelques caractères de cette explosion, dans un travail dont nous donnons sommairement le dispositif et les premiers résultats.

Dispositif. — L'explosion était produite dans un tube en cuivre (longueur : 24 cm., diamètre intér. : 19 mm.) doré intérieure-

---

(*) Zeitschr. f. physik. Chemie *12*, p. 264, 1893.
(**) Ibid. p. 158, 1894.

ment. Un fil en cuivre doré (diam. 4,4 mm.) occupait sensiblement l'axe de ce cylindre et constituait une électrode, l'autre étant constituée par le tube en cuivre lui-même. La source d'électricité était une ou plusieurs piles de charge d'électromètre; un galvanomètre Deprez-d'Arsonval (type Siemens) indiquait le courant. Le mélange gazeux était conservé dans une grande cloche en verre, plongeant dans l'acide sulfurique concentré.

Résultats. — En l'absence de toute pile, le fil et le tube étant reliés directement au galvanomètre, donnent, quand l'explosion se produit, une légère déviation de 15 millimètres de l'échelle, indiquant un courant allant du fil à travers le galvanomètre vers le tube.

Si on interpose alors la pile de charge, on constate à chaque explosion des déviations qui peuvent atteindre 600 millimètres et indiquent nettement une conductibilité de la flamme explosive.

Les expériences furent faites à diverses pressions, avec des mélanges de CO et d'air, de CO et d'O en diverses proportions.

1° *Unipolarité.* — Dans toutes les expériences on a constaté que la déviation était plus grande quand le fil intérieur était relié au pôle +, le tube en cuivre au pôle — de la pile. L'écart entre les deux déviations est considérable, l'une est généralement à peu près deux fois aussi grande que l'autre. Ainsi, avec une certaine proportion d'O et CO on trouve :

Fil — 380 mm.
» + 620 »

2° *Influence de la composition du mélange.* — La déviation varie avec la composition du mélange; elle a été la plus grande avec le mélange 2 vol. CO pour 1 vol. O, dont un échantillon donna :

Fil — 360 mm.
» + 580 »

alors que dans les mêmes conditions un mélange à égal vol. O et CO, et à vol. O supérieur à celui de CO, donna des valeurs à peu près dix fois moindres.

Un mélange de 1 vol. CO avec 5 vol. d'air donna des valeurs intermédiaires :

Fil — 76 mm.
» + 199 »

3° *Influence du voltage.* — Si la force électromotrice appliquée aux deux électrodes augmente, on voit la déviation monter à peu près proportionnellement tant pour le fil — que pour le fil +. Un courant de saturation n'a pas été obtenu, quoique la force électromotrice ait été portée à 240 volts environ.

4° *Influence de la siccité et de l'homogénéité du mélange.* — Un séjour prolongé dans la cloche à acide sulfurique n'a pas d'influence notable sur la conductibilité.

5° *Influence de la température.* — A plusieurs reprises on constata qu'un échauffement même léger (35°) du tube augmente notablement la conductibilité. Mais cet effet semble se produire surtout lorsque le mélange n'est pas encore très homogène et ne relève probablement que d'une diffusion plus intime des deux gaz.

6° *Influence de la pression.* — Une augmentation de pression entraîne une augmentation de conductibilité.

Un résultat très intéressant consisterait à rechercher si la production de molécules de CO_2 par la combinaison de CO et d'O se fait avec production d'un nombre comparable d'ions. Des expériences ont été tentées dans cette direction, mais elles ne sont pas encore assez avancées pour qu'on puisse en dégager des conclusions certaines.

Le P. Schaffers fait une communication sur *la loi de Coulomb*. Ce travail a paru *in extenso* dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, livraison d'avril 1907.

Troisième section

—

Mardi 9 avril. — Sur la proposition des rapporteurs, M. F. Meunier et le R. P. Bolsius, la section vote l'impression dans la seconde partie des ANNALES de deux mémoires de M. l'abbé Kieffer : 1° *Nou-*

veaux Proctotrypides d'Amérique recueillis par M. Backer et décrits par l'abbé Kieffer; — 2° Revision des Scelionidæ (Hyménoptères).

M. De Wildeman fait une communication sur les caféiers africains. Il insiste sur l'importance acquise dans ces dernières années par le café. Il fait ressortir une fois de plus que, contrairement à ce que l'on croit encore généralement dans beaucoup de milieux, le caféier n'est pas originaire de l'Arabie, mais de l'Afrique.

On ne connaît guère actuellement à l'état indigène le caféier dit d'Arabie, mais il ne serait pas impossible que cette essence fût issue d'une des nombreuses formes que les botanistes ont réunies sous le nom de *C. canephora* Pierre, et que l'on rencontre à l'état sauvage dans les forêts du Congo.

Il fait voir ensuite par des chiffres la valeur culturale de ces races de l'Afrique tropicale, qui, cultivées aux Indes néerlandaises, se sont montrées, comparativement aux caféiers de diverses provenances, beaucoup plus productives, leur production atteignant, pour des plants jeunes, plus de 1 kilo par an. La valeur de la culture se fait particulièrement sentir, quand on emploie pour porte-greffe des semis de caféiers africains : le rendement des greffes est alors beaucoup plus considérable que quand elles sont placées sur pied d'origine culturale.

L'introduction dans les cultures des caféiers du centre de l'Afrique amènera probablement des changements notables dans la direction du marché.

Le R. P. Bolsius entretient la section de l'enquête qu'il a faite, en janvier dernier, au sujet de la guérison de Pierre De Rudder, de Jabbeke. Il met en garde contre une confusion possible entre De Rudder et Deruyter, autre habitant de la même commune, victime d'un accident analogue, mais dont l'issue a été toute différente, en 1873-74.

Mercredi 10 avril. — La section procède au renouvellement de son bureau. Sont élus :

Présidents d'honneur : MM. A. DE LAPPARENT,
A. DUMONT.
Président : l'abbé KIEFFER.
Vice-Présidents : le R. P. SCHMITZ, S. J.
F. MEUNIER.
Secrétaire : F. VAN ORTROY.

M. Renier fait une communication sur *les Cartes agrogéologiques actuelles*. En voici un résumé (*) :

« C'est vers 1870 que s'est posée pour la première fois la question des cartes agrogéologiques. A vrai dire, les géologues s'étaient déjà préoccupés, bien avant cette date, de faire bénéficier l'agriculture de la connaissance approfondie du sol qui résulte du levé géologique. C'est ainsi que, fait parfois oublié, André Dumont ne se contenta pas de publier une carte du sous-sol de la Belgique à l'échelle du 1 : 160 000, mais qu'il voulut encore y joindre une carte du sol, dressée à la même échelle.

Lors de la fondation du Service géologique de la Prusse, en 1873, on décida que la carte géologique détaillée que ce nouvel organisme avait pour mission de dresser renfermerait pour le plat pays des indications agronomiques aussi complètes que possible. Cinq années furent consacrées aux études préliminaires, car on ne possédait comme données antérieures que celles fournies par les recherches de Staring. Finalement, on s'arrêta à une méthode encore en honneur aujourd'hui. La plupart des autres services allemands ont suivi plus ou moins exactement l'exemple du service prussien et ont développé le côté agrogéologique de leurs études. De tous les autres services géologiques d'Europe centrale, celui de Budapest a été jusqu'ici le seul à posséder une section agronomique.

Il importe de remarquer dès l'abord qu'il ne s'agit pas ici de travaux agronomiques proprement dits. Dans la conception actuelle, les cartes agrogéologiques sont avant tout des cartes géo-

(*) Le lecteur trouvera des renseignements plus complets dans le rapport de M. Renier sur l'*État actuel des recherches géologiques exécutées en Europe centrale sous le patronage officiel*, ANN. DES MINES DE BELGIQUE, 1906-07, t. XI, 2e livraison, p. 271-310 ; 3e liv., p. 693-719. T. XII, 1re liv., p. 119-156.

logiques qui indiquent pétrographiquement la nature chimique du terrain et jusqu'à un certain point son état physique.

En outre, les cartes publiées, bien que très détaillées, sont à une échelle relativement réduite : 1 : 25 000 en Prusse, en Saxe, en Alsace-Lorraine et dans les grands-duchés de Hesse et de Bade; 1 : 75 000 en Hongrie. Il faut évidemment savoir se limiter, car semblable entreprise réclame déjà une dépense considérable; l'adoption d'une échelle plus grande qui serait souvent hors de proportion avec l'approximation du levé augmenterait cette dépense dans des proportions exagérées, puisqu'elle entraînerait l'établissement préalable d'un canevas topographique. L'État a-t-il d'ailleurs mission d'éclairer tous ses citoyens sur la valeur exacte de leurs terres, ou ne doit-il pas plutôt se borner à provoquer et à encourager l'initiative privée, source féconde de succès?

Le service prussien a, dans cette idée, institué un service spécial pour le levé agrogéologique des domaines, sur la base de tarifs très modiques. Ce n'est toutefois que dans des cas bien spéciaux que ces levés particuliers se font à une échelle plus grande que le 1 : 25 000. D'autres services géologiques, notamment ceux de Darmstadt et de Budapest, en agissent de même.

Ainsi que je viens de le dire, les cartes agrogéologiques sont, dans la conception actuelle, des cartes géologiques particulièrement détaillées au point de vue pétrographique. On n'y trouve aucune indication sur le genre ou le mode de culture, et si l'on y signale l'existence d'engrais naturels, c'est sans préciser l'emploi qui pourrait en être fait. Bref, ces cartes sont destinées à servir de base aux travaux des agronomes, mais n'ont pas pour but de renseigner l'agriculteur ou le propriétaire sur l'exploitation agricole ou forestière proprement dite.

Ces cartes sont établies d'après des principes assez divergents. En aucun cas, elles ne renseignent la profondeur de la nappe aquifère parce que, suivant les uns, ce niveau est sujet à de trop nombreuses variations pour pouvoir être aisément cartographié, ou encore, suivant d'autres, parce que les sondages exécutés pour la confection de la carte n'atteignent que rarement la nappe aquifère.

C'est l'étude du sol de la Prusse qui est la plus complète, puisque en suite d'un vœu du Landesœkonomic Collegium (24 janvier 1879) la carte agrogéologique y représente la composition du sol sur une

tranche de 2 mètres d'épaisseur, dans le cas de terrains meubles; partout ailleurs la profondeur de la zone explorée par sondages est beaucoup moindre : 1^{m},20 à 2 mètres dans le grand-duché de Hesse; 1^{m},20 à 1^{m},50 en Saxe; 1 mètre à 1^{m},25 dans le grand-duché de Bade. En Alsace-Lorraine, on n'exécute pas de sondages, mais on utilise toutes les coupes naturelles ou artificielles, de telle sorte qu'on peut très logiquement rapprocher ces cartes de celle publiée sous le nom de *Drift* par le Geological Survey de la Grande-Bretagne et qui n'est en définitive qu'une carte très détaillée (1 : 53 360) indiquant la nature superficielle du sol.

La figuration adoptée pour l'établissement des cartes est, elle aussi, très variable et souvent compliquée (*).

La représentation en plan est complétée par des coupes, des diagrammes et, en outre, par un texte explicatif, parfois très développé.

En Prusse, les documents originaux du levé, cartes et carnets de sondage, sont en outre tenus à la disposition des propriétaires intéressés.

Malgré les critiques qu'on peut leur adresser, ces cartes agrogéologiques paraissent être particulièrement appréciées en Prusse et spécialement dans l'Allemagne du Nord, puisque, malgré les dépenses considérables qu'elles comportent, le Landtag a réclamé à diverses reprises une extension plus rapide de ces études dans tout le pays. »

Cette communication est suivie d'un échange de vues auquel prennent part MM. de Limburg-Stirum, de Wildeman, de Maupeou et le R. P. Schmitz.

M. Th. Gollier entretient la section de la simplification de l'écriture japonaise.

La section met au concours la question suivante : *On demande de nouvelles recherches sur les caoutchoucs africains.*

(*) Cf., op. cit., chapitre VI.

Jeudi 11 avril. — Le secrétaire présente, au nom de M. le Chanoine Bourgeat, une note sur *les fossiles de petite taille.* Elle paraîtra dans la seconde partie des ANNALES.

M. Fernand Meunier montre une nouvelle blattide du houiller de Commentry et annonce qu'il va entreprendre le classement de ces nomoneures dont l'étude, pour aboutir à des



Dictyomylacris Jacobsi, nov. sp., Stéphanien de Commentry.

résultats sérieux, doit être basée sur un grand nombre d'individus. Il parle des blattides des gisements américains récemment revisées par M. A. Handlirsch, du Museum de Vienne. Avec ce savant paléontologiste, il admet le démembrement du groupe des Étoblattina de Scudder, qui renfermait beaucoup d'espèces hétérogènes, mais il considère que cet auteur a établi trop de nouvelles coupes génériques.

On ne connaît encore que de rares espèces de blattides de Commentry décrites par feu Charles Brongniaux et par Agnus (*).

Le nouveau nomoneure que notre collègue propose de nommer **Dictyomylacris Jacobsi,** en l'honneur du très distingué diptériste feu Jean Jacobs, a des traits de ressemblance avec Mylacris antiqua Scudder que M. A. Handlirsch range actuellement avec les Orthomylacris. Par les nervures du champ de l'élytre, cet articulé se distingue des Dictyomylacris Poiraulti et insignis. M. Handlirsch forme pour les Dictyomylacris la famille des Dictyomylacridae. M. Fernand Meunier estime qu'il faut examiner très minutieusement les richissimes documents de Commentry avant d'admettre ou de réfuter cette nouvelle manière de voir. Pour finir, il montre une photographie et un dessin restauré de ce superbe nomoneure qu'il groupe parmi les Mylacridae de Scudder.

M. l'abbé Kieffer et le R. P. Deschamps sont nommés rapporteurs pour les travaux suivants, présentés par M. F. Meunier : 1° *Contribution à la faune diptérologique des environs d'Anvers* (IIe partie); — 2° *Sur quelques diptères* (Muscinae, Ortalinae, Helomyzinae) *du Copal récent de Zanzibar;* — 3° *Sur quelques diptères* (Xylophagidae, Therevidae, Arthropidae, etc.) *de l'ambre de la Baltique*, faisant partie de la collection du prof. Dr R. Klebs.

Le R. P. Schmitz fait une communication verbale sur *les Éolithes.*

Le secrétaire présente, au nom de M. le prof. Fabre, un travail intitulé *La Mouche bleue de la viande.* Il paraîtra dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES.

(*) M. F. Meunier a aussi donné la diagnose d'un Etoblattina du houiller de Fontannes (Gard), BULL. DE LA SOC. ENT. DE FRANCE 1906.

Quatrième section

—

Mercredi 10 avril 1907. — La séance s'ouvre à 4 heures et demie, à l'issue de l'assemblée générale, sous la présidence de M. le Dr Matagne, président.

La parole est donnée à M. le Dr X. Francotte, Professeur à l'Université de Liége, pour donner lecture d'un rapport sur *Quelques points de morale sexuelle dans ses rapports avec la médecine*. Ce rapport sera publié *in extenso*, avec la courte discussion qui l'a suivi, en un supplément au tome XXXI des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE.

M. le Dr Francotte a abordé, dans cette étude, la question de la « continence avant le mariage », de la « continence imposée au prêtre et au religieux », et de certaines graves infractions à la loi morale que l'on a voulu légitimer parfois, au nom d'une thérapeutique et d'une hygiène intéressées et sans fondement. Il s'est élevé avec vigueur contre de monstrueuses théories, produits de l'anarchie qui règne dans le domaine des idées morales de notre temps, et il a fort bien montré que les lois fondées sur la vieille morale chrétienne et placées sous la sauvegarde de l'Église catholique ne sont nullement en opposition — bien au contraire — avec les données d'une saine physiologie et avec les intérêts de la santé individuelle et sociale.

M. le prof. Mansion, le R. P. Vermeersch et le Dr Warlomont ont, ensuite, présenté quelques observations appuyant les conclusions du rapporteur.

M. le Dr D'halluin, chef des travaux de Physiologie à la Faculté libre de Médecine de Lille, fait ensuite une communication sur l'*Action nocive des tractions rythmées de la langue*.

Les tractions rythmées de la langue qui, dans certains cas, semblent favoriser le rappel à la vie, sont aussi susceptibles de déterminer la mort. Il est possible, par ce moyen, de tuer un chien profondément chloralisé, et dans les cas où la mort ne se produit pas, on observe souvent du côté de la respiration, du rythme car-

diaque, et de la pression artérielle, des troubles parfois très accusés, que l'auteur a fixés sur de nombreux graphiques.

La note de M. le Dr Maurice D'halluin paraîtra *in extenso* dans la seconde partie des ANNALES.

Vu l'heure avancée, les communications de M. le Dr Morelle ont dû être ajournées à la prochaine réunion. Elles avaient pour titres : a) *Pathogénie de la tuberculose urinaire;* b) *état actuel de la question de l'analgésie rachidienne;* c) *sur le traitement du lupus par la méthode de Finssen.*

La séance a été levée après la réélection de l'ancien bureau de la section.

Cinquième section

—

La section a poursuivi l'enquête monographique concernant la fonction économique des ports.

Mardi 9 avril 1907. — Le R. P. Jean Charles, professeur à l'Institut Saint-Ignace, à Anvers, a présenté la monographie du port de Rotterdam. Elle paraîtra *in extenso* dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES; en voici le résumé :

Des ports de l'Europe septentrionale, Rotterdam est le plus jeune, et celui dont les *progrès* ont été le plus rapides. En 1890, le mouvement du port atteignait 2 900 000 tonnes et, en 1906, 9 387 000 tonnes. Le nombre des navires passe, pendant la même période, de 4535 à 9160. En 1850, la part de Rotterdam, dans le mouvement maritime du royaume évalué en tonnes, était de 35 p. c.; en 1905 elle est montée à 71 p. c. En 1830, la population de Rotterdam était de 72 000 habitants; en 1905, de 380 000 habitants.

La voie d'accès du côté de la mer présente depuis l'achèvement des travaux au Hoek van Holland une profondeur de 10m40 à l'embouchure, de 9 mètres à Rotterdam à marée haute. Ces travaux ont coûté 36 300 000 florins et l'entretien du Nieuwe Waterweg exige annuellement 450 000 florins. Les ingénieurs ont ainsi rendu à Rotterdam son ancienne voie maritime, la plus courte et

la meilleure : il faut actuellement aux navires deux ou trois heures pour atteindre les bassins du port, alors qu'en 1880 il leur fallait dix-huit heures et même cinq et sept jours en cas de mauvais temps.

Les travaux de régularisation du Rhin entrepris par les ingénieurs allemands n'ont pas moins contribué à l'essor de Rotterdam. Des allèges de 2300 tonnes descendent le Rhin depuis Ruhrort; des chalands de 1500 tonnes le remontent jusqu'à Mannheim, et depuis trois ans de puissants remorqueurs amènent les bateaux fluviaux jusqu'à Bâle. De Strasbourg au Nieuwe Waterweg s'ouvre un magnifique chenal de 700 kilomètres, le long duquel sont échelonnés environ soixante-dix ports; aussi Rotterdam constitue le port naturel de tout l'hinterland formé par les provinces rhénanes, le Palatinat et le grand-duché de Bade.

Malgré la lutte acharnée des chemins de fer, malgré les « Seeausnahmetarife », les « Anschlusstarife » et les tarifs directs, les grands chalands du Rhin ont des cargaisons moins uniformes que les péniches des canaux français : ils transportent « Massengüter » et « Stückgüter ».

L'aménagement général du port de Rotterdam présente des conditions spéciales, qui résultent surtout de la nature de son trafic de transbordement. De là nécessité d'une surface de bassins très étendue : leur superficie atteint 175 hectares, sans compter le fleuve qui forme, à lui seul, comme un grand port devant la ville. Une suite de ducs d'Albe permet d'y amarrer trente-trois ou trente-six navires de mer. Les chalands se rangent à bâbord et à tribord, et, par de simples glissières ou des élévateurs, minerais, céréales, graines passent de la cale du transatlantique dans celle du Rheinschiff.

Rotterdam est surtout un port *importateur*. En 1905 les importations ont atteint 14 300 000 tonnes en poids et les exportations n'ont pas dépassé 2 500 000 tonnes. A destination de son hinterland national, il importe surtout des céréales et du café, des corps gras et des graines oléagineuses. Si pour les céréales la fonction de Rotterdam est purement régionale, pour le café, au contraire, Rotterdam, comme Hambourg et Le Havre, voit sa fonction commerciale grandir chaque année.

Depuis des centaines d'années la fabrication de l'huile de lin et

de colza a son siège dans les provinces du nord et du sud de la Hollande. Presque toutes les graines oléagineuses viennent de l'étranger par l'intermédiaire de Rotterdam. Ce port est aussi le principal marché de l'Europe pour la margarine : de là les importations de graines de coton, de saindoux, d'huile d'arachide, d'huile de coco, de sésame. La fonction de Rotterdam est ici régionale et industrielle.

C'est surtout l'hinterland étranger de Rotterdam qui alimente le commerce d'importation. En 1904, en effet, Rotterdam a exporté :

Par mer	2 450 000	tonnes.
Par terre	10 800	»
Par voie fluviale . . .	8 950 000	»

Ce trafic comprend avant tout les minerais, les céréales, les bois, le pétrole, le nitrate, les graines, les laines, etc.

Il y a quelques années encore, Rotterdam ne présentait que fort peu de *fret à la sortie.* Si la situation s'est améliorée, Anvers cependant dépasse encore de loin le port hollandais. En outre, les marchandises lourdes indispensables à la bonne économie des cargaisons sont rares et l'Allemagne seule peut les fournir. Grand port maritime plusieurs années avant Rotterdam, Anvers a depuis longtemps la clientèle des compagnies de navigation et pour se développer Rotterdam doit détourner un courant commercial de vieille date.

En somme, Rotterdam n'est-il pas un port *allemand?*

Ce sont les travaux d'ingénieurs allemands qui ont régularisé et approfondi le Rhin; ce sont les commerçants, les industriels, les armateurs allemands qui sont ses meilleurs clients. Les deux tiers de l'importation vont en Allemagne et le pavillon allemand se place au deuxième rang, immédiatement après le pavillon britannique!

L'an dernier déjà M. Blondel avait apporté sa précieuse collaboration à l'œuvre entreprise par la Société Scientifique : il avait tracé un parallèle fort instructif de la vie des ports en Allemagne et en France.

Il a bien voulu revenir cette année à Bruxelles, et à l'assemblée générale de l'après-midi il a parlé du *port de Marseille,* qu'on peut

définir le port colonial de la France. Cette conférence paraîtra dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES; en voici le résumé :

Dès longtemps le port de Marseille a joué un rôle important dans le commerce de la Méditerranée. Plus récemment le port de Marseille a eu une fonction surtout coloniale, en ce sens qu'il a grandement contribué par une action appropriée au développement colonial de la France contemporaine.

M. Blondel, qui est un orateur à la fois abondant dans la forme et copieusement documenté pour le fond, a montré les efforts intelligents des Marseillais pour permettre à leur port de soutenir la concurrence contre les autres ports de l'Europe continentale.

Marseille, ne pouvant rester un port de transit autant que ses habitants l'eussent désiré, est devenue surtout une ville industrielle. Elle a orienté son activité du côté des industries qu'on peut appeler coloniales, s'efforçant de retirer le plus de profit possible des possessions d'outre-mer de la France, surtout de l'Afrique du Nord, avec laquelle elle entretient un mouvement d'affaires considérable.

Ces efforts n'ont pas été couronnés d'un plein succès. M. Blondel se demande pourquoi. Il met en lumière les difficultés nombreuses avec lesquelles Marseille a eu à lutter. Depuis le percement du Saint-Gothard, en 1881, Gênes, plus rapprochée de l'Europe centrale, lui a fait une concurrence terrible, et est presque devenue un port allemand; Marseille n'est reliée ni au Rhône, la grande artère fluviale du midi de la France, ni au réseau de navigation intérieure (d'ailleurs très imparfait) de ce pays. La région dont elle est le débouché naturel n'a pas une grande importance industrielle : Marseille manque d'un bon Hinterland. L'insuffisance de la marine marchande de la France (due elle-même à des causes très diverses) a réagi sur l'activité du port. On peut même soutenir qu'au point de vue géographique Marseille n'occupe pas une situation aussi favorable qu'on pourrait le croire tout d'abord. L'ouverture du Simplon, le percement prochain du Löbschberg, le percement éventuel de la Faucille et du Mont Blanc ne peuvent lui être avantageux.

On le voit, c'est surtout par le commerce avec les colonies que Marseille peut conserver une réelle importance, de même que c'est surtout par son empire colonial que la France, si fortement

concurrencée par les nations qui l'entourent, peut encore rester au cours du XX[e] siècle une grande nation.

Mercredi 10 avril. — M. Alphonse Roersch, professeur à l'Université de Gand, qui fut envoyé en mission en Grèce et dans la Méditerranée, par le gouvernement belge, il n'y a pas bien longtemps, a bien voulu se charger d'étudier en détail la fonction économique d'un port de l'antiquité. Il a choisi Délos. Cette monographie paraîtra dans la Revue des Questions scientifiques ; en voici le résumé :

Des fouilles mémorables et qui sont la gloire de l'École française d'Athènes nous ont rendu récemment, comme on le sait, la fameuse cité, l'une des villes les plus riches, les plus célèbres et les plus fréquentées de l'antiquité.

Commencées en 1877, avec de très modestes ressources, par M. Homolle, actuellement conservateur en chef des Musées du Louvre, et poursuivies pendant quelques années avec une énergie, une persévérance et aussi avec une abnégation rares, — les fouilles de Délos ont pu être reprises en grand, à partir de 1903, grâce à la munificence princière de M. le duc de Loubat.

Un simple détail donnera une idée de leur importance : en 1905 on déblaya l'île sainte, quatre mois durant, et pendant ce temps quotidiennement six cents wagonnets de déblais furent jetés à la mer.

Les recherches ne sont pas encore terminées, mais elles ont donné des résultats si complets et si nombreux que, dès à présent, savants, archéologues, historiens, économistes en tirent parti avec ardeur et y trouvent, chacun dans sa spécialité, les éléments des études les plus intéressantes et les plus variées.

Délos, l'île sainte où naquit Apollon, ne fut pas seulement un sanctuaire vénéré et respecté entre tous, ce fut aussi un centre commercial très important, un port renommé et pendant longtemps le plus vaste entrepôt de l'antiquité.

C'est sous cet aspect que M. Alphonse Roersch a étudié Délos dans sa conférence.

Il l'a fait à la lumière des découvertes les plus récentes. Celles-ci nous ont rendu, en effet, la configuration, le plan et jusqu'à la physionomie du port : installations maritimes, quais et jetées,

docks, entrepôts et magasins; puis, tout autour, les quartiers marchands avec leurs rues et leurs maisons d'habitation, depuis l'humble échoppe du petit détaillant jusqu'à l'hôtel du négociant millionnaire, jusqu'au club où importateurs et armateurs venaient échanger produits et marchandises et... se délasser aussi.

Après avoir décrit la configuration des lieux et leur économie, M. Roersch a étudié l'histoire du port, d'après les auteurs anciens et surtout d'après les innombrables inscriptions que les fouilles ont mises au jour.

Celles-ci permettent de suivre tout le développement et le progrès de la place de Délos, depuis ses modestes débuts jusqu'aux événements qui en ont fait la première ville marchande du monde à l'époque romaine : arrivée des grands capitalistes romains, chute de Rhodes, prise de Corinthe, etc.

Elles nous font assister aussi à la décadence et à la chute de la place. Et si elles nous rendent parfaitement compte des causes de grandeur et de prospérité de l'île sainte, elles font toucher du doigt aussi, à tant de siècles de distance, ce qui a fait la ruine de la cité, sous Mithridate, en 87 avant J.-C.

On le voit, les fouilles entreprises par l'École française d'Athènes ont fourni de la manière la plus heureuse les éléments d'une monographie intéressante et complète, et qui rentre parfaitement dans le programme d'études que la Société Scientifique de Bruxelles s'est tracé.

M. Beernaert, président, fait part des regrets de M. Ernest Dubois qui devait parler de l'*Essai de valorisation des cafés du Brésil*. Indisposé, M. Dubois n'a pu assister à la séance.

La session est close après l'élection du Bureau pour 1907-1908, lequel est ainsi composé :

Président :	MM.	GEORGES BLONDEL;
Vice-Présidents :		A. BEERNAERT;
		ERNEST DUBOIS;
Secrétaire :		ÉDOUARD VAN DER SMISSEN.

ASSEMBLÉES GÉNÉRALES

I

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MARDI 9 AVRIL 1907

La séance s'ouvre à 2 heures et demie, sous la présidence de M. de la Vallée Poussin, vice-président.

La parole est donnée à M. P. Mansion, secrétaire général, pour la lecture du rapport suivant sur les travaux de la Société en 1906-1907.

Publications. La Société a publié, depuis le 1er avril 1906, les trois derniers fascicules du tome XXX des ANNALES, correspondant à l'année sociale 1905-1906, un fascicule du tome XXXI de l'année 1906-1907 et quatre livraisons de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES.

1° ANNALES. Le tome XXX des ANNALES est de nouveau un volume de plus de 700 pages que nos sections se partagent avec les documents administratifs dans le rapport suivant :

Documents	105
Sciences mathématiques	112
» techniques	7
» physiques	151
» naturelles	254
» médicales	47
» économiques	36

Comme les autres années, des contributions originales faites dans diverses sections ont été publiées dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, lorsqu'elles semblaient suffisamment intéressantes pour d'autres que des spécialistes. Citons, par exemple, les travaux de la cinquième section *sur les ports et leur fonction économique*,

par MM. Van der Smissen, Henri Francotte, G. Eeckhout, H. Laporte, Ch. Morisseaux, P. de Rousiers, E. Dubois, M. Theunissen, G. Blondel; le mémoire de M. J.-H. Fabre sur le *Minotaure Typhée*, etc.

2° Revue des Questions scientifiques. Les livraisons d'avril, de juillet et d'octobre 1906 et la livraison de janvier 1907 contiennent de 25 à 30 articles de vulgarisation scientifique, des revues de recueils périodiques, des articles bibliographiques sur 120 ouvrages environ et un certain nombre de notices biographiques.

Voici, classés par ordre de matières, les titres des articles principaux de la Revue :

1. *P. Mansion*. Esquisse de l'histoire des mathématiques en Belgique.
2. *R. P. H. Bosmans, S. J.* L'algèbre de J. Peletier.
3. *P. Mansion*. Joseph-Marie De Tilly.
4. *R. P. P. de Vregille, S. J.* Les observatoires de la Compagnie de Jésus au début du XX[e] siècle.
5. *P. Duhem*. Les origines de la Statique (2 articles).
6. *A. Witz*. Moteurs à gaz et armes à feu.
7. *J.-B. André*. Les eaux alimentaires de Belgique.
8. *Lieutenant-colonel Ariès*. L'électricité considérée comme forme de l'énergie.
9. *A. de Lapparent*. La chronologie des époques glaciaires et l'ancienneté de l'homme.
10. *L. Siret*. Orientaux et Occidentaux en Espagne aux temps préhistoriques (2 articles).
11. *R. P. H. Lammens, S. J.* Tâif, la cité alpestre du Hidjas au I[er] siècle de l'Islam.
12. *G. Lechalas*. L'agrandissement de la Lune à l'horizon.
13. *G. Lechalas*. La réduction des intensités lumineuses en peinture.
14. *J.-H. Fabre*. Le minotaure Typhée.
15. *R. P. G. Schmitz, S. J.* Formation sur place de la houille.
16. *Dr Moeller*. Curiosités médicales.
17. *Dr Dardel*. Le problème de l'alimentation.
18. *X. Francotte*. Le rire et ses anomalies.
19. *A. Beernaert*. Le centenaire de Le Play (2 articles).
20. *Ch. de Kirwan*. La forêt gauloise, franque et française (2 art.).

21. *Éd. Van der Smissen, H. Francotte, G. Eeckhout, H. Laporte, Ch. Morisseaux, P. de Rousiers, E. Dubois, M. Theunissen, G. Blondel.* Les ports et leur fonction économique (7 articles).
22. *J. M., S. J.* Conflits de faits et conflits de tendances.
23. *J. M., S. J.* Ontogénèse et phylogénèse.
24. Notices sur Lossen et Venneman.

Nous est-il permis d'insister sur quelques-uns de ces articles? L'ensemble des études des membres de la cinquième section sur la *Fonction économique des ports* constitue un travail de premier ordre qui a attiré l'attention en haut lieu : la Société Scientifique l'a publié à part pour le mettre à la portée de tous les économistes. La conférence de M. Witz sur les moteurs à gaz comparés aux armes à feu a paru si remarquable aux techniciens de notre pays que, tout récemment, notre Président a dû refaire à Bruxelles sa communication pour l'Association des ingénieurs. Les recherches de M. L. Siret sur l'époque préhistorique en Espagne sont aussi entièrement originales. Est-il nécessaire de signaler l'importance des articles de M. de Lapparent sur l'antiquité de l'homme et de ceux d'un naturaliste philosophe sur l'ontogénèse et la philogénèse et sur les conflits de faits et les conflits de tendances? Aussi longtemps que la Revue des Questions scientifiques contiendra des articles aussi solides que ceux dont je viens de parler, elle conservera la légitime influence qu'elle s'est acquise.

Sessions. Par suite de circonstances diverses, les trois sessions de l'année écoulée se sont encore tenues à Bruxelles. Les conférences de l'après-midi ont été bien suivies et elles méritaient de l'être. M. le Dr Lebrun, en janvier dernier, nous a parlé de l'évolutionnisme et a montré combien, dans certains milieux, incrédules *à priori*, on se hâte de tirer, sans preuve aucune, de cette doctrine scientifique des conclusions antireligieuses ou antiphilosophiques. M. le Dr X. Francotte nous a fait connaître la physiologie et les anomalies du rire que l'on rencontre à la fois dans la vie pathologique et dans la vie normale. Son intéressante conférence se terminait par une conclusion, toute wallonne et antijanséniste, sur la gaîté qui en résumait la philosophie. M. de Rousiers, dans sa

conférence sur le port de Liverpool, pleine de chiffres et de données économiques bien arides pourtant, est parvenu à captiver et à instruire son auditoire grâce à la clarté de son exposition des connexions multiples qu'il y a entre un grand port mondial, la région où il se trouve et l'hinterland qu'il dessert pour l'importation et l'exportation.

Les deux dernières conférences dont il me reste à dire un mot ressortissent de notre jeune sous-section des sciences techniques et prouvent, par le fait, qu'elle est digne de passer du catéchuménat au baptême et de devenir une section comme les autres. M. Renier, dans sa solide conférence sur le grisou, nous a fait connaître les triomphes successifs de la science et du dévouement des ingénieurs contre ce redoutable ennemi des mineurs. M. Witz, en comparant les moteurs à gaz et les armes à feu, a appris à ses auditeurs, à leur grand étonnement, que les canons modernes, au point de vue du rendement, sont supérieurs aux machines les plus perfectionnées, et il en a tiré des conclusions pratiques pour les constructeurs.

Il a été fait, dans les trois sessions, environ quatre-vingts communications plus ou moins étendues parmi lesquelles nous devons signaler les études de la quatrième section sur l'euthanasie ou assassinat médical, question qui a rapport aux premiers principes de la morale religieuse et philosophique; puis le grand travail de la cinquième section sur la fonction économique des ports.

Nos sessions ordinaires n'ont pas suffi à l'activité de deux de nos sections : la troisième, sous la direction de M. le prof. Kaisin, a fait une excursion géologique dans la vallée de la Samme le 29 mai 1906; la cinquième a visité, le lundi 23 avril 1906, le port d'Anvers, sur le steamer l'*Émeraude*, gracieusement mis à la disposition des membres de la Société Scientifique par M. Liebaert, ministre des chemins de fer et de la marine.

État actuel de la Société. Le nombre de nos membres s'est élevé de 489 au 1er janvier 1906 à 500 au 1er janvier 1907, grâce à l'adjonction d'une trentaine de nouvelles recrues, qui ont, cette fois, compensé les démissions et les vides causés par la mort.

Nous devons citer, parmi ceux qui nous ont quittés pour une vie meilleure : Wilhelm Lossen (1838-1906), l'éminent chimiste de

Königsberg, bien connu, même en dehors de sa spécialité, par ses énergiques revendications en faveur du spiritualisme contre les assertions gratuites d'un confrère matérialiste; — le prof. Venneman (1850-1906), de la Faculté de médecine de Louvain, membre de la Société depuis 1879, président de la quatrième section de 1888 à 1891, auteur d'un grand nombre de travaux relatifs aux sciences médicales; — enfin, le lieutenant-général De Tilly (1837-1906), membre de l'Académie royale de Belgique, l'un des membres fondateurs de la Société Scientifique de Bruxelles et l'un des savants qui ont le plus honoré leur pays par ses travaux scientifiques et par la droiture de son caractère. Qu'il nous soit permis de répéter ici en abrégé ce que nous avons dit en lui adressant un suprême adieu, au nom de l'Académie et de la Société scientifique, le jour de ses funérailles :

« De Tilly a étudié trois fois d'une manière originale de plus en plus approfondie la question des premiers principes de la science de l'espace; vingt-cinq ans avant les mathématiciens philosophes italiens, il a établi d'une manière solide cette vérité capitale : la géométrie est la physique mathématique des distances; — le premier, presque le seul, il a créé la mécanique non euclidienne; — par une voie plus simple et plus naturelle que Boussinesq, il a donné une solution de la conciliation du déterminisme avec le libre arbitre. Les travaux de De Tilly, en géométrie et en mécanique non euclidienne appartiennent à la partie impérissable de la science. Par la dignité de sa vie, par la noblesse de son caractère, par son scrupuleux amour du devoir, par la sûreté de son amitié, De Tilly s'était acquis l'estime et l'affection de tous ceux qui avaient pu le connaître intimement. Il avait été trois fois vice-président de la Société Scientifique, en 1876-1877, 1903-1904, 1904-1905, et président en 1905-1906. »

La Société Scientifique n'a pas eu que des deuils à enregistrer. Plusieurs de ses membres ont reçu des distinctions scientifiques ou honorifiques (*), dont il est juste de citer au moins deux : M. le vicomte de Montessus de Ballore, de l'Université catholique de

---

(*) Ont été nommés commandeurs de l'ordre de Léopold : S. É. le Cardinal Mercier, Mgr Hebbelynck, MM. François Dewalque, F. Vanderlinden, G. Van der Mensbrugghe et G. Kurth; officiers : R. P. De Smedt, F. Béthune, H. Francotte et

Lille, a obtenu une partie du grand prix de mathématiques de l'Institut de France, pour ses recherches sur les fractions continues. M. le Dr De Buck a obtenu, à l'Académie de médecine de Bruxelles, une mention honorable et une médaille de 1500 francs pour un travail intitulé : *Étude pathogénique et thérapeutique de l'épilepsie et accessoirement des autres maladies nerveuses et mentales.*

La Société Scientifique de Bruxelles a eu l'honneur d'être représentée aux fêtes du centenaire de Le Play, qu'elle avait compté autrefois au nombre de ses membres, par l'éminent président de la cinquième section, M. Beernaert, qui y prononça un discours remarquable et remarqué. La Société Scientifique, et plus spécialement la quatrième section, se sont associées aussi aux fêtes célébrées à Gand en l'honneur de notre éminent confrère, M. Heymans, à l'occasion de sa nomination comme chevalier de l'ordre de Léopold. La Société a aussi été représentée par des délégués, MM. Van Ortroy et Goedseels, au Congrès polaire international.

Après cet exposé aride de la vie de la Société, je crois devoir citer, pour l'encouragement de tous, l'extrait suivant d'une lettre de l'un de nos membres fondateurs les plus zélés, M. Proost, directeur général de l'Agriculture : « Je reviens de Rome où j'ai eu l'honneur d'être reçu en audience particulière par S. S. Pie X. Toutes mes bénédictions, m'a-t-il dit en parlant de la Société Scientifique, parce qu'elle fait beaucoup de bien. »

Deux décisions du Conseil. Dans sa dernière réunion, le Conseil de la Société a décidé de ne plus publier dans ses ANNALES des travaux trop étendus constituant plutôt des livres que des Mémoires originaux, parce que pareille publication ne laisse pas assez de place disponible pour les communications scientifiques des membres de toutes les sections.

Il a décidé aussi de proposer à la Société d'adhérer à la Délégation pour l'adoption d'une langue auxiliaire internationale; cette

Mgr Lefebvre; chevaliers : MM. Heymans, Demanet, A. Meunier, E. Gilson, Stainier, Jacobs et Thiery. — M. Warlomont est devenu Directeur de l'Institut ophtalmique de l'armée. — M. d'Ocagne, professeur à l'École des Ponts et Chaussées, a été autorisé à faire un cours libre de calcul graphique et de nomographie à la Sorbonne. M. le Dr Vanderstraeten a remplacé le regretté Dr Venneman à la Faculté de médecine de Louvain.

adhésion permettrait au Conseil d'avoir un représentant à la Délégation et d'influer sur le choix prochain de cette langue auxiliaire, si l'Association internationale des Académies refuse de se charger de faire ce choix comme la Délégation le lui propose.

M. le Secrétaire général propose de nommer commissaires pour l'examen des comptes du trésorier, M. Ch.-J. de la Vallée Poussin et le P. Thirion. Cette proposition est adoptée.

L'assemblée vote la transformation en section de la *sous-section des sciences techniques*. Le Conseil général modifiera en conséquence les *Statuts* de la Société.

L'assemblée vote l'adhésion de la Société à la Délégation pour l'adoption d'une langue auxiliaire internationale.

La parole est donnée à M. G. Blondel, professeur à l'École des Hautes Études commerciales de Paris, pour une conférence sur le *Port de Marseille*. Cette conférence paraîtra dans la Revue des Questions scientifiques; on en a donné le résumé dans le procès-verbal des travaux de la cinquième section.

II

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MERCREDI 10 AVRIL 1907

La séance s'ouvre à 2 heures et demie sous la présidence de M. A. Witz, président.

La parole est donnée à M. le comte Domet de Vorges pour la lecture du rapport suivant sur les travaux de la *Société bibliographique de Paris*.

« Dans le courant de l'année 1906, la vie de la Société bibliographique a été très active. Deux faits importants méritent surtout d'attirer l'attention :

Le premier est l'achèvement de la grande publication que nous avons entreprise et qui était commencée depuis trois ans : l'*Épiscopat français depuis le Concordat jusqu'à la séparation, 1802-1905*.

Le deuxième est le développement de plus en plus grand de nos bibliothèques circulantes.

Ainsi, nous avons groupé, dans un travail en collaboration, les membres érudits de notre Société et nous donnons à ceux de nos sociétaires qui aiment à s'occuper des œuvres de propagande et de préservation sociale la facilité de lutter par le livre contre les publications toujours mauvaises, trop souvent démoralisatrices que protège aujourd'hui l'estampille gouvernementale. De cette manière, nous croyons suivre fidèlement les intentions de notre regretté fondateur, le marquis de Beaucourt.

Notre publication sur l'épiscopat français a été très favorablement accueillie dans tous les milieux. Beaucoup de revues et de journaux quotidiens ont fait paraître des comptes rendus très élogieux dans leurs colonnes par des écrivains très documentés sur l'histoire de l'Église.

On nous permettra de dire ici quelques mots sur cet important recueil dans lequel figure la biographie de plusieurs évêques belges : ceux de Gand, de Liége, de Namur, de Tournai, réunis sous la juridiction ecclésiastique de leur métropolitain, l'archevêque de Malines, pendant les quelques années que ces diocèses furent annexés à l'Église de France. Ces biographies sont dues à la plume d'un de vos savants compatriotes, M. Paul Verhaegen.

Mgr Baunard avait accepté de présenter aux lecteurs ce grand ouvrage; il l'a fait dans une introduction où se retrouvent les qualités habituelles de l'éminent recteur de l'Université catholique de Lille, qui est en même temps un écrivain délicat, un fin penseur et un philosophe sachant tirer les conséquences des faits historiques.

Dans le livre publié sous la direction de la Société bibliographique on trouve toute une série de portraits fortement esquissés, portant parfois l'éclat d'une rare puissance intellectuelle et morale.

Ils étaient saints et vénérables, ces évêques de l'époque impériale, à peine sortis de la tourmente révolutionnaire, divisés, terrorisés, enchaînés par le redoutable empereur, sans fléchir dans leur attachement à l'unité catholique.

Ceux qui siégèrent sous la Restauration, presque tous gentilshommes, furent les pères et les pasteurs des peuples; ils formèrent ce que Mgr Baunard appelle l'épiscopat réparateur.

Sous la monarchie de Juillet, le clergé tend à une union plus intime avec le Saint-Siège et combat pour la liberté d'enseignement.

Cette liberté est enfin obtenue en 1850. Plusieurs évêques distingués contribuèrent puissamment à cette précieuse conquête, surtout le grand évêque d'Orléans. Sous le second empire commence l'action néfaste de la franc-maçonnerie. L'épiscopat lutte par la parole, par la plume, par de nombreuses fondations d'écoles, et, après la grande épreuve de 1870, par la création d'universités. Il ne parvient pas à endiguer le torrent auquel la troisième république donne une marche accélérée par ce programme si tristement fameux : le cléricalisme, voilà l'ennemi.

On voit quel puissant intérêt présente ce tableau, très abrégé sans doute, mais complet, de l'action de l'épiscopat français pendant tout un siècle (*).

La Société a chargé un de ses membres d'aller à Rome en offrir un exemplaire au Souverain Pontife, et un autre au cardinal Merry del Val. Cet hommage a été reçu par le Saint-Père avec une bonté toute paternelle. Quelques jours plus tard, il disait à un rédacteur de La Croix : « J'ai toujours sur mon bureau quelque chose qui me parle de la France. Je feuillette parfois ce livre. Puissiez-vous ne pas connaître de nouveau les violences de l'époque révolutionnaire. »

De son côté, le cardinal Merry del Val a adressé au Président de la Société bibliographique la lettre suivante :

« Illustrissime Monsieur,

» J'ai reçu avec plaisir l'œuvre : l'*Épiscopat français,* que V. I. S. a eu l'aimable pensée de me faire remettre au nom du Conseil de la Société bibliographique que vous présidez. En vous priant de vous faire auprès des membres du Conseil l'interprète de la vive satisfaction que j'éprouve à voir résumée simplement et mise à la portée de toutes les intelligences la chronologie des personnages qui se sont succédé depuis le Concordat sur les sièges

---

(*) L'*Épiscopat français* est mis en vente chez M. Béduchaud, 83, rue des Saints-Pères, au prix commercial de 12 francs (envoyé franco, 13 francs). En s'adressant au siège de notre Société, 5, rue Saint-Simon, nos sociétaires obtiennent une réduction de 2 francs.

épiscopaux de France, je vous exprime mes remerciements les plus vifs pour votre courtoisie. Je profite de cette occasion pour me déclarer avec les sentiments d'une estime bien sincère

» de V. I. S.,
» le très affectionné et dévoué,
» Card. MERRY DEL VAL.

» Rome, 14 février 1907. »

Vous excuserez, Messieurs, la longueur de ces détails par la joie que nous ont causée de si hauts témoignages d'approbation.

La seconde tâche imposée à notre activité était, comme nous l'avons dit en commençant, le développement des bibliothèques circulantes.

Devant le débordement d'injures contre Dieu et la patrie, il est du devoir de tout bon catholique de chercher à refaire l'âme du peuple, à redresser l'esprit national. La Société bibliographique s'est appliquée à remplir ce devoir en répandant le livre instructif et moralisateur en même temps qu'intéressant dans tous les milieux sociaux, usines, ateliers, patronages, populations rurales. Un comité composé de catholiques instruits fait un examen minutieux des ouvrages d'histoire populaire, biographies des grands hommes, voyages de nos missionnaires, épisodes glorieux de nos guerres nationales, romans dont les héros s'inspirent de pensées morales et chrétiennes. Puis, nos dames patronnesses discutent la valeur sociale, morale et intellectuelle de chaque livre et fixent leur choix sur les titres d'ouvrages nécessaires pour former les séries dont se composent nos bibliothèques circulantes.

En 1906, il nous a été adressé trois cents demandes de bibliothèques circulantes dont quatre-vingt-quinze nouvelles. Plus de cinq cents séries de vingt-cinq volumes, soit un total de 12 500 volumes ont été envoyés tant à Paris que dans les départements.

Vous le voyez, Messieurs, malgré les difficultés des temps, l'année 1906 a été très féconde pour notre Société.

Nous ne finirons point ce rapport sans adresser à la catholique Belgique un salut fraternel, et sans vous exprimer combien la France de Clovis, de sainte Clotilde et de saint Louis vous est

reconnaissante de l'hospitalité que vous accordez à nos malheureux congréganistes et de la sympathie que vous ne cessez de nous montrer au milieu des redoutables épreuves dont nous ne voyons pas encore le terme. D'autres pourraient désespérer, mais nous avons Dieu avec nous. »

La parole est ensuite donnée à M. le Dr Maurice D'halluin, Chef des travaux de Physiologie à la Faculté libre de Médecine de Lille, pour une conférence avec démonstrations intitulée : *Stéphane Leduc a-t-il créé des êtres vivants?* Cette conférence paraîtra dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES. En voici un résumé :

On a fait récemment beaucoup de bruit autour d'une prétendue découverte de Stéphane Leduc : Miracle, criait-on. Et l'on exposait « comment un savant créait des êtres vivants ». On allait donc faire de la vie. Il faut avouer que rien n'a été épargné pour égarer l'opinion. On a semé à profusion les termes techniques. Il fallait le plus souvent attribuer à ces paroles un sens métaphorique : mais le public non initié ne pouvait que se laisser prendre à ces affirmations savantes. D'où l'emballement général.

Il est incontestable que les expériences de Traube répétées et perfectionnées par Stéphane Leduc ont un grand intérêt, mais il est enfantin d'en tirer les conclusions que l'on a mises en avant. Le Dr D'halluin a voulu se rendre compte par lui-même de la réalité des faits expérimentaux. Les résultats de ses observations et la réfutation des conceptions de Stéphane Leduc sont l'objet de la conférence.

L'auteur définit d'abord ce qu'il faut entendre par êtres vivants. Puis, après un rapide exposé des théories osmotiques, il arrive à l'étude des arborescences.

Nous assistons d'abord à une petite scène de fakirisme qui se reproduira dans la deuxième partie de la conférence. Un granule de sulfate de cuivre jeté dans un milieu ferrocyanique germe sous les yeux de l'auditoire et produit comme une tige qui s'allonge avec rapidité; bientôt sur cette tige se grefferont des sortes de feuilles. Il n'est plus besoin d'aller au pays des Fakirs pour voir en quelques instants germer une « graine », pousser une « plante ». Ces soi-disant plantes, qui ne sont que des précipités chimiques, affectent des formes à la fois gracieuses et variées : le conférencier en montre

un grand nombre tout en décrivant les artifices employés pour les obtenir. Il passe ensuite à la réfutation des affirmations de Stéphane Leduc. Il n'y a ni nutrition, ni croissance par intussusception, ni organisation. Ces arborescences n'ont des plantes que l'apparence, elles n'ont pas la moindre fonction vitale. Leur production est un phénomène banal et très étendu : on l'obtient aussi avec les silicates et un grand nombre de sels. Nous assistons à une seconde scène de fakirisme plus brillante encore si possible que la première. Des cristaux de cobalt, de manganèse, de magnésie, etc., fournissent en quelques minutes de belles arborescences. Ces expériences nous font sortir du domaine de la physiologie pour entrer dans celui de la physique amusante. Stéphane Leduc n'a pas créé d'êtres vivants. Ses arborescences ne sont, suivant le mot d'un académicien, que le « calembour de la vie ».

III

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU JEUDI 11 AVRIL 1907

La séance s'ouvre à 2 heures et demie sous la présidence de M. A. Witz, président.

M. P. Mansion, secrétaire général, soumet à l'assemblée les conclusions des commissaires chargés d'examiner les comptes de la société relatifs à l'année 1906. Ces comptes sont approuvés par l'assemblée. En voici les détails et le résumé :

Recettes et dépenses de la Société scientifique pendant l'année 1906

Revue des Questions scientifiques

RECETTES		DÉPENSES	
Produit des abonnements . fr.	9474,50	Impression, illustration et expédition . . . . . fr.	6591,66
Vente d'anciennes livraisons.	322,00	Collaboration	4124,45
Vente des brochures : *La Crise du libre-échange* et *Les ports et leur fonction économique*	64,50	Impression et distribution de la brochure : *Les ports et leur fonction économique.*	236,70
Produit des annonces . . .	150,00	Administration et propagande	953,83
Subside de la Société . . .	1896,64		
	11907,64		11907,64

Annales

Produit des cotisations. . .	6130,00	Impression, illustration et expédition	3529,63
Vente de la brochure : *Le Féticide médical*	3,00	Indemnités aux secrétaires .	2535,00
Subside de la Société . . .	1166,02	Frais de sessions, location des locaux, etc.	1234,39
	7299,02		7299,02

Société

Produit des coupons (capital social)	3717,75	Subsides pour recherches scientifiques	200,00
Intérêts du compte-courant .	643,96	Subside à la *Revue*	1896,64
	4361,71	Subside aux *Annales* . . .	1166,02
		Transport du magasin de Louvain à Bruxelles	292,00
			3554,66

RÉSUMÉ

Recettes	23568,37
Dépenses.	22761,32
Excédent des recettes	807,05

M. le Secrétaire général fait connaître le résultat des concours pendant l'année sociale 1906-1907. Un prix de 500 francs est accordé à chacun des mémoires suivants : *Les potentiels de décharge dans les gaz et les vapeurs*, par M. l'abbé Tits, et *Recherches biologiques sur les huiles de poisson*, par MM. Henseval et Huwart. Ces deux mémoires sont reproduits dans la seconde partie des ANNALES.

M. le Président remet aux lauréats la médaille de la société.

M. le Secrétaire général donne lecture des questions de concours et fait connaître le résultat des élections du conseil et des bureaux des différentes sections.

La composition du conseil pour l'année 1907-1908 est la suivante (*) :

(*) Le nom de chaque membre du conseil est suivi de l'indication de l'année où expire son mandat.

Président d'honneur :	M. A. Beernaert.
Président :	M. L. Cousin (1909).
1er Vice-Président :	M. G. Lemoine (1909).
2e Vice-Président :	M. le Dr Warlomont (1911).
Secrétaire :	M. P. Mansion (1911).
Trésorier :	M. Ed. Goedseels (1908).
Membres :	MM. le Marquis de la Boëssière-Thiennes (1910).
	L. De Lantsheere (1910).
	Chanoine Delvigne (1911).
	Fr. Dewalque (1910).
	Dr X. Francotte (1908).
	Ch. Lagasse-de Locht (1909).
	Cte Ad. de Limburg-Stirum (1908).
	E. Pasquier (1909).
	A. Proost (1910).
	Ed. Van der Smissen (1911).
	Cte Fr. van der Straeten-Ponthoz (1908).
	Chanoine Swolfs (1909).
	G. Van der Mensbrugghe (1911).
	Ch. de la Vallée Poussin (1910).
	Dr A. Van Gehuchten (1908).

M. le Secrétaire général donne lecture d'une lettre de M. Beernaert, Ministre d'Etat, s'excusant de ne pouvoir assister à la séance, retenu qu'il est par ses devoirs parlementaires, et dans laquelle il remercie la Société Scientifique de l'avoir nommé son Président d'honneur.

La parole est donnée au R. P. Fr. Dierckx, S. J., professeur à la Faculté des Sciences du Collège N.-D. de la Paix, à Namur, pour une conférence avec projections sur *l'Éruption du Vésuve en avril 1906*. En voici le résumé :

Après un rapide aperçu sur l'évolution géologique de l'Italie méridionale, le conférencier décrit le Vésuve, ses voies d'accès, ses laves anciennes, son cratère, tels qu'il les photographia lui-même lorsqu'en 1901 il en fit l'ascension avant de se rendre aux

volcans de Java. Ces données, repérées sur des plans terriers précis, font saisir de la façon la plus nette les phases principales de la dernière éruption et les modifications de la montagne à la suite de l'émiettement de son sommet.

Bon nombre des clichés sont dus à des touristes namurois qui ont respiré les cendres éruptives et foulé les laves encore chaudes presque au lendemain du paroxysme. Le conférencier les a placés dans le cadre que leur ont fait plus tard les rapports détaillés des spécialistes. Reconstitution intuitive, où le côté épisodique n'a pas été négligé. Ébranlement de la montagne, projection de cendres et de pierres, bombardement d'Ottajano et de San Giuseppe, fuite des habitants, organisation des secours, émissions capricieuses des laves, envahissement de Bosco Trecase, arrêt définitif des coulées : tout cela se voit comme dans un panorama mouvant.

De la discussion des faits il résulte que l'éruption de 1906 est analogue non à celle du Mont Pelé qui détruisit Saint-Pierre de la Martinique, mais à celle, plus violente, du Vésuve qui en 79 ensevelit Pompéi, Stabies et Herculanum.

Le Président félicite et remercie le conférencier, puis il déclare close la session de Pâques 1907.

LISTE DES OUVRAGES

OFFERTS A LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

du 1er mai 1906 au 1er mai 1907

I. Livres et brochures

H. Andoyer. Cours d'Astronomie. Première partie. Un vol. in-8° de 222 pag Paris, A. Hermann, 1906.

Henryck Arctowski. Cinquante brochures et communications sur différer sujets de sciences naturelles, chimie, physique du globe.

Ch. Bénard. Projet d'expédition océanographique double à travers le bass polaire arctique. Une broch. in-8° de 23 pages. Bruxelles, Vanderauera, 19

M. Berthelot. Traité pratique de l'analyse des gaz. Un vol. in-8° de IX-483 page Paris, Gauthier-Villars, 1906.

J. Berthier, O. P. L'Étude de la Somme théologique de S. Thomas d'Aqui Un vol. in-8° de 494 pages. Paris, Lethielleux.

H. Bosmans. Le *De Arte magna* de Guillaume Gosselin. Extrait de la BIBLI THECA MATHEMATICA. Une brochure in-8°, pp. 44-66. Leipzig, Teubner, 19

Bouasse. Bases physiques de la musique. Une broch. in-8° de 111 pages, de collection *Scientia*. Paris, Gauthier-Villars, 1906.

Marcel Brillouin. Leçon sur la viscosité des liquides et des gaz. Première parti Un vol. in-8° de VII-228 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1907.

O. D. Chwolson. Traité de physique. Traduction de E. Davaux, t. I, fasc. pp. 409-559; t. II, fasc. 2, pp. 203-431. Deux vol. in-8°. Paris, A. Herman 1906.

R. Cirera, S. J. Détermination des coordonnées géographiques de Tortosa et Nouvel Observatoire de l'Èbre. 4 p. des COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE D SCIENCES DE Paris, 1906.

R. Cirera, S. J. Notice sur l'Observatoire de l'Èbre et sur quelques observations de l'éclipse du 30 août 1905. Traduction par le P. E. Merveille, S. J. Un vol. in-4° de 56 pages. Barcelone, Gill, 1906.

H. Coulon. Le Cimetière mérovingien de Cherisy (Pas-de-Calais). Une broch. in-8° de 36 pages. Paris, Leroux, 1894.

H. Coulon. Contribution à l'histoire des remèdes. Quelques pages d'un manuscrit picard du XVe siècle. Une broch. in-8° de 28 pages. Paris, Baillière et fils, 1897.

H. Coulon. Curieux phénomène d'ornithologie. Une broch. in-8° de 8 pages. Cambrai, Renaud, 1895.

H. Coulon. Curiosités de l'histoire des remèdes comprenant des recettes employées au moyen âge dans le Cambrésis. Un vol. in-8° de 156 pages. Cambrai, Renier frères, 1892.

H. Coulon. Notes sur les vases appelés biberons trouvés dans les sépultures d'enfants (époque gallo-romaine). Une broch. in-8° de 14 pages. Paris, Ernest Leroux, 1906.

H. Coulon. Proverbes d'autrefois. Un vol. in-8° de VI-174 pages. Paris, Retaux, 1903.

H. Coulon. La Thérapeutique oculaire au XIIIe siècle. Traduction d'un manuscrit latin. Un vol. in-8° de 84 pages. Paris, Baillière, 1901.

H. Coulon. De l'usage des strigiles dans l'antiquité. Une broch. in-8° de 47 pages. Paris, Ernest Leroux, 1895.

A. da Cunha. L'Année technique 1906. Un vol. in-8° de 237 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1906.

Marc Dechevrens, S. J. L'Inclinaison du vent sur l'horizon (Extrait des NUOVI LINCEI). Une broch. in-4° de 39 pages. Roma, 1906.

E. De Wildeman. Mission E. Laurent, fasc. III et IV. In-8°. Bruxelles, Vanbuggenhoudt, 1906.

Dubruel. Le Beriberi. Un vol. in-8° de 157 pages. Paris, Baillière, 1906.

P. Duhem. Étude sur Léonard de Vinci. Première série. Un vol. in-8° de VII-355 pages. Paris, Hermann, 1906.

P. Duhem. Les Origines de la statique. T. II. Un vol in-8° de VIII-364 pages. Paris, Hermann, 1906.

P. Duhem. Recherches sur l'élasticité. Un vol. in-4° de 218 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1906

J. B. Ferreres, S. J. La Mort réelle et la Mort apparente. Traduction de Geniesse. Un vol. in-8° de XXVII-466 pages. Paris, Beauchesnes, 1906.

M. Fréchet. Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris. Un vol. in-4° de 74 pages.

Albert Gaudry. Étude sur une portion du monde antarctique. Fossiles de Patagonie (Extrait des ANNALES DE PALÉONTOLOGIE). Un vol. in-4° de 43 pages. Paris, Masson, 1906.

E. Gelin. Traité de Trigonométrie plane et sphérique. 2e édition. Un vol. in-8° de 288 pages. Bruxelles, Schepens, 1906.

Grand Enry. Sur les graines et inflorescences des Callipteris (Extrait des COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, 1906). In-4° de 3 pages.

Greff. De l'acoustique dans les églises par rapport à la chaire. Un vol. de XII-163 pages. Paris, Lethielleux.

Fr. Guermonprez. Traitement de fractures de membres. Notes par les Drs Guilloux, Eissendeck, Faidherbe, Merveille et Platel. Un vol. in-8° de VIII-1644 pages. Paris, J. Housset, 1906.

A. Guillemin. Tableaux logarithmiques A et B, équivalant à des tables de logarithmes à 6 et à 9 décimales. Une broch. in-8° de 32 pages. Paris, Alcan, 1906.

Haton de la Goupillière. Étude sur les lieux géométriques de centres de gravités (Extrait des COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES). In-4° de 18 pages. Paris, 1906.

Haton de la Goupillière. Centre de gravité du temps de parcours (Extrait des ANNAES DA ACADEMIA POLYTECHNICA DO PORTO, t. I, 1906). Une broch. in-8° de 28 pages. Coimbra, 1906.

J. Hervier. Excursions botaniques de M. Elisée Reverchon dans le massif de la Sagra (Espagne) de 1904 à 1905 (Extrait du BULLETIN DE L'ACADÉMIE INTERNATIONALE DE GÉOGRAPHIE BOTANIQUE). Un vol. in-8° de 87 pages. Le Mans, 1907.

Imbart de la Tour. Le Christianisme et la Paix sociale. Une broch. in-16 de 24 pages. Lyon, Paquet, 1906.

Ch. Janet. Anatomie de la tête du Lasius Niger. Une broch. in-8° de 40 pages. Limoges, Ducourtieux et Gout, 1905.

Ch. Janet. Description du matériel d'une petite installation scientifique. Une broch. in-8° de 36 pages. Limoges, Ducourtieux et Gout, 1903.

E. Jouffret. Mélanges de Géométrie à quatre dimensions. Un vol. in-8° de XI-224 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1906.

Prosper de Laffitte. Essai sur le carré magique de N à N nombres. Une broch. in-8° de 23 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1906.

H. Lammens, S. J. Notes de Géographie syrienne (Extrait des MÉLANGES DE LA FACULTÉ ORIENTALE DE L'UNIVERSITÉ ST JOSEPH, Beyrouth). Un vol. in-8°, pp. 239-283. Beyrouth, imprimerie catholique, 1906.

H. Laurent. La Géométrie analytique générale. Un vol. in-8° de VII-151 pages. Paris, Hermann, 1906.

Le Bachelier. Théorie des probabilités continues (Extrait du JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES). Un vol. in-4°, pp. 259-327. Paris, Gauthier-Villars, 1906.

H. Lebrun. Application de la méthode des disques rotatifs à la technique microscopique (Extrait de la ZEITSCHRIFT FÜR WISSENSCHAFTLICHE MIKROSKOPIE UND FÜR MIKROSKOPISCHE TECHNIK). Pp. 145-173.

C. Lechalas et H. De Lalande. Les Cours d'eau. Hydrologie, législation, 2e édition. Un vol. in-12 de XXIX-367 pages. Paris, Tignol.

M. Lévy. La Statique graphique et ses Applications aux constructions. Première partie. 3e édition. Un vol. in-8° de XVII-598 pages avec Atlas. Paris, Gauthier-Villars, 1907.

C. Maréchal. Le Sucre et les Plantes saccharifères. Un vol. in-8° de 147 pages. Bruxelles, B. Knoetig, 1906.

L. Marchis. Leçons sur la production et l'utilisation des gaz pauvres. Un vol. in-4° de 354 pages. Paris, Dunod et Pinat, 1906.

Jean Mascart. La Découverte de l'anneau de Saturne par Huygens (Extrait de la REVUE DU MOIS). Une brochure in-8° de 58 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1907.

F. Meunier. Contribution à la Faune des Mycetophylidae du copal récent de Zanzibar et de Madagascar (Extrait de LE NATURALISTE). Une broch. in-8° de 7 pages. Paris, 1907.

F. Meunier. Un nouveau genre de Psychodidae et une nouvelle espèce de Dactylolabis (Tipulidae) de l'ambre de la Baltique (Extrait de LE NATURALISTE). Une broch. in-8° de 4 pages. Paris, 1906.

F. Meunier. Pericntomum mortuum Hagen. Archiptère Psocidae du copal fossile de Zanzibar (Extrait de LE NATURALISTE). Une broch. in-8° de 7 pages. Paris, 1906.

F. Meunier. Une nouvelle espèce de *Etoblattina* du houiller supérieur de Fontanes (Extrait du BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ ENTOMOLOGIQUE DE FRANCE). Une broch. in-8° de 4 pages. Paris, 1906.

Ch. Moureu. Notions fondamentales de Chimie organique. 2e édition. Un vol. in-8° de 320 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1906.

Newman. La Foi et la Raison. Six discours empruntés aux discours universitaires d'Oxford. Traduction et préface de R. Saleilles. Un vol. in-8° de XLVII-261 pages. Paris, Lethielleux.

P. Niewenglowski. Précis d'Électricité (Encyclopédie des Travaux Publics fondée par M. C. Lechalas). Un vol. in-8° de II-200 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1906.

A. Nodon. De l'action des différents rayons du spectre sur les plaques photographiques; photographie orthochromatique; plaques jouissant de sensibilité comparable à celle de l'œil (Extrait de la REVUE DES SCIENCES PHOTOGRAPHIQUES, pp. 71-86). Paris, 1906.

M. d'Ocagne. Sur la représentation approchée de la chaînette. Une broch. in-8° de 3 pages.

M. d'Ocagne. Sur la rectification approchée des arcs de cercle. Une broch. in-8° de 5 pages.

M. d'Ocagne. Remarque sur la construction du rayon de giration. Une broch. in-8° de 2 pages.

M. d'Ocagne. Sur la représentation par points alignés de l'équation d'ordre nomographique 3 la plus générale (COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, 28 janvier 1907). In-4° de 3 pages.

Calixto Ornelas. Art de faciliter la science chronologique ou réforme du calendrier (MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ ANTONIO ALZATE, t. 24). Une broch. in-8° de 46 pages. Mexico, 1906.

M. Petit. Découverte et preuve de la pesanteur de l'air (1630). Essais de Jean Rey, docteur en médecine. Édition nouvelle avec commentaire. Un vol. in-8° de XXVII-191 pages. Paris, Hermann, 1907.

Pinchon. Mathématiques. Principes et formules de Trigonométrie rectiligne et sphérique. Un vol. in-8° de 146 pages. Grenoble, Gratier et Rey; Paris, Gauthier-Villars, 1906.

A. Renier. L'État actuel des recherches géologiques exécutées en Europe sous patronage officiel. Première partie (Extrait des ANNALES DES MINES DE BELGIQUE). Un vol. in-8° de 108 pages. Bruxelles, 1907.

A. Renier. Sur la Flore et spécialement sur les Lepidophloios du houiller inférieur belge. (Extrait des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. XXX). Une broch. in-8° de 7 pages. Bruxelles, Polleunis et Ceuterick.

A. Renier. Note préliminaire sur la Flore de l'assise de phtanites (H 1a) des environs de Liége. — Sur la présence de végétaux dans l'assise à Spiriferina octoplicata (T 1 b). — Sur la présence de végétaux dans l'assise H 1a du terrain houiller à Modave et à Ocquier (Extrait des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ GÉOLOGIQUE DE BELGIQUE, t. XXXIII, Mémoires). Une broch. in-8° de 7 pages. Liége, 1906.

A. Renier. La Flore du terrain houiller sans houille (H 1a) dans le bassin du Couchant de Mons (IBIDEM). Une broch. in-8° de 11 pages. Liége 1906.

A. Renier et P. Fourmarier. Pétrographie et paléontologie de la formation houillère de la Campine (IBIDEM). Une broch. in-8° de 42 pages. Liége, 1906.

X. Rocques. Les Industries de la conservation des aliments. Un vol. in-8° de XI-506 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1906.

J. Rodet. Les Lampes à incandescence électriques. Un vol. in-8° de XI-200 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1907.

Cl. Roux. Quelques feuillets du beau livre de la Nature. Causerie faite à la Société des Sciences naturelles de Tarare. Une broch. in-8° de 16 pages. Charlieu, Charpin, 1906.

Cl. Roux. Observations générales et particulières sur la Tératologie des Basidiomycètes. Une broch. in-8° de 11 pages. Lyon, 1906.

Mgr Spée. Observations solaires effectuées à Uccle en 1905 (ANNALES DE L'OBSERVATOIRE ROYAL DE BELGIQUE; ANNALES ASTRONOMIQUES, t. IX, fasc. II). Un vol. in-4°, pp. 83-134. Bruxelles, Hayez, 1906.

J. Thévenin. Hypothèse sur la constitution de la matière. Un vol. in-8° de 45 pages. Paris, Thomas, 1904.

Mgr Touchet. L'Action de l'Église et l'Évolution sociale. Une broch. in-8° de 36 pages. Paris, Lethielleux.

P. Vallet. Les Fondements de la connaissance et de la croyance. Examen critique du Néo-kantisme. Un vol. in-8° de XII-436 pages. Paris, Lethielleux, 1906.

Dr Vervaeck. Contribution à l'étude du tatouage belge (Extrait du BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE). Une broch. in-8° de 26 pages. Bruxelles, Hayez, 1906.

E. Vessiot. Leçons de Géométrie supérieure professées en 1905-1906, rédigées par M. Anzemberger. Un vol. in-4° de 322 pages. Paris, A. Hermann; Lyon, Delaroche et Schneider.

Vial. Les Erreurs de la Science. Un vol. in-8° de 299 pages. Paris, chez l'auteur, 1906.

J. Vialatoux. La Fédération des Groupes d'Études du Sud-Est. Une broch. in-16 de 30 pages. Lyon, Paquet, 1906.

Pierre de Vrégille. L'Observatoire de Sainte-Croix à Marseille. Une broch. in-8° de 15 pages. Paris, Victor Retaux.

Pierre de Vrégille. La Météorologie d'Alexandrie et de Beyrouth (Extrait du BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ BELGE D'ASTRONOMIE). Une broch. in-8° de 28 pages. Bruxelles, 1906.

Pierre de Vrégille. L'Observatoire du Collège de la Trinité à Lyon (1565-1594). Une broch. in-8° de 21 pages. Bruxelles, Polleunis et Ceuterick.

Encyclopédie des Aide-Mémoire publiés sous la direction de M. Léauté, membre de l'Institut. Paris, Gauthier-Villars.

E.-J. Brunswick et M. Aliamet. Construction des induits à courant continu. L'arbre et ses tourillons.

Louis Grillet. L'hygiène du travail dans les établissements industriels et commerciaux.

Louis Grillet. La réglementation du travail dans les établissements industriels.

Louis Grillet. La sécurité du travail dans les établissements industriels et commerciaux.

J. Paraf. Commutatrices et transformateurs électriques tournants.

E. Varenne. L'alcool dénaturé.

Institut de Sociologie Solvay. Bruxelles, Misch et Thron.

E. Brees. Les régies et les concessions communales en Belgique.

G. De Leener. Ce qui manque au commerce belge d'exportation.

L. G. Fromont. Une expérience industrielle de réduction de la journée de travail.

Ch. Henry. Mesure des capacités intellectuelles et Énergétique.

R. Petrucci. Origine polyphylétique, homotypie et non comparabilité directe des sociétés animales.

Ministère de l'Agriculture. Service de santé, hygiène publique et voirie communale. Enquête sur les eaux alimentaires. Rapport de M. J.-B. André. Deuxième partie. Un vol. in-8° de 505 pages. Bruxelles, Lesigne, 1906.

Applications de l'économie politique. Capitaux fixes. Capitaux circulants. Étude économique des bilans. Une broch. in-8° de 18 pages avec carte. Macon, Protat frères, 1907.

Bibliothèque de l'Observatoire royal de Belgique, Uccle. Liste alphabétique et index géographique des revues, journaux et collections périodiques préparés par A. Collard. Un vol. in-4° de 107 pages. Bruxelles, Hayez, 1906.

État actuel des industries électriques. Conférences faites sous les auspices de la Société française de Physique et de la Société d'Encouragement pour l'Industrie nationale. Un vol. in-8° de 247 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1906.

Congrès international pour l'étude des régions polaires tenu à Bruxelles du 7 au 11 septembre 1906 sous le haut patronage du Gouvernement belge. Rapport d'ensemble. Documents préliminaires et comptes rendus des séances. Un vol. in-8° de 311 pages et 10 notes supplémentaires. Bruxelles, Hayez, 1906.

Seconde expédition antarctique belge. Procès-verbaux des séances préliminaires. Une broch. in-8° de 14 pages. Bruxelles, Hayez, 1907.

Royaume de Belgique. Ministère de l'Industrie et du Travail. Office du travail et inspection de l'industrie. Monographies industrielles. Aperçu économique, technologique et commercial. Groupe IV. Industries céramiques. Un vol. in-8° de XVI-242 pages. Bruxelles, Lebègue, Schepens, 1907.

Ministère de la Justice. Statistique judiciaire de la Belgique. Septième année. Un vol. in-4° de LXIX-366 pages. Bruxelles, Larcier, Schepens, 1906.

La production économique de la force motrice, par le bureau technique du M. S. I. (Association d'ingénieurs spécialistes). 1re partie. Les forces naturelles (Le soleil, le vent, l'eau). 2e partie. Les forces artificielles (Moteurs et

turbines à vapeur et à gaz). Deux broch. in-8° respectivement de 58 et 43 pages. Paris et Liége.

L. de Ball. Die Radau'sche Theorie der Refraktion. Un vol. de 60 pages in-8°. Wien. 1906.

Bandelier. Aboriginal Myths and Traditions concerning the Island of Titicaca, Bolivia (AMERICAN ANTHROPOLOGIST, vol. 6, n. 2). Une broch. in-8° pp. 197-239.

B. Carrara, S. J. La Matematica associata alla religione. Une broch. in-4° de 16 pages. Roma, 1907.

H. Coelho. O Poder Legislativo e o Poder Executivo no direito publico brazileiro. Un vol. in-8° de 305 pages. S. Paulo, 1905.

G. Costanzo. Di un nuovo metodo per la determinazione del coefficiente di dilatazione dei liquidi. (Extrait des ATTI DELLA PONTIFICIA ACCADEMIA ROMANA DEI NUOVI LINCEI). Une broch. in-8° de 2 pages.

G. Costanzo e C. Negro. Sulla radioattivita della neve (IBIDEM). Une broch. in-8° de 7 pages.

G. Costanzo et C. Negro. Sull' ecclisse di Sole del 30 Agosto 1905 (Extrait de la RIVISTA GEOGRAFICA ITALIANA). Une broch. in-8° de 8 pages. Firenze, 1906.

G. Costanzo. Über eine neue Methode, den Ausdehnungskoefficienten von Flüssigkeiten zu bestimmen (Extrait du PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT). In-4° de 2 pages. Leipzig.

G. Costanzo und C. Negro. Ueber die Radioactivitat des Schnees (IBIDEM). In-4° de 3 pages. Leipzig.

W. De Veer, S. J. Lezingen en toespraken. Tweede Bundel. Un vol. in-8° de 219 pages. Amsterdam, E. Van der Vecht.

Duran Loriga. Nota necrologica acerca del matematico Belga Teniente General Jose Maria De Tilly (Extrait de la GACETA DE MATEMATICAS). In-8° de 3 pages. La Coruna, 1906.

J. M. Dusmet y Alonso. Himenopteros de la Sierra de Abbarracin, Calamocha y Catalayud (BOLETIN DE LA SOCIEDAD ARAGONESA). Pp. 100-111.

J. M. Dusmet y Alonso. Los « Sphex » de Espana (Boletin de la REAL SOCIETAD ESPANOLA DE HISTORIA NATURAL). Pp. 501-518.

Gemelli. Contributo alla Conoscenza dell' struttura delle cellule nervose (Extrait de la REVISTA SPERIMENTALE DI FRENIATRIA). Une broch. in-8° de 15 pages avec 1 planche. 1906.

Gemelli. Contributo alla conoscenza dell'ipofisi (Extrait des MEMORIE DELLA PONTIFICIA ACCADEMIA ROMANA DEI NUOVI LINCEI). Une brochure in-4° de 24 pages. Rome, 1906.

Gemelli. Conflitto di Tendenze (Extrait de LA SCUOLA CATTOLICA DI MILANO). Une broch. in-8° de 32 pages. Monza, 1906.

Gemelli. Ulteriori osservazioni sulla struttura dell' ipofisi (Extrait de ANATOMISCHER ANZEIGER). Une broch. in-8° de 16 pages. Iena, 1906.

Gemelli. Su l'ipofisi delle marmotte durante il letargo e nella stagione estiva (Extrait de ARCHIVIO PER LE SCIENCE MEDICHE). Une broch. in-8° de 9 pages.

Gemelli. Nuove osservazioni su l'ipofisi delle marmotte durante il letargo e nella stagione estiva (Extrait de BIOLOGICA). Une broch. in-8° de 17 pages. Torino, 1906.

Gemelli. Su di un nuovo indirizzo della teoria dell' evoluzione (Extrait de LA SCUOLA CATTOLICA DI MILANO). Une broch. in-8° de 81 pages. Monza, 1906.

Gemelli. Ricerche sperimentali sullo sviluppo dei Nervi degli arti pelvici di « Bufo Vulgaris » innestati in sede anomala (Extrait des RENDICONTI DEL R. IST. LOMB. DI SC. E LETT.). In-8° de 5 pages. Milan, 1906.

Gemelli. I processi della secrezione dell' ipofisi dei Mammiferi (Extrait de ARCHIVIO PER LE SCIENZE MEDICHE). Une broch. in-8° de 30 pages. Torino, 1906.

Gemelli. Per l'Evoluzione (Extrait de REVISTA DI FISICA, MATEMATICA E SCIENZE NATURALI). Une broch. in-8° de 28 pages. Pavia, 1906.

Gemelli. Sulla fine struttura dei calici di Meld (Extrait de ATTI DELLA PONTIFICIA ACCADEMIA ROMANA DEI NUOVI LINCEI). Rome, 1906.

P. Getino. El Averroismo teologico de Santo Tomas de Aquino. Un vol. in-8° de 111 pages. Vergara, 1906.

M. Hagen, S. J. Cursus scripturae Sacrae auctoribus Cornely, Knabenbauer, de Hummelauer aliisque Soc. Jes. presbyteris. Lexicon biblicum. Vol. I (A-G). Un vol. in-8° de 1039 pages. Paris, Lethielleux.

R. Handmann, S. J. Mikroskopische Bilder aus des höher organisierten Pflanzenwelt. Un vol. in-8° de 240 pages. Regensburg, Manz, 1906.

R. Handmann, S. J. Mikroskopische Bilder aus dem Zelleben und des niederen Tier- und Pflanzenwelt. Un vol. in-8° de 244 pages. Regensburg, Manz, 1906.

G. Henriksen. Sundry Geological Problems. Une broch. in-8° de 18 pages. Christiana, Grondahl, 1906.

August Keindorff. Die Zustandsgleichung der Dämpfe, Flüssigheiten und Gaze. Un vol. in-8° de 61 pages. Leipzig, Teubner, 1906.

Ernst Mach. Space and Geometry in the Light of Physiological, Psychological, and Physical Inquiry. From the German by Cormarck. Chicago, 1906.

Martinez. Dios Creador, Dios Redentor. Discurso con motivo de la fiesta que los Ingenieros de Minas dedican a su Patrona Santa Barbara. Une broch in-8° de 39 pages. Madrid, Enrique Teodoro, 1907.

de Mello. Vinte e um Mezes ao redor do Planeta. Descripçao da viagen de circumnavegaçao do cruzador « Almirante Barroso ». Un vol. in-8° de 412 pages. 1896.

W. Meyerhoffer. Gleichgewichte der Stereomeren. Une broch. in-8° de 71 pages. Leipzig, Teubner, 1906.

Longino Navas, S. J. El abate Boulay. Datos biograficos. Une broch. in-8° de 8 pages. Barcelona.

Longino Navas, S. J. Reglas de Nomenclatura Botanica propositas en el Congreto de Viena de 1895 (Extrait de MEMORIAS DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES DE BARCELONA). Une broch. in-4° de 30 pages. Barcelona.

W. F. Osgood. Lehrbuch der Functionentheorie. Erster Band, zweite Hälfte. Un vol. in-8°, pp. 307-652. Leipzig und Berlin, Teubner, 1907.

Perez del Pulgar, S. J. La Teoria del potencial y la curvatura del Espacio. (Extrait de la ENERGIA ELECTRICA). Une broch. in-4° de 19 pages. Madrid, 1907.

G. Petit-Bois. Tafeln unbestimmter Integrale. Un vol. in-4° de XII-154 pages. Leipzig, Teubner, 1906.

Th. Ribot. Essay on the Creative Imagination. Translated from the french by Baron. Un vol. in-8° de XIX-370 pages. Chicago, 1906.

Russell. A Treatise on the Theory of alternating Currents. Vol. II. Un vol. in-8° de XII-488 pages. Cambridge, 1906.

M. Simon. Ueber die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIXe Jahrhundert. Un vol. in-8° de VIII-278 pages. Berlin, Teubner, 1906.

Wasmann, S. J. Die moderne Biologie und die Entwicklungstheorie. Un vol. in-8° de XXX-530 pages. Freiburg im Breisgau, 1906.

Wasmann, S. J. La biologia moderna e la teoria dell' evoluzione. Versio italiana di fr. Ag. Gemelli. Un vol. in-8° de CVII-467 pages. Firenze, 1906.

Weinstein. Die philosophischen Grundlagen der Wissenschaften. Un vol. in-8° de XIV-543 pages. Leipzig und Berlin, Teubner, 1906.

Wünsche, Neumann, Altschuler. Monumenta judaica : altera pars. Monumenta Talmudica. Erste serie. Bibel und Babel. Erster Band. Erster Heft. Un vol. in-4° de LXIX-10 pages. Wien und Leipzig, 1906.

Annoucement : University of California Publications. Une broch. in-8° de 22 pages. Berkeley, 1905.

Brazil at the Louisiana purchase Exposition. Un vol. in-8° de 184 pages. Saint-Louis, 1904.

Relatorio. O Brasil na exposiçao da Compra da Luisiana. St Luiz 1904. Un vol. in-8° de 416 pages. Rio de Janeiro, 1906

Bibliotheca nacional. Catalogo da Collecçao Salvador de Mendonça. Un vol. in-4° de 126 pages. Rio de Janeiro, 1906.

A Bibliotheca nacional im 1904. Relatorio. Un vol. in-4° de 44 pages. Rio de Janeiro, 1906.

Documentos relativos à Mem de Sa, Governador geral do Brasil. Un vol. in-4° de 152 pages. Rio de Janeiro, 1906.

Report of the library Syndicate of the Cambridge University. Library for the Year 1905. Une broch. in-4° de 26 pages. Cambridge, 1906.

II. Périodiques

Académie des Sciences. Comptes rendus hebdomadaires des séances (1907). Paris.

Académie royale de médecine de Belgique :
Bulletin, 4e série, t. XX (1906). Bruxelles.
Mémoires, t. XIX, fasc. 1.
Procès-verbaux des séances de l'année 1906. Bruxelles.

Annales de la Faculté des sciences de l'Université de Toulouse, 2e série, t. VIII (1906). Toulouse.

Annales de la Société géologique de Belgique, t. XXX, 3e livr.; t. XXXIII, 3e livr. t. XXXIV, 1re livr. Liége.

Annales de la Société belge de microscopie, t. XXVII, fasc. 2. Bruxelles.

Annales de Philosophie chrétienne (1907). Paris.

Annuaire astronomique de l'Observatoire royal de Belgique pour 1907. Bruxelles.

Annuaire météorologique de l'Observatoire royal de Belgique pour 1907. Bruxelles.

Annuaire pour l'an 1907 publié par le Bureau des Longitudes. Paris.

L'Anthropologie, t. XVIII (1907). Paris.

Bulletin de la Société astronomique de France (1907). Paris.

Bulletin de la Société belge d'astronomie (1907). Bruxelles.

Bulletin de la Société bibliographique et des publications populaires (1906). Paris.

Bulletin de la Société belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie. 20e année, t. XX, fasc. 5 (1906). Bruxelles.

Bulletin de la Société centrale forestière de Belgique (1907). Bruxelles.

Bulletin de la Société chimique de Belgique (1907). Bruxelles.

Bulletin de la Société belge d'Électriciens 1906. Bruxelles.

Bulletin de la Société mathématique de France, t. XXXIV (1906). Paris.

Bulletin de la Société médicale de Saint-Luc, Saint-Côme et Saint-Damien (1907). Paris.

Bulletin de la Société royale belge de géographie (1907). Bruxelles.

Bulletin des observations magnétiques et météorologiques de l'Observatoire de St-Louis (1906). Saint-Louis.

Bulletin des séances de la Société des sciences de Nancy, 3e série, t. VII, fasc. 2. Nancy.

Bulletin des séances de la Société française de physique (1906). Paris.
Ciel et Terre (1906-1907). Bruxelles.
Cosmos (1907). Paris.
Études (Revue fondée par les Pères de la Compagnie de Jésus) 1907. Paris.
Journal de l'École Polytechnique, 2e série, 11e cahier (1906). Paris.
Journal des sciences médicales de Lille (1907). Lille.
Le mois scientifique et industriel (1906). Paris.
La Nouvelle-France (1907). Québec (Canada).
Observatoire royal de Belgique :
Annales. Nouvelle série :
Annales astronomiques, t. IX, fasc. 2 et 3.
Physique du globe, t. III, fasc. 2.
Bulletin météorologique de l'Observatoire royal de Belgique. 1906.
Polybiblion. Partie littéraire et Partie technique (1907). Paris.
Le Progrès médical (1907). Paris.
Rapport annuel sur l'état de l'Observatoire de Paris pour 1905. Paris.
La Réforme sociale (1907). Paris.
Revue de l'Ingénieur (1906). Bruxelles.
Revue Minéralurgique, 1906 et 1907. Paris.
Revue de philosophie (1907). Paris.
Revue générale (1907). Bruxelles.
Revue Néo-Scolastique (1907). Louvain.
Revue Philosophique (1907). Paris.
Revue pratique d'Apologétique (1907). Paris.
Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux :
Procès-verbaux des séances, années 1905-1906. Bordeaux.
Cinquantenaire de la Société, 15-16 janvier 1906.
Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le département de la Gironde de juin 1905 à mai 1906.
Union des Ingénieurs sortis des Écoles Spéciales de Louvain (1906). Bruxelles.
L'Université catholique (1907). Lyon.
Institut grand ducal de Luxembourg. Section des sciences naturelles, physiques et mathématiques. Archives trimestrielles, fasc. I et II (janv.-juin 1906). Luxembourg.
Revue semestrielle des publications mathématiques, t. XIV, 2e partie; t. XV, 1re partie. Amsterdam, 1907.
Nieuw archief voor Wiskunde, tweede reeks, zevende deel, 3e stuk. Amsterdam.
Wiskundige opgaven met de oplossingen, nieuwe reeks, negende deel, 5de stuk. Amsterdam.
Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Amsterdam :
Verslag van de gewone vergaderingen 1904-1905.
Jaarboek 1904.
Verhandelingen :
1e sectie, Deel IX, n. 2, 3.-2e sectie, Deel XII, n. 3.
Atti della reale Accademia dei Lincei, vol. XV et XVI. Roma.
Civiltà cattolica (1907). Roma.

Rivista di Fisica, Matematica e Scienze naturali (1907). Pavia.
Rivista internazionale di Scienze sociali e discipline ausiliarie (1907). Roma.
La Scuola cattolica (1907). Milano.
Anales del Museo nacional di Montevideo, publicados bajo la direccion de J. Arechavaleta, sér. II, t. III entr. 1. Montevideo.
Anuario del Observatorio astronómico nacional de Tacubaya para el año de 1907. Mexico.
Arhiva, vol. XVIII. Jasi.
Boletin de la Sociedad Aragonesa de Ciencias naturales (1906). Barcelone.
Boletin del Instituto Geologico de Mexico. Num. 22. Mexico, 1906.
Broteria. Revista de sciencias naturales, vol. IV. S. Fiel.
El critério católico en las Ciencias medicas (1907). Barcelona.
Memorias y Revista de la Sociedad cientifica « Antonio Alzate », t. XXIII (1906). Mexico.
Razón y Fe (1907). Madrid.
Annaes de Bibliotheca nacional de Rio de Janeiro, vol. XXVII (1905). Rio de Janeiro (Brésil).
Annuario publicado pelo Observatorio do Rio de Janeiro para o anno de 1906. Anno XXII. Rio de Janeiro (Brésil).
Boletin mensal do Observatorio do Rio de Janeiro (1905). Rio de Janeiro (Brésil).
Matto Grosso. Revista mensal (1906 et 1907). Cubaya.
The Damian Institute (1907). Birmingham.
The Month (1907). London.
The American Catholic Quaterly Review (1907). Philadelphia.
Bulletin of the University of Kansas. Science. Bulletin. Vol. III, n. 1-6, 7-10.
The University Geological Survey of Kansas. Vol. VIII. 1904.
Mineral resources of Kansas. 1902, 1903.
American Journal of Mathematics, vol XXVIII (1906). Baltimore.
The American Museum of Natural History. New-York :
Memoirs, vol. IX, part. 2, 3.
American Mathematical Society. New-York :
Annual Register (january 1907).
Bulletin (1907).
Bulletin of the Geological Institution of the University of Upsala. Vol. VII (1905-1906) n. 13 et 14. Upsala.
Bulletin of the Philippine Weather Bureau (Manila central Observatory), 1906. Report of the Director (1903). Manila.
Catholic World (1907). Washington.
Missouri Botanical Garden. Seventeenth Report (1906). Saint-Louis.
Proceedings and Transactions of the Nova Scotian Institute of Science, vol. XI. Part 2 (1903-1904). Halifax (Nova Scotia).
The royal Society of Edinburgh :
Proceedings, vol XXVI.
Smithsonian Institution :
Annual Report, 1905. Washington.
Transactions of the Academy of Science of St-Louis, vol. XV, 6, vol. XVI, 1 à 7.

United States Geological Survey. Washington :
Twenty-Seventh annual report, 1905-1906.
Bulletin, n°s 275, 277, 278, 280-285, 288-293, 295, 298, 299, 302.
Professional Papers, n°s 45-47, 49, 51, 52, 54, 55.
Water-Supply Papers, n°s 153-186.
Western Australia. Geological Survey. Bulletin n. 21-25.
New South Wales Statistical Register for 1905 and Previous Years P. 1, 2, 5, 7-10, 12, 14.
Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie (1907). Berlin.
Bibliotheca mathematica (1906). Leipzig.
Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen (1906, 1907). Stuttgart.
Naturforschende Gesellschaft in Basel. Verhandlungen. Band XVIII. Heft 2. Basel.
Kungl. Vitterhets historie och Antikvitets Academien. Stockholm.
Fornvannen (1906).
Manadsblad 32-34 arg. (1903-1905).
Journal de la Société physico-chimique russe de l'Université impériale de Saint-Pétersbourg (en russe) t. XXXIX (1907). Saint-Pétersbourg.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

ANTHROPOLOGIE DE LA WESTFLANDRE

PAR

l'abbé J. CLAERHOUT

INTRODUCTION

Au Congrès d'Histoire et d'Archéologie, tenu à Bruges en 1902, M. V. Jacques, secrétaire de la Société d'Anthropologie de Bruxelles, posa la question suivante : « Quelle est l'origine de la population de la Westflandre? » Nous ne pouvions évidemment la résoudre au pied levé, mais nous pouvions fournir les points à préciser par des études ultérieures et dresser le canevas d'un travail à documenter un jour.

Avant tout, il fallait dégager les éléments que comporte la notion si complexe de population. Nous avons vu alors qu'il y avait de fait une double question à résoudre. La première est la suivante : Quelles sont les races qui ont peuplé la Flandre Occidentale? Ceci est du domaine de l'anthropologie. La seconde relève de l'ethnologie : d'où sont venus les peuples dont nous apercevons dans cette population les diverses couches superposées?

L'ethnogénie de la province devait s'appuyer sur l'étude des races, parce que cette étude est de nature à projeter quelque

lumière sur l'origine des peuples et que l'anthropologie, sans se confondre avec l'ethnologie, peut l'éclairer et la guider.

De là ce modeste opuscule sur l'anthropologie de la Westflandre, pour la composition duquel nous avons obtenu le bienveillant concours de la Société scientifique et les précieux encouragements de nos savants confrères.

Encore un mot de la méthode que nous avons suivie.

Si l'ethnologie peut puiser d'utiles renseignements dans les résultats des recherches anthropologiques, nous estimons toutefois que l'anthropologie est une science indépendante et que l'ethnologie, ou la science de l'origine des peuples, ne peut lui imprimer aucune direction. Elle a ses propres principes; elle doit analyser les caractères des races et en dresser le bilan sans aucune idée préconçue, sans aucun sentiment de nationalité, sans aucune préoccupation d'origine ethnique, sans aucune prévention linguistique. Précisons notre opinion : parce qu'une population semble d'origine germanique, parce qu'elle a été sujette ou réfractaire à l'influence romaine, parce qu'elle appartient à telle nationalité ou parle telle langue, ce n'est pas un motif pour qu'un caractère quelconque de race y prédomine.

Il faut éviter aussi les dénominations qui sont du domaine de l'ethnologie et qui ont parfois donné lieu à de regrettables malentendus et provoqué beaucoup de discussions stériles; nous donnons la préférence aux termes géographiques et nous avouons ne pas aimer non plus les vocables archéologiques, à moins qu'il ne soit question de races préhistoriques des temps paléolithiques, parce que cette terminologie est consacrée par l'usage et confinée dans des limites restreintes.

CHAPITRE PREMIER

ÉTUDE DU MILIEU

Il est difficile de déterminer l'influence des causes extérieures, susceptibles d'amener des variations dans les caractères d'une population; il importe toutefois de les faire connaître (*). C'est

(*) W. J. Ripley. *The Races of Europe*. London, 1900, pp. 1-14. — P. Topinard. *Éléments d'Anthropologie générale*. Paris, 1885, pp. 45, 82 et *passim*.

pourquoi nous débutons par une description sommaire de la Flandre Occidentale.

GÉOGRAPHIE PHYSIQUE. — La Westflandre est bornée au nord-ouest par la mer du Nord; à l'est par la Zélande et la Flandre Orientale; au sud-est par le Hainaut et au sud-ouest par le département du Nord (*).

Elle a une superficie de 3233 kilomètres carrés.

Son altitude moyenne est de 20 mètres. La plaine maritime, horizontale et presque dénudée, est constituée de vastes pâturages et s'appelle *het bloote* ou région sans arbres, dans le langage populaire. Le reste de la province est appelé *het houtland*, région plantée d'arbres. Des plateaux bas et des collines forment la ligne de partage entre le versant côtier et le versant de l'Escaut. Cette ligne part du mont Kemmel, où elle atteint son point culminant à 162 mètres, s'abaisse à moins de 40 mètres au sud d'Ypres, s'élève à 55 mètres à Passchendaele, à 50 mètres à Hooglede et aux environs de Thielt et descend à moins de 10 mètres sur les limites de la Flandre Orientale. Un second relief forme le partage entre les eaux de la Lys et de l'Escaut, de Mouscron, 85 mètres, à Worteghem dans la Flandre Orientale. Un relèvement isolé de 51 mètres se voit à l'ouest de Thourout.

Deux versants se partagent la province : le versant côtier, arrosé par l'Yser, qui reçoit l'Yperlée, et le versant de l'Escaut, qui longe la Westflandre depuis Espierre jusqu'à Kerckhove. La Lys, affluent de l'Escaut, baigne Warneton, Wervicq et Menin, sur la frontière française, puis Courtrai et Harlebeke; sur la limite de la Flandre Orientale, elle reçoit la Mandel, qui s'y jette par deux bras, après avoir baigné Roulers, Iseghem et Ingelmunster. Cette petite rivière n'est ni navigable, ni canalisée comme l'enseignent la plupart des auteurs. Tous ces cours d'eaux reçoivent de nombreux ruisseaux, qui coulent dans des dépressions de terrains et sont bordés de prairies; ces prairies recouvrent des alluvions et des couches tourbeuses, qui reposent sur les sables flandriens et renferment parfois des vestiges allant de l'âge néolithique à l'époque romaine. De

(*) Plusieurs détails sont empruntés à Alexis-M. G. *Cours Supérieur de Géographie*. Édition annuelle, 1re partie.

légères éminences forment des versants sur les bords de ces prairies.

En 1880, la province comptait encore environ 11 000 hectares de bois, soit 3,4 p. c. de l'étendue de son territoire. Ces bois, composés de taillis, de futaie et de sapinières, sont situés entre Poperinghe et Westvleteren, au sud de Dixmude, où l'on rencontre la vaste forêt de Houthulst, à la lisière de laquelle habite une tribu de nomades, dans un fourmillement de petites cabanes, sur l'emplacement d'une station néolithique, entre Thourout et Bruges, sur le territoire de Sysseele, entre Wyngene, Beernem, Ruddervoorde et Swevezeele (*).

Il y a de grands étangs à Zillebeke, à Dickebusch et à Woumen.

Dans la Flandre maritime, à Ostende, le roc primaire a été rencontré à la profondeur de 300 mètres. Au-dessus viennent des dépôts crétacés, épais de 90 mètres; puis se développent sur 166m,5 les étages tertiaires Landénien et Yprésien, appartenant à l'Éocène inférieur. Au-dessus de l'Yprésien on rencontre le quaternaire flandrien sur 26 mètres, puis, au sommet, les dépôts modernes, épais de 5 mètres, constitués par la tourbe et plusieurs alluvions marines (**).

Dans l'autre partie de la province, le limon hesbayen s'est déposé pendant la période pleistocène; sur ce limon se sont étendus les sables marins du flandrien; ces sables dominent dans la partie septentrionale, tandis qu'en allant vers le sud, on rencontre des strates limoneuses de plus en plus fréquentes (***). Le sous-sol se compose, suivant les régions, de l'étage Yprésien ou de l'étage Panisélien (IV).

La Flandre Occidentale comprend trois zones agricoles : la zone poldérienne est constituée par des terrains argileux, extrêmement fertiles; ils forment une bande, d'une largeur de 10 à 15 kilomètres, qui s'étend de Furnes à Bruges, parallèlement à la mer et se dirige vers la Zélande; la zone sablonneuse occupe la partie médiane de

---

(*) ANNUAIRE STATISTIQUE, 35e année, 1904. Bruxelles, 1905, pp. 294-295.

(**) A. Rutot, *Sur les Antiquités découvertes dans la partie belge de la plaine maritime*. Bruxelles, 1903, p. 2.

(***) A. de Lapparent. *Traité de Géologie*, 4e édition. Paris, 1900, p. 1627.

(IV) G. Dewalque. *Carte géologique de la Belgique*. Voir aussi les nouveaux levés de M. Rutot.

la province; elle est limitée au nord par la zone poldérienne et au sud par une ligne allant de Dixmude à Ypres et à Courtrai, dans la direction d'Audenarde; nous préférons cette limite à celle d'auteurs plus récents, qui tracent la ligne de séparation de Dixmude à Thielt et à Cruyshautem et ajoutent ainsi à la zone limoneuse une bande sablo-limoneuse (*). Cette deuxième zone est naturellement maigre et siliceuse, mais l'industrie active des habitants a pu amender le sol et le fertiliser. Elle produit en abondance des céréales, surtout le seigle, des plantes fourragères et des plantes industrielles. La troisième zone, la zone limoneuse, s'étend au sud de la zone sablonneuse; elle est recouverte par une couche plus ou moins épaisse de limon hesbayen, qui la rend d'une grande fertilité et propre aux plus riches récoltes, surtout à la culture du froment.

Ostende, à une altitude de 7 mètres, a une température moyenne de 10°; elle est plus élevée sous l'influence du voisinage de la mer; Ypres, à une altitude de 20 mètres, a une température moyenne de 9°,8. En 1903 on a relevé à Ostende 199 jours de pluie, 737 millimètres d'eau, 8 jours de forte gelée de —5° et au-dessous, 40 jours de gelée et 14 jours de forte chaleur de 25° et au-dessus (**).

Population. — La population de la Westflandre s'élevait, au 31 décembre 1904, à 845 732 âmes; elle était de 261 habitants par kilomètre carré (***). La population est bien plus dense au sud-est qu'au nord-ouest de la province. Comparons par exemple les deux arrondissements de Furnes et de Courtrai. La population est dans le premier arrondissement de 128 habitants, tandis que dans le second arrondissement, la population est de 457 habitants par kilomètre carré (iv).

Le nombre des indigents, qui ont reçu des secours permanents ou temporaires, s'est élevé, en 1904, à 81 683 (v).

(*) Ministère de l'Agriculture. *Monographie agricole de la Région limoneuse et sablo-limoneuse*. Bruxelles, 1901, p. 1

(**) Annuaire Statistique de la Belgique, 35e année, 1904. Bruxelles, 1905, pp. 2, 3.

(***) *Rapport sur l'État de l'Administration dans la Flandre Occidentale, fait par la Députation permanente au Conseil provincial.* Session de 1905. Bruges, 1905, p. 5.

(iv) *Ibid.*, p. 15.

(v) *Ibid.*, p. 101.

Durant l'année 1904, le nombre des naissances s'est élevé à 33,73 et le nombre des décès à 21,95 par 1000 habitants (*). En 1903, on a compté 71 mariages par 10 000 habitants (**).

La majorité des habitants de la Westflandre parlent le dialecte westflamand qui est regardé comme friso-franc (***). Quand la science aura enregistré les données de la phonétique de ce dialecte, il faudra distinguer plusieurs sous-dialectes et l'on saura en quelle mesure le frison, le saxon et le bas-franc occidental ont contribué à sa formation ; ce dialecte a conservé les sons et le riche vocabulaire du néerlandais du moyen âge, de la langue si originale et si colorée de Maerlant et de Ruysbroeck ; à l'est et au sud de la province, quelques villages appartiennent au dialecte de la Flandre Orientale, qui est le bas-franc occidental pur ; la ligne de séparation, entre les deux dialectes, passe par Lapscheure, Saint-Georges, Ruysselede, Caneghem, Marckeghem, Vive Saint-Bavon, où elle atteint la Lys pour la suivre jusqu'à Courtrai et continuer ensuite par Belleghem jusqu'à Herseaux, où l'on parle le wallon (IV).

On parle le wallon à Ploegsteert, Warneton, Commines et Houthem ; on le parle aussi à Mouscron, Herseaux, Dottignies et dans une partie d'Espierres.

La bourgeoisie des villes parle indifféremment le flamand et le français ; cette dernière langue tend aussi à se répandre à la campagne, où nombre de commerçants, de cultivateurs et d'ouvriers la comprennent et la parlent plus ou moins bien ; la langue véhiculaire de l'enseignement moyen est le français, que l'on enseigne dans les classes supérieures des écoles populaires. Nous attirons l'attention sur ce détail, parce qu'en aucun pays, sans doute, on n'enseigne deux langues à l'école populaire.

Voici la répartition des habitants, pour les langues parlées, d'après les recensements généraux : 18 000 personnes de 15 ans,

---

(*) *Rapport sur l'État de l'Administration dans la Flandre Occidentale*, p. 5.

(**) ANNUAIRE STATISTIQUE DE LA BELGIQUE, 35e année, 1904. Bruxelles, 1905. p. XX.

(***) Hermann Paul, *Grundriss der Germanischen Philologie*. T. I, p. 638.

(IV) L. L. De Bo. *Westvlaamsch Idiotion*. Brugge, 1873, p. V. Les limites indiquées par De Bo ne sont pas tout à fait exactes.

ne parlent que le français ; 405 000 ne parlent que le flamand ; plus de 104 000 parlent le français et le flamand (*).

La population scolaire de l'enseignement primaire, dans les écoles soumises à l'inspection de l'État, s'élevait, au 31 décembre 1904, à 32 023 enfants; le nombre des miliciens, ne sachant ni lire, ni écrire, était, en 1904, de 11,41 p. c. (**) ; cette proportion est trop élevée et nous n'ajoutons pas foi à cette statistique ; quelques miliciens répondent non, quand on leur demande s'ils savent lire ou écrire, parce qu'ils craignent qu'on les fasse lire ou écrire s'ils répondent affirmativement et qu'ils ne tiennent pas à se soumettre à cet examen. Un grand nombre d'employés communaux, préposés à cette enquête, ne sont pas compétents pour la mener à bonne fin.

Les habitants de la Westflandre professent la religion catholique. Ils sont très attachés à la religion et au sol natal. Dans la plaine maritime, les habitants se distinguent des autres Flamands par la grande propreté de leurs demeures et de leurs meubles, qui rappelle la propreté proverbiale des Frisons; ils sont d'apparence plus froide et plus flegmatique que les habitants des autres régions, qui sont d'un commerce plus agréable et d'un tempérament plus vif.

En 1895, la population agricole, cultivateurs, domestiques et ouvriers compris, était de 182 885 personnes, soit 23,72 p. c. de la population entière (***). Le taux moyen des salaires des ouvriers agricoles était de fr. 1,68 sans la nourriture, et de fr. 0,94 avec la nourriture (IV). La plupart des ouvriers agricoles ont aussi d'autres ressources : ils cultivent un lopin de terre, élèvent des poules, des chèvres et des lapins, ont des membres de leur famille occupés aux travaux industriels et à la confection de la dentelle ou vont en France chercher des salaires plus élevés. Le lard, la graisse, le beurre, le pain de froment et la pomme de terre constituent la base de leur alimentation. Bien des ménages, cependant, doivent se contenter d'un peu de lard, à de rares intervalles.

(*) ANNUAIRE STATISTIQUE DE LA BELGIQUE, 35e année, 1904. Bruxelles, 1905. p. 88.

(**) IBID., p. 226.

(***) IBID., p. 286.

(IV) IBID., p. 287.

Le nombre et la répartition des exploitations agricoles sont consignés dans le tableau suivant, d'après le recensement agricole de 1903 :

Catégorie	Nombre.
De 1 hectare et au-dessous	802
De 1 à 2 hectares	7203
» 2 à 3 »	4369
» 3 à 4 »	3143
» 4 à 5 »	2267
» 5 à 7 »	2882
» 7 à 10 »	2869
» 10 à 15 »	2656
» 15 à 20 »	1755
» 20 à 30 »	1927
» 30 à 40 »	695
» 40 à 50 »	284
» 50 à 100 »	238
» 100 à 150 »	8
De plus de 150 hectares	4
Total	31 102 (*)

On comptait, en 1896, 57 900 entreprises industrielles, qui occupaient 109 500 personnes et utilisaient une puissance de 32 000 chevaux-vapeur (**).

La toponymie est très intéressante : plusieurs noms de villages peuvent nous fournir des renseignements ethnologiques.

(*) *Statistique de la Belgique. Recensement agricole de 1903*, publié par le Ministère de l'Agriculture. Bruxelles, 1904, p. 57.

La situation pour nombre de villages est analogue à celle de Mendonck, décrite par M. Houzé, dans les termes suivants : « La généralité des habitants s'occupe du travail des champs ; quelques-uns vont en hiver, à la sucrerie de Terdonck. La culture est morcelée, le bétail disséminé... La nourriture se compose de pommes de terre, de pain, de graisse ou de beurre et d'un peu de viande. » E. Houzé, *Enquête anthropologique sur le village de Mendonck*. Bruxelles, 1897. (Extrait du BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ D'ANTHROPOLOGIE DE BRUXELLES, t. XV, 1896-1897), p. 3.

(**) ANNUAIRE STATISTIQUE DE LA BELGIQUE, 35e année, 1904. Bruxelles, 1905, p. 323.

Dans la région sablo-limoneuse, un grand nombre de dénominations sont d'origine franque et nous conservent le souvenir des lignages francs qui, à la chute de l'empire romain, ont essaimé sur notre territoire. Les habitations rurales, disséminées à la campagne, suivant le *Hofsystem*, présentent souvent le type de la ferme franque, caractérisé par l'aménagement des bâtiments autour d'une cour carrée et fermée. Lors du partage des terres qui leur sont échues, les Francs ont été vraisemblablement attirés par la colonisation belgo-romaine, dont on observe les vestiges dans plusieurs de ces villages francs, et les centres d'occupation belgo-romaine correspondent très souvent à des bourgades primitives, où l'on signale des stations néolithiques et même parfois des habitations palafittiques.

Dans la plaine maritime, il y a un double sol; le sol primitif occupe les couches supérieures de la tourbe, qui renferment des antiquités romaines et préromaines; le sol actuel est postérieur aux invasions marines, qui ont suivi l'époque romaine et qui ont été combattues et endiguées pendant le moyen âge; certaines localités, comme Knocke et Wenduyne, datent de l'époque primitive et ont survécu à l'envahissement marin; la plupart datent du haut moyen âge; dans leurs noms, la terminaison *kerke* ou *kapel*, accompagne souvent le prénom du colon frison. Signalons l'exemple de Stuyvekenskerke, *Stuwekinskerke*; on y a exhumé des antiquités romaines; le prénom *Stuwekin*, génitif *Stuwekins*, est le diminutif de *Stuve*, qui est un prénom frison (*). Ces influences frisonnes se manifestent en outre dans le type des habitations rurales et dans l'usage de la coiffure et du bandeau frisons, portés encore par quelques vieilles femmes du nord de la province (**).

Telles paraissent être les origines de cette population, dont nous nous proposons d'étudier les caractères physiques et dont nos derniers historiens viennent de retracer la vie sociale dans ses manifestations si variées. Elle vit toujours heureuse et prospère, active et vaillante, éprise d'art et de liberté, fidèle à ses traditions, sur

---

(*) Johan Winkler, *Friesche Naamlijst*. Leeuwarden, 1898, p. 372.

(**) J. Claerhout, *Sur un ornement frison, trouvé à Dudzeele*. Dans Bulletin de la Société d'Anthropologie de Bruxelles, t. XX, 1901-1902. Bruxelles, 1902, p. CVII.

le territoire de cet antique comté de Flandre qui a autrefois étonné le monde par la fertilité de son sol, réputé le jardin de l'Europe, par la richesse et l'étendue de son commerce, par l'efflorescence de ses arts et la splendeur de ses monuments civils et religieux. Qui sait ce que l'avenir réserve à la Venise du Nord, qui a conservé sa renommée comme héritière des souvenirs incomparables d'un passé glorieux!

Pour notre enquête anthropologique, nous partageons la West-flandre en deux régions : à la première appartient la plaine maritime; nous y ajoutons la partie occidentale de la zone limoneuse, arrosée par l'Yser et l'Yperlée, parce que, pour les mœurs et la langue, la population y présente une grande affinité avec celle de la plaine maritime. Cette région occupe le nord-ouest de la province. La seconde comprend la zone sablonneuse et la partie orientale de la zone limoneuse, dans lesquelles la population offre beaucoup de traits de ressemblance, pour les coutumes et le langage : c'est le sud-est de la Flandre occidentale.

CHAPITRE II

LA COULEUR DES YEUX ET DES CHEVEUX

Ce chapitre a pour objet de grouper les résultats de nos recherches sur la couleur des yeux et des cheveux.

PRÉLIMINAIRES. — Il importe avant tout de faire connaître les procédés que nous avons suivis dans cette enquête.

Il n'est pas toujours commode de relever la couleur des yeux et des cheveux des adultes, à moins qu'on n'ait l'occasion d'observer des conscrits ; c'est pour ce motif que nous avons effectué notre enquête sur les enfants des écoles; cette façon d'opérer présente un inconvénient sérieux, parce que la couleur des yeux et des cheveux devient plus foncée avec l'âge, bien que la couleur de l'iris soit moins sujette à varier; cependant il y a toujours lieu d'enregistrer un résultat important : le pourcentage des yeux bruns et des cheveux foncés n'est pas exposé à diminuer (*); il y a donc toujours

(*) L. Vanderkindere, *Enquête anthropologique sur la couleur des yeux et des cheveux en Belgique*. Dans BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ BELGE DE GÉOGRAPHIE, 3e année, 1879, no 4. Bruxelles, 1879, p. 413.

moyen de fixer un minimum de caractères foncés pour une population donnée.

Nous n'avons pas admis de relevés dressés par des personnes étrangères aux recherches anthropologiques et nous avons consigné les résultats de cette enquête personnelle dans un tableau.

Quand nous aurons indiqué la signification de chaque colonne de notre tableau, on pourra juger de la méthode que nous avons suivie et apprécier la teneur et la portée des faits que nous avons signalés.

La première colonne de notre tableau renseigne, par un numéro d'ordre, les enfants que nous avons toujours pris au hasard; nous ne pouvions naturellement observer toute la population scolaire de la province ; nous avons procédé comme les géologues, qui pratiquent des sondages, et nos recherches ont porté sur 100 garçons et 100 filles de la plaine maritime, 100 garçons et 100 filles de la zone sablonneuse, 100 garçons et 100 filles de la zone limoneusé : 300 enfants du nord-ouest et 300 enfants du sud-est de la province.

C'est peu de chose, dira-t-on peut-être, mais nous ne croyons pas que des relevés plus amples puissent modifier notablement les conclusions qui se dégagent de notre enquête (*).

Dans la seconde colonne nous avons noté la couleur des yeux, d'après l'échelle chromatique de Broca (**); les nos 1 à 5 donnent les différents tons de la nuance brune; 6 à 10, les divers tons de la nuance verte; 11 à 15, les tons bleus et 16 à 20, les tons gris; il nous a semblé que l'usage de vingt couleurs facilite extrêmement la notation; très souvent la ressemblance de l'iris avec l'un ou l'autre de ces tons est frappante et s'il arrive qu'on éprouve de la peine à se prononcer et à saisir la nuance ou le ton, on désigne le numéro, qui paraît se rapprocher le plus de la couleur de l'iris devant laquelle on hésite.

Nous adoptons également les diverses couleurs numérotées de Broca, quand il s'agit de déterminer la couleur des cheveux; cette seconde échelle chromatique comprend 34 numéros, de 21 à 54 qui

(*) Broca communique un tableau de 47 observations pour les Basques des environs de Saint-Jean-de-Luz. P. Broca, MÉMOIRES D'ANTHROPOLOGIE, t. II. Paris, 1874, p. 89.

(**) P. Broca, *Instructions générales pour les Recherches anthropologiques à faire sur le vivant.* Paris, 1879, p. 89.

indiquent les principaux types de la coloration du système pileux; nous rangeons les nuances observées dans la troisième colonne de notre tableau.

Dans la quatrième colonne, nous classons les yeux en trois catégories, d'après le système préconisé par M. Houzé (*). Nous distinguons les yeux bleus, les yeux bruns et nous considérons comme yeux intermédiaires tous ceux qui ne paraissent ni bleus ni marrons. Nous admettons les 5 tons bleus de Broca, sans rejeter le n° 15, que M. Houzé semble reléguer parmi les yeux intermédiaires (**). M. Ammon l'admet aussi parmi les yeux bleus, tout en le considérant comme la transition entre les yeux bleus et les yeux gris (***). Nous marquons dans cette colonne *bl. br. int.* : *bl.* désigne les n[os] 11 à 15 de Broca, *br.* les n[os] 1 à 5 et *int.*, les yeux verts et les yeux gris : 6 à 10 et 16 à 20.

Dans la cinquième colonne, nous établissons trois divisions pour les cheveux : les blonds, les châtain clair et les châtain foncé, qui vont jusqu'au noir. Nous autorisant de l'exemple de M. Ammon, nous ne rattachons les cheveux roux à aucune de ces catégories (IV). On peut voir dans le tableau, par les notions juxtaposées, quels numéros de la série de Broca nous rangeons dans chacune de ces trois catégories.

Une sixième colonne est ajoutée à notre tableau : elle a une grande importance, parce qu'elle peut fournir la réponse aux questions suivantes : de combien de manières les couleurs particulières à l'iris et aux cheveux, peuvent-elles se combiner entre elles et quelle est l'association propre à chaque sujet? Combien de fois a-t-on pu observer chaque type d'association? Des trois couleurs des cheveux, combinées avec les quatre nuances de l'iris peuvent résulter douze associations différentes, pour lesquelles nous avons adopté les notations suivantes :

(*) E. Houzé. *Enquête anthropologique sur le village de Mendonck*. Dans Bulletin de la Société d'Anthropologie de Bruxelles, t. XV, 1896-1897. Bruxelles, 1897, p. 128.

(**) Id. *Ibid*.

(***) O. Ammon. *Zur Anthropologie der Badener*. Iena, 1899, p. 126.

(IV) Id. *Ibid.*, p. 128.

 13

Yeux bruns, cheveux blonds, I.
Yeux verts, cheveux blonds, II.
Yeux bleus, cheveux blonds, III.
Yeux gris, cheveux blonds, IV.
Yeux bruns, cheveux châtain clair, V.
Yeux verts, cheveux châtain clair, VI.
Yeux bleus, cheveux châtain clair, VII.
Yeux gris, cheveux châtain clair, VIII.
Yeux bruns, cheveux châtain foncé, IX.
Yeux verts, cheveux châtain foncé, X.
Yeux bleus, cheveux châtain foncé, XI.
Yeux gris, cheveux châtain foncé, XII.

Dans cette appréciation nous avons négligé les cheveux roux; on peut voir dans le tableau avec quelle coloration de l'iris ils se combinent.

TABLEAU DES OBSERVATIONS. — Les numéros d'ordre indiquent successivement 100 garçons et 100 filles de la plaine maritime; 100 garçons et 100 filles de la zone sablonneuse, 100 garçons et 100 filles de la zone limoneuse; les 50 derniers garçons et les 50 dernières filles appartiennent au nord-ouest de la province.

Nos d'ordre.	Échelle chromatique Yeux.	Cheveux.	Couleur des yeux.	Couleur des cheveux.	Numéro des combinaisons.
1	3	23	br.	bl.	I
2	15	23	bl.	bl.	III
3	3	36	br.	ch. cl.	V
4	9	42	int.	ch. f.	X
5	15	23	bl.	bl.	III
6	9	42	int.	ch. f.	X
7	2	36	br.	ch. cl.	V
8	11	36	bl.	ch. cl.	VII
9	14	38	bl.	ch. cl.	VII
10	3	42	br.	ch. f.	IX
11	15	23	bl.	bl.	III
12	3	22	br.	ch. cl.	V
13	15	23	bl.	bl.	III
14	3	36	br.	ch. cl.	V

Nos d'ordre.	Échelle chromatique		Couleur des yeux.	Couleur des cheveux.	Numéro des combinaisons.
	Yeux.	Cheveux.			
—	—	—	—	—	—
15	3	42	br.	ch. f.	IX
16	14	42	bl.	ch. f.	XI
17	20	36	int.	ch. f.	VIII
18	5	40	br.	bl.	I
19	10	40	int.	bl.	II
20	20	40	int.	bl.	IV
21	9	36	int.	ch. cl.	VI
22	10	39	int.	bl.	II
23	14	40	bl.	bl.	III
24	14	36	bl.	ch. cl.	VII
25	3	36	br.	ch. cl.	V
26	10	42	int.	ch. f.	X
27	3	34	br.	ch. f.	IX
28	10	36	int.	ch. cl.	VI
29	10	36	int.	ch. cl.	VI
30	2	34	br.	ch. f.	IX
31	10	36	int.	ch. cl.	VI
32	3	41	br.	ch. f.	IX
33	14	42	bl.	ch. f.	XI
34	14	53	bl.	bl.	III
35	10	38	int.	ch. cl.	VI
36	10	42	int.	ch. f.	X
37	14	50	bl.	ch. cl.	VII
38	4	34	br.	ch. f.	IX
39	3	42	br.	ch. f.	IX
40	9	36	int.	ch. cl.	VI
41	2	49	br.	ch. f.	IX
42	3	49	br.	ch. f.	IX
43	3	36	br.	ch. cl.	V
44	15	36	bl.	ch. cl.	VII
45	3	34	br.	ch. f.	IX
46	15	42	bl.	ch. f.	XI
47	3	38	br.	ch. cl.	V
48	5	49	br.	ch. f.	IX
49	10	53	int.	bl.	IV

Nos d'ordre.	Échelle chromatique Yeux.	Cheveux.	Couleur des yeux.	Couleur des cheveux.	Numéro des combinaisons.
—	—	—	—	—	—
50	20	42	int.	ch. f.	XII
51	3	49	br.	ch. f.	IX
52	10	36	int.	ch. cl.	VI
53	14	40	bl.	bl.	III
54	20	36	int.	ch. cl.	VIII
55	3	49	br.	ch. f.	IX
56	4	36	br.	ch. cl.	V
57	9	37	int.	bl.	II
58	15	37	bl.	bl.	III
59	3	42	br.	ch. f.	IX
60	7	38	int.	ch. cl.	VI
61	2	53	br.	bl.	I
62	4	23	br.	bl.	I
63	14	49	bl.	ch. f.	XI
64	15	36	bl.	ch. cl.	VII
65	3	38	br.	ch. cl.	V
66	15	53	bl.	bl.	III
67	5	36	br.	ch. cl.	V
68	10	49	int.	ch. f.	X
69	10	49	int.	ch. f.	X
70	5	36	br.	ch. cl.	V
71	14	47	bl.	bl.	III
72	14	23	bl.	bl.	III
73	15	42	bl.	ch. f.	XI
74	2	42	br.	ch. f.	IX
75	10	35	int.	ch. f.	X
76	15	35	bl.	ch. f.	XI
77	15	24	bl.	bl.	III
78	3	35	br.	ch. f.	IX
79	5	roux	br.	roux.	0
80	15	23	bl.	bl.	III
81	3	35	br.	ch. f.	IX
82	15	42	bl.	ch. f.	XI
83	2	42	br.	ch. f.	IX
84	15	39	bl.	bl.	III

Nos d'ordre.	Échelle chromatique Yeux.	Échelle chromatique Cheveux.	Couleur des yeux.	Couleur des cheveux.	Numéro des combinaisons.
85	4	42	br.	ch. f.	IX
86	15	42	bl.	ch. f.	XI
87	14	23	bl.	bl.	III
88	19	36	int.	ch. cl.	VIII
89	3	42	br.	ch. f.	IX
90	9	35	int.	ch. f.	X
91	14	53	bl.	bl.	III
92	3	35	br.	ch. f.	IX
93	10	42	int.	ch. f.	X
94	14	36	bl.	ch. cl.	VII
95	10	50	int.	ch. cl.	VI
96	2	35	br.	ch. f.	IX
97	9	35	int.	ch. f.	X
98	10	47	int.	bl.	II
99	10	47	int.	bl.	II
100	4	42	br.	ch. f.	IX
101	4	42	br.	ch. f.	IX
102	9	34	int.	ch. f.	X
103	2	42	br.	ch. f.	IX
104	14	33	bl.	bl.	III
105	14	23	bl.	bl.	III
106	15	36	bl.	ch. cl.	VII
107	10	23	int.	bl.	II
108	4	42	br.	ch. f.	IX
109	3	42	br.	ch. f.	IX
110	3	23	br.	bl.	I
111	20	23	int.	bl.	IV
112	14	38	bl.	ch. cl.	VII
113	3	36	br.	ch. cl.	V
114	4	41	br.	ch. f.	IX
115	10	39	int.	bl.	II
116	5	36	br.	ch. cl.	V
117	10	47	int.	bl.	II
118	5	53	br.	bl.	I
119	15	23	bl.	bl.	III

Nos d'ordre.	Échelle chromatique Yeux.	Cheveux.	Couleur des yeux.	Couleur des cheveux.	Numéro des combinaisons.
120	3	36	br.	ch. cl.	V
121	3	36	br.	ch. cl.	V
122	4	38	br.	ch. cl.	V
123	9	42	int.	ch. f.	X
124	3	42	br.	ch. f.	IX
125	14	41	bl.	ch. f.	XI
126	3	40	br.	bl.	I
127	10	36	int.	ch. cl.	VI
128	9	37	int.	ch. cl.	VI
129	4	41	br.	ch. f.	IX
130	9	36	int.	ch. cl.	VI
131	10	40	int.	bl.	II
132	19	46	int.	bl.	IV
133	9	36	int.	ch. cl.	VI
134	10	36	int.	ch. cl.	VI
135	3	47	br.	bl.	I
136	10	47	int.	bl.	II
137	9	53	int.	bl.	II
138	20	40	int.	bl.	IV
139	9	53	int.	bl.	II
140	4	42	br.	ch. f.	IX
141	5	39	br.	bl.	I
142	3	53	br.	bl.	I
143	9	42	int.	ch. f.	X
144	3	53	br.	bl.	I
145	20	53	int.	bl.	IV
146	14	42	bl.	ch. f.	XI
147	9	38	int.	ch. cl.	VI
148	9	42	int.	ch. f.	X
149	19	23	int.	bl.	IV
150	10	53	int.	bl.	II
151	15	38	bl.	ch. cl.	VII
152	15	38	bl.	ch. cl.	VII
153	3	36	br.	ch. cl.	V
154	5	36	br.	ch. cl.	V

Nos d'ordre.	Échelle chromatique Yeux.	Cheveux.	Couleur des yeux.	Couleur des cheveux.	Numéro des combinaisons.
155	15	38	bl.	ch. cl.	VII
156	15	42	bl.	ch. f.	XI
157	7	35	int.	ch. f.	X
158	4	23	br.	bl.	I
159	4	36	br.	ch. cl.	V
160	19	36	int.	ch. cl.	VIII
161	20	38	int.	ch. cl.	VIII
162	10	53	int.	bl.	II
163	15	53	bl.	bl.	III
164	20	36	int.	ch. cl.	VIII
165	5	42	br.	ch. f.	IX
166	10	36	int.	ch. cl.	VI
167	9	53	int.	bl.	IV
168	4	36	br.	ch. cl.	V
169	15	53	bl.	bl.	III
170	14	23	bl.	bl.	III
171	14	36	bl.	ch. cl.	VII
172	10	36	int.	ch. cl.	VI
173	15	53	bl.	bl.	III
174	3	53	br.	bl.	I
175	19	39	int.	bl.	IV
176	3	42	br.	ch. f.	IX
177	3	42	br.	ch. f.	IX
178	20	23	int.	bl.	IV
179	20	39	int.	bl.	IV
180	19	36	int.	ch. cl.	VIII
181	2	29	br.	roux.	O
182	14	23	bl.	bl.	III
183	3	41	br.	ch. f.	IX
184	18	36	int.	ch. cl.	VIII
185	10	23	int.	bl.	II
186	14	36	bl.	ch. cl.	VII
187	4	36	br.	ch. cl.	V
188	19	23	int.	bl.	IV
189	9	36	int.	ch. cl.	VI

Nos d'ordre.	Échelle chromatique Yeux.	Cheveux.	Couleur des yeux.	Couleur des cheveux.	Numéro des combinaisons.
—	—	—	—	—	—
190	19	38	int.	ch. cl.	VIII
191	9	23	int.	bl.	IV
192	3	42	br.	ch. f.	IX
193	5	36	br.	ch. f.	V
194	14	47	bl.	bl.	III
195	14	23	bl.	bl.	III
196	3	35	br.	ch. f.	IX
197	19	36	int.	ch. cl.	VIII
198	10	42	int.	ch. f.	X
199	2	35	br.	ch. f.	IX
200	15	23	bl.	bl.	III
201	3	36	br.	ch. cl.	V
202	9	36	int.	ch. cl.	VI
203	15	38	bl.	ch. cl.	VII
204	3	23	br.	bl.	I
205	9	38	int.	ch. cl.	VI
206	2	42	br.	ch. f.	IX
207	9	30	int.	roux.	0
208	15	23	bl.	bl.	III
209	15	38	bl.	ch. cl.	VII
210	3	27	br.	ch. f.	IX
211	14	24	bl.	bl.	III
212	14	28	bl.	ch. f.	XI
213	15	21	bl.	bl.	III
214	14	36	bl.	ch. cl.	VII
215	15	22	bl.	ch. cl.	VII
216	2	27	br.	ch. f.	IX
217	15	36	bl.	ch. cl.	VII
218	14	35	bl.	ch. f.	XI
219	14	21	bl.	bl.	III
220	4	35	br.	ch. f.	IX
221	9	35	int.	ch. f.	X
222	15	36	bl.	ch. cl.	VII
223	14	24	bl.	bl.	III
224	2	34	br.	ch. f.	IX

Nos d'ordre	Échelle chromatique Yeux.	Cheveux.	Couleur des yeux.	Couleur des cheveux.	Numéro des combinaisons.
—	—	—	—	—	—
225	20	36	int.	ch. cl.	VIII
226	15	54	bl.	bl.	III
227	14	38	bl.	ch. cl.	VII
228	10	36	int.	ch. cl.	VI
229	3	28	br.	ch. f.	IX
230	5	30	br.	roux.	0
231	9	41	int.	ch. f.	X
232	4	34	br.	ch. f.	IX
233	3	36	br.	ch. cl.	V
234	14	38	bl.	ch. cl.	VII
235	14	36	bl.	ch. cl.	VII
236	9	36	int.	ch. cl.	VI
237	9	35	int.	ch. f.	X
238	14	23	bl.	bl.	III
239	15	36	bl.	ch. cl.	VII
240	15	36	bl.	ch. cl.	VII
241	10	39	int.	bl.	II
242	14	39	bl.	bl.	III
243	3	42	br.	ch. f.	IX
244	10	42	int.	ch. f.	X
245	14	38	bl.	ch. cl.	VII
246	9	42	int.	ch. f.	X
247	15	22	bl.	ch. cl.	VII
248	3	42	br.	ch. f.	IX
249	10	42	int.	ch. f.	X
250	14	40	bl.	bl.	III
251	15	47	bl.	bl.	III
252	10	38	int.	ch. cl.	VI
253	15	36	bl.	ch. cl.	VII
254	2	34	br.	ch. f.	IX
255	15	42	bl.	ch. f.	XI
256	3	28	br.	ch. f.	IX
257	10	38	int.	ch. cl.	VI
258	2	42	br.	ch. f.	IX
259	4	42	br.	ch. f.	IX

Nos d'ordre.	Échelle chromatique Yeux.	Cheveux.	Couleur des yeux.	Couleur des cheveux.	Numéro des combinaisons.
—	—	—	—	—	—
260	15	23	bl.	bl.	III
261	3	35	br.	ch. f.	IX
262	10	35	int.	ch. f.	X
263	2	42	br.	ch. f.	IX
264	9	36	int.	ch. cl.	VI
265	11	42	bl.	ch. f.	XI
266	15	28	bl.	ch. f.	XI
267	3	42	br.	ch. f.	IX
268	9	35	int.	ch. f.	X
269	15	41	bl.	ch. f.	XI
270	3	36	br.	ch. cl.	V
271	9	41	int.	ch. f.	X
272	5	34	br.	ch. f.	IX
273	15	25	bl.	bl.	III
274	15	36	bl.	ch. cl.	VII
275	14	38	bl.	ch. cl.	VII
276	15	38	bl.	ch. cl.	VII
277	2	35	br.	ch. f.	IX
278	2	36	br.	ch. cl.	V
279	3	40	br.	bl.	I
280	15	36	bl.	ch. cl.	VII
281	3	22	br.	ch. cl.	V
282	15	36	bl.	ch. cl.	VII
283	10	40	int.	bl.	IV
284	4	27	br.	ch. f.	IX
285	4	54	br.	bl.	I
286	10	54	int.	bl.	II
287	15	22	bl.	ch. cl.	VII
288	9	42	int.	ch. f.	X
289	15	28	bl.	ch. f.	XI
290	10	36	int.	ch. cl.	VI
291	5	42	br.	ch. f.	IX
292	15	36	bl.	ch. cl.	VII
293	3	36	br.	ch. cl.	V
294	2	36	br.	ch. cl.	V

Nos d'ordre.	Échelle chromatique Yeux.	Cheveux.	Couleur des yeux.	Couleur des cheveux.	Numéro des combinaisons.
—	—	—	—	—	—
295	3	38	br.	ch. cl.	V
296	10	41	int.	ch. f.	X
297	10	42	int.	ch. f.	X
298	10	23	int.	bl.	IV
299	14	33	bl.	bl.	III
300	3	42	br.	ch. f.	IX
301	14	25	bl.	bl.	III
302	5	22	br.	ch. cl.	V
303	2	36	br.	ch. cl.	V
304	19	36	int.	ch. cl.	VIII
305	3	27	br.	ch. f.	IX
306	4	28	br.	ch. f.	IX
307	14	35	bl.	ch. f.	XI
308	15	28	bl.	ch. f.	XI
309	5	28	br.	ch. f.	IX
310	14	23	bl.	bl.	III
311	5	40	br.	bl.	I
312	4	24	br.	bl.	I
313	2	35	br.	ch. f.	IX
314	14	24	bl.	bl.	III
315	14	22	bl.	ch. cl.	VII
316	14	28	bl.	ch. f.	XI
317	4	22	br.	ch. cl.	V
318	10	28	int.	ch. f.	X
319	3	29	br.	roux.	O
320	6	35	int.	ch. f.	X
321	14	38	bl.	ch. cl.	VII
322	4	22	br.	ch. cl.	V
323	7	35	int.	ch. f.	X
324	5	28	br.	ch. f.	IX
325	14	23	bl.	bl.	III
326	15	35	bl.	ch. f.	XI
327	14	23	bl.	bl.	III
328	4	27	br.	ch. f.	IX
329	2	35	br.	ch. f.	IX

Nos d'ordre.	Échelle chromatique Yeux.	Cheveux.	Couleur des yeux.	Couleur des cheveux.	Numéro des combinaisons.
—	—	—	—	—	—
330	14	23	bl.	bl.	III
331	9	34	int.	ch. f.	X
332	9	49	int.	ch. f.	X
333	14	23	bl.	bl.	III
334	9	36	int.	ch. cl.	VI
335	15	31	bl.	roux.	0
336	15	22	bl.	ch. cl.	VII
337	9	23	int.	bl.	II
338	15	36	bl.	ch. cl.	VII
339	10	24	int.	bl.	II
340	15	23	bl.	bl.	III
341	15	23	bl.	bl.	III
342	15	38	bl.	ch. cl.	VII
343	3	42	br.	ch. f.	IX
344	4	42	br.	ch. f.	IX
345	10	23	int.	bl.	II
346	3	36	br.	ch. cl.	V
347	9	36	int.	ch. cl.	VI
348	15	23	bl.	bl.	III
349	15	23	bl.	bl.	III
350	15	22	bl.	ch. cl.	VII
351	15	36	bl.	ch. cl.	VII
352	9	43	int.	ch. f.	X
353	14	36	bl.	ch. cl.	VII
354	3	36	br.	ch. cl.	V
355	15	38	bl.	ch. cl.	VII
356	14	23	bl.	bl.	III
357	20	43	int.	ch. f.	XII
358	14	40	bl.	bl.	III
359	2	28	br.	ch. f.	IX
360	5	32	br.	roux.	0
361	15	23	bl.	bl.	III
362	3	35	br.	ch. f.	IX
363	3	28	br.	ch. f.	IX
364	15	23	bl.	bl.	III

Nos d'ordre.	Échelle chromatique Yeux.	Échelle chromatique Cheveux.	Couleur des yeux.	Couleur des cheveux.	Numéro des combinaisons.
365	3	42	br.	ch. f.	IX
366	4	36	br.	ch. cl.	V
367	2	36	br.	ch. cl.	V
368	9	42	int.	ch. f.	X
369	15	23	bl.	bl.	III
370	15	22	bl.	ch. cl.	VII
371	3	36	br.	ch. cl.	V
372	3	36	br.	ch. cl.	V
373	15	36	bl.	ch. cl.	VII
374	14	36	bl.	ch. cl.	VII
375	15	40	bl.	bl.	III
376	15	40	bl.	bl.	III
377	3	40	br.	bl.	I
378	9	24	int.	bl.	II
379	10	36	int.	ch. cl.	VI
380	15	23	bl.	bl.	III
381	15	23	bl.	bl.	III
382	15	47	bl.	bl.	III
383	5	49	br.	ch. f.	IX
384	15	47	bl.	bl.	III
385	3	42	br.	ch. f.	IX
386	15	54	bl.	bl.	III
387	3	42	br.	ch. f.	IX
388	10	38	int.	ch. cl.	VI
389	15	31	bl.	roux.	0
390	3	41	br.	ch. f.	IX
391	4	41	br.	ch. f.	IX
392	10	40	int.	bl.	II
393	15	46	bl.	bl.	III
394	10	44	int.	bl.	II
395	15	39	bl.	bl.	III
396	15	46	bl.	bl.	III
397	15	36	bl.	ch. cl.	VII
398	15	42	bl.	ch. f.	XI
399	15	40	bl.	bl.	III
400	5	42	br.	ch. f.	IX

Nos d'ordre.	Échelle chromatique Yeux.	Cheveux.	Couleur des yeux.	Couleur des cheveux.	Numéro des combinaisons.
—	—	—	—	—	—
401	20	36	int.	ch. cl.	VIII
402	5	40	br.	bl.	I
403	15	42	bl.	ch. f.	II
404	10	42	int.	ch. f.	X
405	15	23	bl.	bl.	III
406	4	36	br.	ch. cl.	V
407	3	49	br.	ch. f.	IX
408	4	32	br.	roux.	0
409	2	42	br.	ch. f.	IX
410	4	42	br.	ch. f.	IX
411	10	47	int.	bl.	II
412	10	45	int.	bl.	II
413	15	23	bl.	bl.	III
414	9	49	int.	ch. f.	X
415	5	42	br.	ch. f.	IX
416	3	42	br.	ch. f.	IX
417	3	46	br.	bl.	I
418	14	23	bl.	bl.	III
419	15	23	bl.	bl.	III
420	20	36	int.	ch. cl.	VIII
421	15	23	bl.	bl.	III
422	2	34	br.	ch. f.	IX
423	3	23	br.	bl.	I
424	3	36	br.	ch. cl.	V
425	3	23	br.	bl.	I
426	3	36	br.	ch. cl.	V
427	15	23	bl.	bl.	III
428	5	30	br.	roux.	0
429	3	39	br.	bl.	I
430	3	47	br.	bl.	I
431	2	42	br.	ch. f.	IX
432	15	36	bl.	ch. cl.	VII
433	5	53	br.	bl.	I
434	15	36	bl.	ch. cl.	VII
435	15	36	bl.	ch. cl.	VII
436	3	39	br.	bl.	I

Nos. d'ordre.	Échelle chromatique Yeux.	Cheveux.	Couleur des yeux.	Couleur des cheveux.	Numéro des combinaisons.
—	—	—	—	—	—
437	10	42	int.	ch. f.	X
438	15	36	bl.	ch. cl.	VII
439	5	42	br.	ch. f.	IX
440	20	53	int.	bl.	IV
441	20	42	int.	ch. f.	XII
442	10	53	int.	bl.	II
443	10	54	int.	bl.	II
444	3	42	br.	ch. f.	IX
445	10	42	int.	ch. f.	X
446	15	36	bl.	ch. cl.	VII
447	15	40	bl.	bl.	III
448	15	46	bl.	bl.	III
449	3	42	br.	ch. f.	IX
450	3	41	br.	ch. f.	IX
451	5	36	br.	ch. cl.	V
452	9	23	int.	bl.	II
453	5	53	br.	bl.	I
454	5	38	br.	ch. cl.	V
455	5	41	br.	ch. f.	IX
456	9	50	int.	ch. cl.	VI
457	10	53	int.	bl.	II
458	10	41	int.	ch. f.	X
459	14	31	bl.	roux.	O
460	5	42	br.	ch. f.	IX
461	4	42	br.	ch. f.	IX
462	14	42	bl.	ch. f.	XI
463	15	36	bl.	ch. cl.	VII
464	15	53	bl.	bl.	III
465	3	42	br.	ch. f.	IX
466	10	53	int.	bl.	II
467	5	39	br.	bl.	I
468	4	46	br.	bl.	I
469	14	38	bl.	ch. cl.	VII
470	14	42	bl.	ch. f.	XI
471	16	53	int.	bl.	IV
472	4	39	br.	bl.	I

Nos d'ordre.	Échelle chromatique Yeux.	Cheveux.	Couleur des yeux.	Couleur des cheveux.	Numéro des combinaisons.
—	—	—	—	—	—
473	5	42	br.	ch. f.	IX
474	15	53	bl.	bl.	III
475	10	53	int.	bl.	IV
476	4	23	br.	bl.	I
477	3	36	br.	ch. cl.	V
478	3	41	br.	ch. f.	IX
479	5	42	br.	ch. f.	IX
480	10	42	int.	ch. f.	X
481	5	38	br.	ch. cl.	V
482	4	36	br.	ch. cl.	V
483	5	42	br.	ch. f.	IX
484	3	41	br.	ch. f.	IX
485	4	36	br.	ch. cl.	V
486	10	53	int.	bl.	II
487	10	36	int.	ch. cl.	VI
488	15	41	bl.	ch. f.	XI
489	14	36	bl.	ch. cl.	VII
490	4	41	br.	ch. f.	IX
491	15	53	bl.	bl.	III
492	20	36	int.	ch. cl.	VIII
493	3	41	br.	ch. f.	IX
494	10	53	int.	bl.	II
495	10	38	int.	ch. cl.	VI
496	14	23	bl.	bl.	III
497	14	31	bl.	roux.	0
498	14	51	bl.	bl.	III
499	15	52	bl.	bl.	III
500	9	41	int.	ch. f.	X
501	9	36	int.	ch. cl.	VI
502	15	39	bl.	bl.	III
503	10	23	int.	bl.	II
504	9	23	int.	bl.	II
505	9	40	int.	bl.	II
506	9	47	int.	bl.	II
507	9	49	int.	ch. f.	X
508	3	41	br.	ch. f.	IX

Nos d'ordre.	Échelle chromatique Yeux.	Cheveux.	Couleur des yeux.	Couleur des cheveux.	Numéro des combinaisons.
—	—	—	—	—	—
509	15	40	bl.	bl.	III
510	9	38	int.	ch. cl.	VI
511	10	23	int.	bl.	II
512	2	41	br.	ch. f.	IX
513	5	38	br.	ch. cl.	V
514	18	47	int.	bl.	IV
515	15	40	bl.	bl.	III
516	20	47	int.	bl.	IV
517	15	38	bl.	ch. cl.	VII
518	15	40	bl.	bl.	III
519	10	40	int.	bl.	II
520	15	30	bl.	roux.	0
521	3	36	br.	ch. cl.	V
522	15	54	bl.	bl.	III
523	4	43	br.	ch. f.	IX
524	15	23	bl.	bl.	III
525	20	36	int.	ch. cl.	VIII
526	15	53	bl.	bl.	III
527	4	39	br.	bl.	I
528	15	36	bl.	ch. cl.	VII
529	2	22	br.	ch. cl.	V
530	4	41	br.	ch. f.	IX
531	15	36	bl.	ch. cl.	VII
532	4	38	br.	ch. cl.	V
533	15	23	bl.	bl.	III
534	9	46	int.	bl.	II
535	15	36	bl.	ch. cl.	VII
536	3	36	br.	ch. cl.	V
537	10	30	int.	roux.	0
538	3	39	br.	bl.	I
539	3	39	br.	bl.	II
540	15	53	bl.	bl.	III
541	19	38	int.	ch. cl.	VIII
542	2	36	br.	ch. cl.	V
543	19	46	int.	bl.	IV
544	15	23	bl.	bl.	III

Nos d'ordre.	Échelle chromatique Yeux.	Cheveux.	Couleur des yeux.	Couleur des cheveux.	Numéro des combinaisons.
—	—	—	—	—	–
545	15	41	bl.	ch. f.	XI
546	2	41	br.	ch. f.	IX
547	2	41	br.	ch. f.	IX
548	19	53	int.	bl.	IV
549	15	23	bl.	bl.	III
550	3	39	br.	bl.	I
551	20	53	int.	bl.	IV
552	15	23	bl.	bl.	III
553	9	38	int.	ch. cl.	VI
554	4	23	br.	bl.	I
555	14	36	bl.	ch. cl.	VII
556	15	38	bl.	ch. cl.	VII
557	2	41	br.	ch. f.	IX
558	2	41	br.	ch. f.	IX
559	15	39	bl.	bl.	III
560	4	53	br.	bl.	I
561	15	31	bl.	roux	0
562	4	46	br.	bl.	I
563	2	36	br.	ch. cl.	V
564	3	41	br.	ch. f.	IX
565	14	54	bl.	bl.	III
566	3	47	br.	bl.	I
567	20	53	int.	bl.	IV
568	14	38	bl.	ch. cl.	VII
569	3	36	br.	ch. cl.	V
570	14	53	bl.	bl.	III
571	14	53	bl.	bl.	III
572	2	41	br.	ch. f.	IX
573	14	53	bl.	bl.	III
574	14	23	bl.	bl.	III
575	10	39	int.	bl.	II
576	19	53	int.	bl.	IV
577	19	23	int.	bl.	IV
578	3	41	br.	ch. f.	IX
579	10	38	int.	ch. cl.	VI
580	14	23	bl.	bl.	III

Nos d'ordre.	Échelle chromatique Yeux.	Cheveux.	Couleur des yeux.	Couleur des cheveux.	Numéro des combinaisons.
—	—	—	—	—	—
581	3	41	br.	ch. f.	IX
582	20	38	int.	ch. cl.	VIII
583	2	42	br.	ch. f.	IX
584	10	46	int.	bl.	II
585	4	39	br.	bl.	I
586	4	36	br.	ch. cl.	V
587	3	42	br.	ch. f.	IX
588	3	41	br.	ch. f.	IX
589	5	46	br.	bl.	I
590	5	41	br.	ch. f.	IX
591	3	41	br.	ch. f.	IX
592	15	53	bl.	bl.	III
593	19	36	int.	ch. cl.	VIII
594	5	36	br.	ch. cl.	V
595	15	38	bl.	ch. cl.	VII
596	3	38	br.	ch. cl.	V
597	20	54	int.	bl.	IV
598	15	54	bl.	bl.	III
599	14	40	bl.	bl.	III
600	4	47	br.	bl.	I

Couleur des yeux. — Toutes les données de notre enquête sont consignées dans le tableau que nous avons dressé : il faut à présent en exprimer la résultante et en faire la synthèse.

Occupons-nous d'abord de la double question que M. Ripley pose dans le chapitre où il a traité cette matière et où il expose la méthode avec autant de clarté que de concision : quelle est la répartition des caractères, abstraction faite des individus? Quelle est la proportion des types purs (*) ?

(*) W.-Z. Ripley. *Op. cit.*, p. 65 : « There are two principal modes of determining the pigmentation of a given population. One is to discover the proportion of so called pure brunet-*types* — that is to say, the percentage of individuals possessed of *both* dark eyes and hair. The other system is to study brunet *traits* without regard to their association in the same individual. »

Établissons d'abord le pourcentage des traits, la valeur de chaque nuance de l'iris et de chaque teinte du système pileux.

Nous avons fait le relevé des différentes couleurs de l'iris, dans le tableau suivant :

ZONES		YEUX			
		Bruns	Verts	Bleus	Gris
Poldérienne	Garçons	39	25	31	5
»	Filles	36	27	21	16
Sablonneuse	Garçons	33	25	41	1
»	Filles	34	17	47	2
Limoneuse	Garçons	46	20	28	6
»	Filles	39	15	33	13
Nombre	Absolu	227	129	201	43
»	Relatif	37,83 %	21,5 %	33,5 %	7,16 %

Quel est le ton qui prédomine dans la série des yeux bleux?

Dans cette série, c'est le ton le plus faible, le ton 15, qui atteint le maximum de fréquence; il se présente dans la proportion de 62 p. c. Quelle est la signification de ce chiffre? Si la couleur bleue de l'iris constitue un caractère de race, il faut avouer qu'il tend à s'altérer; c'est probablement la fusion des races, qui affaiblit les tons plus prononcés, pour établir la prédominance des teintes neutres.

En est-il de même pour la série des tons bruns? Les tons bruns sont les plus faciles à noter et c'est un point digne d'attention, que ce sont les tons les plus foncés qui l'emportent; les tons 2 et 3 se présentent avec une moyenne de 61 p. c. et tandis que le ton 3 se voit dans 102 cas, 40 cas seulement correspondent au ton le plus clair et le plus faible; la conclusion qui se dégage de ces données, c'est que la série des bruns se laisse moins entamer que celle des bleus et maintient ses tons prononcés avec plus de persistance.

COULEUR DES CHEVEUX. — Signalons à présent la répartition des différentes couleurs de la chevelure. Il est à remarquer que les catégories de notre tableau offrent beaucoup de ressemblance avec celles de Beddoe et de Topinard (*).

ZONES		CHEVEUX			
		Blonds	Châtain clair	Châtain foncé	Roux
Poldérienne	Garçons	27	29	43	1
»	Filles	41	33	25	1
Sablonneuse	Garçons	20	38	40	2
»	Filles	36	28	32	4
Limoneuse	Garçons	39	23	34	4
»	Filles	51	27	19	3
Nombre	Absolu	214	178	193	15
»	Relatif	35,66 %	29,66 %	32,16 %	2,5 %

La série qui se rapproche le plus de la nôtre est celle de 2000 Écossais d'Édimbourg, avec 16,4 de blonds, 40,5 de châtain clair, 36,5 de foncés et 6,5 de roux (**).

TYPES. — Nous savons à présent en quelle proportion les différents caractères sont dilués dans l'ensemble de la population. Si nous considérons les individus, il y a lieu d'examiner comment les caractères sont associés et il y a moyen de résoudre la question si importante de la proportion des types purs.

Cette recherche a pris un grand développement parce qu'on tient compte de la combinaison de toutes les nuances entre elles et qu'on tâche de noter la fréquence avec laquelle chaque mode d'association se présente.

Pour arriver à un résultat appréciable, nous avons additionné

(*) P. Topinard, *Éléments d'Anthropologie générale.* Paris, 1885, p. 337.
(**) P. Topinard, *Op. cit.*, 339.

les cas qui correspondent à chacune de nos douze combinaisons et nous avons dressé un nouveau tableau, dans lequel les divers modes d'association sont groupés par ordre de fréquence, en commençant par le chiffre le plus élevé :

COMBINAISONS		ZONES						NOMBRE	
		Poldérienne		Sablonneuse		Limoneuse		Absolu	Relatif
		Garç.	Filles	Garç.	Filles	Garç.	Filles		
IX	yeux bruns. / ch. chât. f.	23	15	21	19	22	17	117	19,5
III	yeux bleus. / ch. blonds.	16	11	13	27	14	22	103	17,16
VII	yeux bleus. / ch. chât. cl.	7	7	21	13	8	8	64	10,66
V	yeux bruns. / ch. chât. cl.	11	11	8	10	9	11	60	10
I	yeux bruns. / ch. blonds.	4	9	3	3	13	11	43	7,16
X	yeux verts. / ch. chât. f.	10	6	12	7	7	1	43	7,16
II	yeux verts. / ch. blonds.	5	10	2	6	9	9	41	6,83
VI	yeux verts. / ch. chât. cl.	9	9	8	4	3	4	37	6,16
XI	yeux bleus. / ch. chât. f.	8	3	7	5	4	1	28	4,66
IV	yeux gris. / ch. blonds.	2	11	2	0	3	9	27	4,5
VIII	yeux gris. / ch. chât. cl.	3	7	1	1	3	4	19	3,16
XII	yeux gris. / ch. chât. f.	0	1	1	1	0	0	3	0,5
Cheveux roux. .			1	2	4	4	3	15	2,5

— 34 —

On semble admettre comme un fait acquis la prédominance du type blond dans une population qui, par la langue, se rattache aux peuples germaniques. Cette opinion ne résiste pas à l'examen ; il n'est pas nécessaire de se livrer à une enquête anthropologique pour s'apercevoir que les types foncés sont les plus nombreux dans la population de la Westflandre ; il suffit de l'observer sans aucune idée préconçue. Nous avons déjà reconnu la prédominance des caractères foncés ; rien d'étonnant qu'il résulte de notre tableau que la proportion des types foncés purs atteigne le chiffre le plus élevé : 19,5 p. c.

On croit aussi, sans examen, que le nord-ouest est plus blond que le sud-est de la province ; il résulte de notre enquête que, sous le rapport de la coloration, la population de la Flandre Occidentale est sensiblement homogène. Nous avons établi la comparaison entre les deux régions dans le tableau suivant :

Combinaisons	Nord-Ouest	Sud-Est	Combinaisons	Nord-Ouest	Sud-Est
I	25	18	VII	21	43
II	22	19	VIII	13	6
III	44	59	IX	60	57
IV	20	7	X	19	24
V	33	27	XI	14	14
VI	23	14	XII	0	3

Qu'on ne se récrie pas au sujet de la proportion 17 p. c. du type blond ; qu'on la compare à la moyenne de 15 p. c. obtenue pour Mendonck par M. Houzé et on cessera de s'étonner (*).

Association des Caractères. — Les divers caractères physiques de l'homme tendent-ils à s'associer, de manière à former des types, et les caractères, qui constituent ces types, se maintiennent-ils dans les descendants, de manière à produire une race? A défaut de races humaines, peut-on au moins constater l'existence de types qui pro-

(*) E. Houzé. *Enquête anthropologique sur le village de Mendonck*. Extrait du Bulletin de la Société d'Anthropologie de Bruxelles, t. XV, 1896-1897. Bruxelles, 1897, p. 9.

viennent peut-être de races qui, à l'origine, ont peuplé nos contrées ?

Ce n'est pas ici le lieu de discuter ces questions ardues ou de résoudre ces obscurs problèmes. Nous pouvons toutefois nous arrêter à l'examen de quelques faits.

Certains caractères semblent-ils s'attirer? Manifestent-ils une certaine tendance à s'unir? En d'autres termes, peut-on vérifier que les individus qui ont les yeux bleus, ont aussi les cheveux blonds? Les yeux bruns se rencontrent-ils le plus fréquemment avec les cheveux foncés?

Abordons la série des yeux bleus.

On les rencontre 103 fois avec les cheveux blonds, 64 fois avec les cheveux châtain clair et 28 fois avec les cheveux foncés; nous pouvons, comme M. Ammon, attribuer la moitié des cheveux châtain clair au type clair (*). Nous trouvons donc les yeux bleus représentés 135 fois pour le type clair et 50 fois pour le type foncé. Les yeux bleus se combinent avec les cheveux clairs dans la proportion de 72,97 p. c., et avec les cheveux foncés dans la proportion de 27,02 p. c.

Les tons clairs manifestent donc une certaine préférence à s'associer. Le même phénomène se constate-t-il pour les nuances foncées ?

Voyons comment se répartit la série des yeux bruns. Nos tableaux nous fournissent les indications suivantes : les yeux bruns se combinent 43 fois avec les cheveux blonds, 60 fois avec les cheveux châtain clair et 117 fois avec les cheveux châtain foncé; nous déduisons de ces chiffres les moyennes de 33,18 p. c. pour le type clair et de 66,81 p. c. pour le type foncé, qui impliquent une certaine tendance des nuances foncées à se réunir.

Enquête de M. Vanderkindere. — Il sera intéressant de comparer les résultats de nos recherches avec les statistiques de M. Vanderkindere.

Nous reproduisons ici les données principales du tableau qui concerne la Flandre Occidentale (**) :

(*) Otto Ammon. *Zur Anthropologie der Badener*. Iena, 1899, p. 148.

(**) L. Vanderkindere, *op. laud.*, p. 420-421. Voici comment M. Topinard apprécie les résultats de cette enquête : « Il résulte de cette statistique que les blonds

Nombre des enfants.	65 423
Yeux clairs	39 915
Yeux bruns	21 211
Yeux noirs	4 163
Yeux non classés	134
Cheveux roux	2 128
Cheveux blonds	36 432
Cheveux bruns.	18 567
Cheveux noirs.	8 287
Cheveux non classés. . . .	9
Type blond	29 853
Type brun	16 770
Type blond, proportion % . .	47,15
Type brun, » . .	25,32
Yeux clairs, » . .	61,01
Cheveux foncés, » . .	42,57

A première vue, ces chiffres sont en contradiction avec les nôtres.

Voyons la proportion des yeux clairs: 61,01 p.c. Sont-ce des yeux bleus? Peut-on les considérer comme un caractère de la race nordique, dilué dans la population de la Westflandre et contribuant à constituer le type nordique ?

On ne peut répondre affirmativement à ces questions. M. Vanderkindere range dans la catégorie des yeux clairs, tous les yeux qui ne sont pas bruns; or quand nous additionnons les moyennes, qui ne sont pas brunes et que nous avons relevées, nous obtenons le total de 62,16 p.c., qui concorde avec la proportion de l'enquête de 1878.

---

prédominent dans toute la Belgique, mais que les bruns y sont représentés en moyenne par un brun contre trois blonds environ. Le mélange de brachycéphales et de dolichocéphales constaté, comme nous le verrons, dans ce pays et y indiquant deux races, est donc conforme aux données de la coloration, qui indiquent aussi deux races. Toutefois, l'indice céphalique général moyen incline vers la brachycéphalie, tandis que la moyenne de coloration est franchement blonde. La race belge prédominante serait donc à la fois presque brachycéphale et blonde, comme la produirait le croisement de la race celtique avec la race anglo-saxonne ». *Éléments d'Anthropologie générale.* Paris, 1885, p. 341.

La proportion des cheveux foncés est de 42,57 p. c. Si nous ajoutons à la moyenne des cheveux châtain foncé, la moitié de la moyenne des cheveux châtain clair, sur lesquels l'appréciation peut varier, nous obtenons la proportion de 46,99 p. c., qui n'accuse pas une différence notable avec la moyenne de M. Vanderkindere.

Quelle proportion M. Vanderkindere a-t-il déduite pour le type blond? De son enquête s'est dégagée la proportion de 47,15 p. c. Cette moyenne est exacte, quand on se place au point de vue où s'est placé M. Vanderkindere; nos chiffres nous fourniraient un résultat analogue; mais les données du problème se sont modifiées; personne ne sera étonné de nous voir obtenir une autre solution et arriver à une conclusion différente; pour évaluer la moyenne du type blond, on se base uniquement sur l'association des yeux bleus et des cheveux blonds; les yeux intermédiaires sont écartés.

Le type blond pur n'est représenté que dans la proportion de 17,16 p. c. et c'est le type brun qui prédomine, comme nous l'avons vu, avec le maximum inébranlable de 19,5 p. c.. Si nous y ajoutons la moyenne de la combinaison VII, nous arrivons à la proportion de 30,16 p. c. pour le type foncé; M. Vanderkindere a noté la moyenne de 25,32 p. c.; nous croyons que notre enquête personnelle, faite à l'aide d'échelles chromatiques, est plus rapprochée de la vérité en ce point que celle de M. Vanderkindere.

Statistiques étrangères sur la coloration. — Mettons en regard de nos relevés quelques résultats enregistrés dans d'autres pays, bien que l'anthropologie comparée présente quelques inconvénients; on ne suit pas partout la même méthode et il n'y a pas de règle fixe pour apprécier les degrés de coloration : tel passe pour blond dans une région de types foncés, qui serait réputé brun dans un pays de types blonds.

Voyons d'abord les Pays-Bas. La moyenne du type brun est de 10 à 20 p. c. dans les provinces de Frise, de Drenthe et de la Hollande septentrionale; il est plus fréquent à mesure qu'on s'avance vers le sud, où il atteint de 30 à 40 p. c. en Zélande et dans le Brabant septentrional et 50 p. c. dans le Limbourg (*).

Le type blond se constate dans le grand-duché de Bade, dans la

---

(*) Zentralblatt für Anthropologie. Braunschweig, 1905, t. X, p. 153.

proportion de 24,34 p. c. ; dans le milieu de l'Allemage on relève de 25 à 32 p. c. et au nord de l'Allemagne de 33 à 43 p. c. (*).

Les habitants des districts de Thelemarken et de Groenland, en Norvège, ont respectivement 59,1 et 52,2 p. c. de cheveux blonds (**) et en Suède, le centre de diffusion du type blond, les cheveux blonds atteignent la proportion de 75,3 p. c. et les yeux bleus la proportion de 66,7 p. c. (***).

Signalons la moyenne du type blond en Danemark, 16,2 p. c. : elle est inférieure à celle de la Westflandre.

L'Alsace-Lorraine fournit pour le type blond 18,44 p. c. et pour le type foncé 25,21 p. c.

Rapprochons de notre tableau du système pileux les données de l'enquête anthropologique dans le département de la Manche, le plus blond de la France: cheveux blonds, 25,8 p. c., cheveux châtain clair 28,1 p. c. et cheveux châtain foncé, 28,7 p. c.

Pour l'Angleterre, on peut déduire des multiples observations de M. J. Beddoé, qui est un spécialiste dans la matière, les moyennes suivantes : 22,7 p. c. pour les cheveux blonds, 44,7 p. c. pour les cheveux châtain clair et 29 p. c. pour les cheveux châtain foncé (IV).

CHAPITRE III

L'INDICE CÉPHALIQUE

PRÉLIMINAIRES. — La plupart des auteurs sont d'accord pour considérer l'indice céphalique comme un caractère de race très important. M. Nystrom a tenté d'en amoindrir la valeur et d'attribuer la forme du crâne, non à l'hérédité, mais à des principes qui agissent d'une façon diverse, suivant le genre de vie et les occupations de certains peuples (V).

(*) Otto Ammon. *Zur Anthropologie der Badener*. Jena, 1899, t. VII, pp. 134 et 150.

(**) ZENTRALBLATT FÜR ANTHROPOLOGIE. Braunschweig, 1905, t. X, p. 155.

(***) INTERNATIONALES CENTRALBLATT FÜR ANTHROPOLOGIE. Stettin, 1902. t. VII, p. 215.

(IV) Otto Ammon, *op. laud.*, p. 150-153.

(V) L'ANTHROPOLOGIE, t. XIII, 1902, p. 673. — R. P. Van den Gheyn, *La Per-*

Il est indéniable que les agents étudiés par M. Nystrom ne sont pas dénués d'influence ; mais nous croyons que l'hérédité exerce une influence, dont il faut tenir compte ; elle associe ce caractère à certaines nuances des yeux et des cheveux, qui sont certainement indépendantes des occupations auxquelles un peuple se livre et du genre de vie qu'il mène. Les conditions du travail agricole ne sont pas assez différentes d'une région à une autre, pour faire diverger si notablement les formes de la tête, et si la morphologie cranienne était tributaire du genre d'occupations d'un peuple, cette action finirait par couler tous les crânes dans un même moule et par former une série homogène, là où les conditions de la vie sont identiques : tous les indices viendraient se grouper autour d'un maximum de fréquence. Si les divers groupements d'indices sont permanents, si leur mélange se maintient en des proportions constantes, c'est un signe que l'influence de l'hérédité, moins sensible peut-être dans certains cas individuels, persiste à agir sur la masse, qui demeure réfractaire à l'influence du milieu.

Nos recherches, pour lesquelles nous adoptons la nomenclature de Broca, ont été faites sur une collection de cinquante crânes, que nous possédons, réunis sans aucun choix et qui proviennent de divers endroits de la province (*).

Tableau des mensurations. — Voici d'abord le tableau des mensurations que nous avons effectuées :

Numéros d'ordre.	Diamètre transversal maximum.	Diamètre antéro-postérieur.	Indice céphalique.
1	153	185	82,70
2	134	193	69,43
3	135	170	79,41
4	146	186	78,49
5	144	177	81,35
6	138	183	75,40

manence des types anthropologiques. Annales de la Société scientifique, 28e année, 1903-1904, p. 189. Louvain, 1904.

(*) M. Broca a établi les caractères des crânes basques sur une série de soixante crânes. Paul Broca, *Mémoires d'Anthropologie*. Paris, 1874, t. II, pp. 1 et suiv.

Numéros d'ordre.	Diamètre transversal maximum.	Diamètre antéro-postérieur.	Indice céphalique.
—	—	—	—
7	148	179	82,68
8	141	171	82,45
9	152	194	78,35
10	136	176	77,27
11	151	184	82,06
12	150	172	87,20
13	150	186	80,64
14	146	176	82,95
15	150	195	76,92
16	144	169	85,20
17	157	190	82,63
18	148	181	81,76
19	152	192	79,16
20	143	178	80,33
21	144	193	74,61
22	144	191	75,39
23	134	184	72,82
24	152	186	81,72
25	137	185	74,05
26	130	176	73,86
27	147	189	77,77
28	146	197	74,11
29	146	189	77,24
30	150	178	84,26
31	146	186	78,49
32	136	187	72,72
33	151	198	76,27
34	138	171	80,76
35	145	179	81,00
36	145	176	82,38
37	139	184	75,54
38	146	187	78,07
39	145	170	85,29
40	149	180	82,77
41	142	180	78,88

Numéros d'ordre.	Diamètre transversal maximum.	Diamètre antéro-postérieur.	Indice céphalique.
—	—	—	—
42	152	177	85,87
43	148	174	85,05
44	152	196	77,55
45	138	181	76,24
46	146	176	82,95
47	143	182	78,57
48	146	172	84,88
49	138	177	77,96
50	145	185	78,37

Le diamètre antéro-postérieur. — Le diamètre antéro-postérieur moyen est de 182,46 millimètres. Le plus long est de 198; le plus court mesure 169 millimètres; il est fourni par un crâne brachycéphale; un crâne de femme, mésaticéphale, nous a procuré un diamètre A.-P. de 170 millimètres. Le diamètre moyen de 18 crânes de Sainte-Gudule, antérieurs à 1783, était de 178,94 millimètres (*). L'étendue des oscillations est de 29 millimètres : cet écart notable provient du mélange des races.

Le diamètre transversal. — Pour le diamètre transversal maximum, nous avons obtenu comme moyenne 144,76 avec un minimum de 134, relevé sur un crâne très dolichocéphale et un maximum de 157, fourni par un crâne sous-brachycéphale. Cette moyenne, assez élevée, est supérieure à la moyenne de 138,42 que M. Houzé a observée sur les 18 crânes de Sainte-Gudule (**). Les variations individuelles ont produit un écart de 23 millimètres.

Sériation individuelle. — Donnons à présent la distribution sériaire individuelle des indices que nous avons obtenus. Cette ordination, pour laquelle, à l'exemple de M. Ammon (***), nous laissons simplement tomber les décimales, a donné les résultats, consignés dans le tableau suivant :

(*) Houzé. *Les Indices céphaliques des Flamands et des Wallons.* Bruxelles, 1882, p. 65.

(**) *Ibid.*, p. 65.

(***) O. Ammon, *op. cit.*, p. 85.

— 42 —

Indices	Nombre	Proportion p. c.	Indices	Nombre	Proportion p. c.
—	—	—	—	—	—
69	1	2	78	7	14
70	—	—	79	2	4
71	—	—	80	3	6
72	2	4	81	4	8
73	1	2	82	9	18
74	3	6	83	—	—
75	3	6	84	2	4
76	3	6	85	4	8
77	5	10	86	—	—
			87	1	2

La médiane se rencontre après 78; c'est l'indice 82, qui atteint le maximum de fréquence; il est assez éloigné de la médiane; les indices oscillent entre 69 et 87 et présentent ainsi une étendue de 17 unités ou exactement de 17,77, analogue à l'écart qui se constate dans les séries les plus mélangées (*).

On dit que si la race est homogène, on voit, à partir du maximum de fréquence, les indices diminuer progressivement de chaque côté. Ce fait ne se vérifie pas; nous voyons d'abord le nombre des cas progresser pour atteindre un sommet à 77; puis ils redescendent, mais au lieu de continuer à décroître, ils remontent pour arriver au maximum de fréquence à 82 et retomber rapidement.

Pourquoi ne voyons-nous pas tous les indices converger vers un seul type? A quelle cause faut-il attribuer le mouvement désordonné de cette sériation linéaire? Sans nul doute, au mélange des races, qui s'est opéré sur le territoire de la province; chacun des éléments dont la population se compose, atteste sa présence par un sommet, à partir duquel les nombres décroissent de chaque côté et c'est l'avantage de cette ordination de mettre les types en relief; s'il n'existait pas de mélange, la série serait moins complexe et les limites des variations plus restreintes.

(*) L. De Pauw et V. Jacques. *Le Cimetière de Saaftingen* (Extrait du Bulletin de la Société d'Anthropologie de Bruxelles, t. III,1884-1885). Bruxelles, 1885, p. 15.

Sériation quinaire. — Abordons à présent la distribution sériaire quinaire, qui nous paraît bien plus significative encore.

Ici, il règne une grande confusion, tant dans les noms que dans les limites qu'on assigne à chaque groupe; toute cause d'erreur toutefois peut se dissiper, quand on a la patience d'envisager les chiffres; la nomenclature de Broca nous semble encore la plus commode et la plus rationnelle et la nomenclature de Deniker, que beaucoup d'auteurs adoptent à présent, ne s'en écarte que pour les dénominations.

Nous avons dressé le tableau du groupement quinaire, établi suivant les divisions de Broca; en regard des groupes, que nous avons obtenus, nous pouvions disposer plusieurs autres séries, mais nous avons cru qu'il était plus intéressant de les rapprocher des répartitions obtenues par M. Houzé pour la Flandre occidentale (*), pour le village de Mendonck et les néolithiques des cavernes d'Hastière (**).

INDICES CÉPHALIQUES	Nombre	Proportion	Fl. occid. Houzé	Mendonck Houzé	Cavernes d'Hastière Houzé
Dolichocéphales. . .	7	14	17,02	11,53	12,12
Sous-dolichocéphales .	10	20	23,40	21,15	18,18
Mésaticéphales . . .	10	20	38,29	26,92	24,24
Sous-brachycéphales .	16	32	10,63	30,76	30,30
Brachycéphales. . .	7	14	10,63	9,61	15,15

Quelle déduction importante avons-nous à tirer de notre sériation?

Il résulte des données de notre groupement quinaire que le groupe sous-brachycéphale est le plus nombreux et que la brachycéphalie prédomine dans la population de la Westflandre.

(*). E. Houzé. *Les Indices céphaliques des Flamands et des Wallons*. Bruxelles, 1882, p. 60.

(**) E. Houzé. *Enquête anthropologique sur le village de Mendonck* (Extrait du Bulletin de la Société d'Anthropologie de Bruxelles, t. XV, 1896-1897). Bruxelles, 1897, p. 15.

Ce fait est capital, mais il est en contradiction avec les résultats auxquels M. Houzé est arrivé ; cependant nous pouvons faire valoir plusieurs considérations qui atténuent la portée de cette répartition différente.

M. Houzé a trouvé à Mendonck des proportions qui ne concordent pas avec le classement qu'il a établi pour la Flandre Orientale et qui, d'autre part, ne sont nullement divergentes de notre groupement. Si nous envisageons les brachycéphales et les sous-brachycéphales comme un seul groupe, nous arrivons au nombre de 46 p. c. de brachycéphales. M. Houzé en signale 50 p. c. dans le Brabant wallon et même 73 p. c. dans le Luxembourg, où l'élément germanique est également représenté (*). Même en Norvège, où prédominent les dolichocéphales, M. Arbo, qui suit la nomenclature de Broca, compte 36,6 p. c. de brachycéphales dans le district de Graenland et 32,3 p. c. dans le district de Thelemarken. A qui fera-t-on admettre que la Westflandre soit moins brachycéphale que la Norvège? Nous devons reconnaître deux éléments dans la population de la Westflandre. Lequel verra-t-on prédominer? Puisque le type foncé l'emporte, sera-t-on étonné de la prédominance du caractère brachycéphale, qui se combine de préférence avec les nuances du type brun? La forme allongée du crâne doit-elle nécessairement être la plus commune, dans une population germanique? Il est facile d'ébranler les fondements de cette opinion. Dans le grand-duché de Bade, qui offre quelque analogie avec notre contrée, nous voyons les Germains des Reihengräber, dolichocéphales dans la proportion de 69,2 p. c. et brachycéphales dans la proportion de 9,4 p. c., et la population actuelle compter 40,3 p. c. de têtes rondes contre 10,8 p. c. de têtes longues (**); il est vrai que la nomenclature de M. Ammon n'est pas celle de Broca et que sa moyenne ne peut être comparée avec la nôtre, mais elle est suffisamment significative pour prouver la prédominance des brachycéphales dans une population de langue germanique.

(*) Zentralblatt für Anthropologie, t. X, 1905. Braunschweig, 1905, p. 154.

(**) O. Ammon, *op. cit.*, p. 95.

Moyennes. — L'indice céphalique moyen est 79,33. L'indice 79 n'a été obtenu que deux fois. Il surpasse de plus d'une unité celui de M. Houzé (78,31) et incline davantage vers la brachycéphalie.

Nous avons calculé aussi les moyennes du diamètre A.-P., du diamètre T et de l'indice céphalique de chacun des groupes de notre répartition et nous les avons disposées dans le tableau suivant :

MESURES	Dolichocéph.	Sous-dolich.	Mésaticéph.	Sous-brach.	Brachycéph.
D. A. P.	187,85	188,2	183,9	179,68	173,14
Écart avec la moyenne	+5,39	+5,74	+1,44	—2,78	—9,32
D. T.	137,28	144,1	144,5	147,25	147,85
Écart avec la moyenne	—4,48	—0,66	—0,26	+2,49	+3,09

Pour les brachycéphales l'écart est le plus sensible pour la longueur du diamètre A.-P. : c'est un signe que la brachycéphalie provient surtout du raccourcissement de la tête. Pour les dolichocéphales, l'écart est le plus élevé pour la longueur du diamètre T : la dolichocéphalie provient donc surtout du rétrécissement de la tête.

Tous les brachycéphales ont-ils la tête courte? Le diamètre A.-P. moyen des sous-brachycéphales est 179,68; 7 diamètres offrent un excédent et 4 diamètres dépassent même le diamètre moyen de toute la série; considérons le diamètre A.-P. le plus long de ce groupe; il mesure 190 millimètres et l'écart est notable entre ce diamètre et le diamètre moyen, qui est surpassé de 10,32 millimètres; il y a encore un écart de 7,54 entre ce diamètre et le diamètre moyen de toute la série.

Tous les dolichocéphales ont-ils la tête longue? Il y a un écart de 10,15 millimètres entre le diamètre A.-P. moyen des dolichocéphales et le diamètre A.-P. le plus long, qui appartient à un crâne sous-dolichocéphale; le diamètre A.-P. moyen des sous-dolichocéphales est plus élevé que celui du groupe dolichocéphale; il y a

un crâne dolichocéphale dont le diamètre A.-P. ne mesure que 176 millimètres avec un écart de 11,85 millimètres avec le diamètre moyen des dolichocéphales et de 6,46 millimètres avec le diamètre moyen de toute la série (*).

CHAPITRE IV

L'INDICE FACIAL

PRÉLIMINAIRES. — La forme de la face, assez difficile à étudier, paraît constituer aussi un bon caractère de race. Parmi les multiples mesures de la face, pour lesquelles l'entente est loin de régner, nous avons choisi l'indice facial, calculé avec le diamètre ophryo-alvéolaire, comme numérateur et le diamètre bizygomatique comme dénominateur. Nous adoptons les divisions de Topinard pour répartir les faces en dolichofaciales ou leptoprosopes, brachyfaciales ou chamaeprosopes, et mesofaciales ou mesoprosopes. Les faces allongées ont l'indice 69 et au-dessus; les faces moyennes vont de 66 à 68,99 et les faces courtes ont des indices inférieurs à 66.

TABLEAU DES MENSURATIONS. — Beaucoup de crânes sont privés de la région faciale; dans notre collection, nous avons dû former une nouvelle série de 30 crânes, nous autorisant de l'observation suivante de M. Deniker: « Il faut avoir un certain nombre de crânes (de 10 à 30 au moins, suivant l'homogénéité de la population), pour pouvoir discerner les éléments constitutifs d'une population donnée, en tant qu'ils se manifestent dans les caractères craniens (**). » Voici le tableau des résultats de nos mensurations:

Numéros d'ordre.	Nos de la collection.	Indice céphalique.	D.-O.-A.	D.-B.	Indice facial.
I	1	Sous-brachyc.	91	134	68,50
II	4	Mésaticéph.	93	136	68,38
III	5	Sous-brachyc.	75	124	60,48
IV	7	Sous-brachyc.	91	130	70,00

(*) A comparer avec Ammon, *op. laud.*, p. 100.
(**) J. Deniker, *Les Races et les Peuples de la Terre*. Paris, 1900, p. 70.

Numéros d'ordre.	Nos de la collection.	Indice céphalique.	D.-O.-A.	D.-B.	Indice facial.
—	—	—	—	—	—
V	8	Sous-brachyc.	80	123	65,04
VI	9	Mésaticéph.	89	130	68,46
VII	10	Sous-dolich.	84	116	72,41
VIII	13	Sous-brachyc.	88	134	65,67
IX	14	Sous-brachyc.	89	128	69,54
X	17	Sous-brachyc.	93	139	66,90
XI	18	Sous-brachyc.	82	137	59,85
XII	19	Mésaticéph.	82	134	61,19
XIII	22	Sous-dolich.	94	138	68,11
XIV	24	Sous-brachyc.	89	135	65,92
XV	25	Dolichocéph.	88	118	74,57
XVI	26	Dolichocéph.	86	120	71,66
XVII	27	Sous-dolich.	84	131	64,12
XVIII	28	Dolichocéph.	95	132	71,96
XIX	29	Sous-dolich.	82	132	62,12
XX	30	Brachycéph.	88	126	69,84
XXI	31	Mésaticéph.	83	135	61,48
XXII	34	Sous-brachyc.	75	116	64,65
XXIII	35	Sous-brachyc.	86	134	64,17
XXIV	37	Sous-dolich.	76	126	60,31
XXV	38	Mésaticéph.	93	134	69,40
XXVI	43	Brachycéph.	84	121	69,42
XXVII	44	Sous-dolich.	86	134	64,17
XXVIII	45	Sous-dolich.	85	129	65,89
XXIX	46	Sous-brachyc.	80	126	63,49
XXX	51	Mésaticéph.	81	120	67,50

Diamètre O.-A. — Le diamètre O.-A. est assez faible; il ne mesure en moyenne que 85,73 millimètres, avec un maximum de 94 millimètres et un minimum de 75 millimètres, qui se présente deux fois; l'étendue des oscillations est de 19 millimètres. Cette même hauteur mesurait 95 millimètres sur le crâne franc de Spiennes (*).

(*) E. Houzé. *Les Francs des cimetières de Belgique*, extrait du Bulletin de la Société d'Anthropologie de Bruxelles, t. X, 1891-1892, p. 11.

DIAMÈTRE BIZYGOMATIQUE. — La largeur bizygomatique mesure en moyenne 129,06; le maximum est de 139 millimètres, le minimum de 116 millimètres. L'écart, assez étendu, est de 23 millimètres. Avec cette moyenne peu élevée, bien inférieure à celle de Saaflingen (*), qui est de 136,27, nous pouvons nous attendre à une quantité relativement grande de faces ovales et allongées; d'autre part, l'étendue des oscillations atteste les variations individuelles.

SÉRIATION INDIVIDUELLE. — Pour l'ordination nous laissons tomber les décimales et les cas particuliers se répartissent comme suit :

Indices.	Nombre.	Proportion p. c.	Indices.	Nombre.	Proportion p. c.
—	—	—	—	—	—
59	1	3,33	67	1	3,33
60	2	6,66	68	4	13,33
61	2	6,66	69	4	13,33
62	1	3,33	70	1	3,33
63	1	3,33	71	2	6,66
64	4	13,33	72	1	3,33
65	4	13,33	74	1	3,33
66	1	3,33			

Il n'y a pas un maximum de fréquence, vers lequel les autres indices convergent de part et d'autre. Nous arrivons par un mouvement assez désordonné à un premier maximum de fréquence; la décroissance, qui suit, n'est pas régulière et le même maximum se répète encore deux fois, sans décroître progressivement; nous pouvons toutefois dégager l'existence de deux types, de cette sériation irrégulière. Le minimum est de 59,85, le maximum de 74,57, avec un écart assez notable de 14,72. La médiane tombe après 65, dans les indices des faces courtes.

DISTRIBUTION SÉRIAIRE. — Le classement, d'après la nomenclature de Topinard, est indiqué dans le tableau suivant :

(*) L. De Pauw et V. Jacques. *Le Cimetière de Saaflingen*, extrait du BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ D'ANTHROPOLOGIE DE BRUXELLES, t. III, 1884-1885, p. 30.

CATÉGORIES	Nombre	Prop. °/o	Indice moyen	Indice maximum	Indice minimum
Leptoprosopes . . .	9	30	70,93	74,57	69,40
Mesoprosopes . . .	6	20	67,75	68,50	66,90
Chamaeprosopes . .	15	50	63,23	65,92	59,85

La conclusion à laquelle nous conduit notre analyse, c'est que les faces courtes sont les plus nombreuses; M. Houzé n'a pas calculé l'indice facial supérieur pour Mendonck et nous ne pouvons comparer nos relevés avec les siens; il a établi un autre indice, avec d'autres données; la population de Mendonck est mésoprosope, mais parmi les types fondamentaux, c'est aussi le type à face large et courte qui a la prépondérance (*).

Les leptoprosopes ne sont que faiblement représentés. L'expansion transversale de la face peut résulter de deux causes : du raccourcissement du diamètre O.-A. et de l'étendue du diamètre bizygomatique. Le diamètre O.-A. moyen des leptoprosopes est 88,75 et beaucoup de diamètres n'atteignent pas cette dimension ; beaucoup de diamètres bizygomatiques dépassent la longueur moyenne de 129,06.

Moyennes. — L'indice moyen est 66,42. Il classe nos Flamands parmi les mésoprosopes, bien que ce groupe soit le moins nombreux et que la fusion des types faciaux soit peu accentuée, ne paraissant affecter que la cinquième partie de la population. Cet indice est analogue à l'indice moyen des Francs du cimetière d'Harmignies (**). L'indice moyen des leptoprosopes est 70,93, avec un écart de 5,14.

Indice facial et indice céphalique. — Quelle répartition des indices faciaux obtenons-nous, quand nous les rapprochons de

(*) E. Houzé. *Enquête anthropologique sur le village de Mendonck.* Extrait du Bulletin de la Société d'Anthropologie de Bruxelles, t. XV, 1896-1897, p. 18.

(**) E. Houzé. *Les Francs des cimetières de Belgique.* Extrait du Bulletin de la Société d'Anthropologie de Bruxelles, t. X, 1891-1892, p. 9.

l'indice céphalique? Le petit tableau suivant fera saisir les relations qui existent entre l'indice du crâne et l'indice de la face :

CRANES	Leptoprosopes		Mesoprosopes		Chamaeprosopes		Indice moyen	Indice max.	Indice min.
	N.	Prop. °/.	N.	Prop. °/.	N.	Prop. °/.			
Dolichocéphales.	4	40	1	10	5	50	67,39	74,57	60,31
Mésaticéphales .	1	16,66	3	50	2	33,33	66,03	69,40	61,19
Brachycéphales .	4	28,57	2	14,28	8	57,14	65,91	70,00	59,85

Il ressort de notre examen comparatif, que si les moyennes concordent, les groupes sont loin de coïncider. Chaque groupe de crânes comprend des faces allongées, des faces moyennes et des faces courtes.

Certains crânes dolichocéphales n'ont qu'un faible diamètre O.-A. ou un diamètre bizygomatique trop étendu, pour fournir un indice mégasème. Certains crânes brachycéphales sont doués d'une face longue ou étroite, grâce au raccourcissement du diamètre bizygomatique ou au développement du diamètre O.-A.

Certains auteurs (*) admettent la corrélation entre la conformation de la tête et la conformation de la face et ils justifient les anomalies par le croisement des types craniens, dont l'un a transmis la face allongée tandis que l'autre a légué la brachycéphalie.

Voici, à notre avis, comment les faits se présentent : les moyennes des indices sont corrélatives et les proportions des groupes concordent, quand on envisage l'ensemble de la population; ainsi la proportion des chamaeprosopes cadre avec celle des brachycéphales dans la masse; dans les cas individuels cependant, les deux indices sont indépendants et se répartissent d'une manière discordante; tout ce qu'on peut constater, c'est que certains traits des caractères du crâne et de la face manifestent une certaine affinité; ainsi on pourra relever dans notre tableau que les faces courtes laissent deviner une certaine tendance à s'associer à la brachycéphalie.

(*) V. Ripley, *op. laud.*, p. 39.

CHAPITRE V

L'INDICE NASAL

PRÉLIMINAIRES. — Pour l'indice nasal, auquel on attache aussi une grande importance, nous avons adopté la nomenclature de Broca. Les leptorhiniens vont jusqu'à 47,99; les mésorhiniens commencent à 48 pour finir à 52,99 et l'embranchement des platyrhiniens commence à 53.

TABLEAU DES MENSURATIONS. — On trouvera les résultats de nos recherches consignés dans le tableau suivant :

Nos d'ordre.	No de la coll.	Indice céphalique.	Indice facial.	Haut. nasale.	Larg. nasale.	Indice nasal.
—	—	—	—	—	—	—
I	1	Sous-brach.	Mésopros.	56	27	48,21
II	4	Mésaticéph.	Mésopros.	54	26	48,14
III	5	Sous-brach.	Chamaepros.	49	27	55,10
IV	7	Sous-brach.	Leptopros.	56	23	41,03
V	8	Sous-brach.	Chamaepros.	53	26	49,05
VI	9	Mésaticéph.	Mésopros.	48	23	47,91
VII	10	Sous-dolich.	Leptopros.	48	25	52,08
VIII	13	Sous-brach.	Chamaepros.	54	26	48,14
IX	14	Sous-brach.	Leptopros.	54	27	50,00
X	17	Sous-brach.	Mésopros.	56	25	44,64
XI	18	Sous-brach.	Chamaepros.	54	27	50,00
XII	19	Mésaticéph.	Chamaepros.	50	26	52,00
XIII	22	Sous-dolich.	Mésopros.	56	25	44,64
XIV	24	Sous-brach.	Chamaepros.	56	23	41,07
XV	25	Dolichocéph.	Leptopros.	50	25	50,00
XVI	26	Dolichocéph.	Leptopros.	52	25	48,07
XVII	27	Sous-dolich.	Chamaepros.	54	27	50,00
XVIII	28	Dolichocéph.	Leptopros.	62	24	38,70
XIX	29	Sous-dolich.	Chamaepros.	50	27	54
XX	30	Brachycéph.	Leptopros.	53	26	49,05
XXI	31	Mésaticéph.	Chamaepros.	47	27	57,44
XXII	34	Sous-brach.	Chamaepros.	47	24	51,06
XXIII	35	Sous-brach.	Chamaepros.	63	28	44,44
XXIV	37	Sous-dolich.	Chamaepros.	51	28	54,90

Nos d'ordre.	No de la coll.	Indice céphalique.	Indice facial.	Haut. nasale.	Larg. nasale.	Indice nasal.
XXV	38	Mésaticéph.	Leptopros.	53	25	47,16
XXVI	43	Brachycéph.	Leptopros.	51	22	43,13
XXVII	44	Sous-dolich.	Chamaepros.	52	27	51,92
XXVIII	45	Sous-dolich.	Chamaepros.	51	28	54,90
XXIX	46	Sous-brach.	Chamaepros.	52	28	53,84
XXX	51	Mésaticéph.	Mesopros.	48	24	50,00

Hauteur nasale. — La hauteur moyenne est de 52,66 millimètres avec un maximum de 63 et un minimum de 47, qui se présente deux fois; l'intervalle est de 16 millimètres. La hauteur nasale moyenne des Francs des provinces de Namur, du Hainaut et du Brabant est respectivement de 53,60, 53,33 et 49,66 millimètres. Le maximum des Francs du Hainaut atteint 59 millimètres(*). A Saaflingen, la hauteur nasale moyenne est de 49,69 millimètres et l'écart n'est que de 12 millimètres (**).

Largeur des narines. — Le maximum est de 28, qui se présente deux fois. Le maximum des Francs du cimetière d'Anderlecht est de 30 millimètres. Le minimum est de 22 millimètres comme celui des Francs des provinces de Namur et du Hainaut. La moyenne est de 25,7 millimètres; elle est supérieure à celle des Francs des cimetières de Belgique. La moyenne des Francs du Hainaut est de 24,5 millimètres (***).

Sériation individuelle. — Voici le tableau que nous avons obtenu :

Indices.	Nombre.	Proport. p. c.	Indices.	Nombre.	Proport. p. c.
38	1	3,33	48	4	13,33
39	—		49	2	6,66
40	—		50	5	16,66

(*) E. Houzé. *Les Francs des cimetières de Belgique* (Extrait du Bulletin de la Société d'Anthropologie de Bruxelles, t. X, 1891-1892), p. 7.

(**) L. De Pauw et V. Jacques. *Le Cimetière de Saaflingen* (Extrait du Bulletin de la Société d'Anthropologie de Bruxelles, t. III, 1884-1885). Bruxelles, 1885, p. 34.

(***) E. Houzé. *Les Francs des cimetières de Belgique* (Extrait du Bulletin de la Société d'Anthropologie de Bruxelles, t. X, 1891-1892), p. 7.

Indices.	Nombre.	Proport. p. c.	Indices.	Nombre.	Proport. p. c.
—	—	—	—	—	—
41	2	6,66	51	2	6,66
42	—		52	2	6,66
43	1	3,33	53	1	3,33
44	3	10	54	3	10
45	—		55	1	3,33
46	—		56	—	
47	2	6,66	57	1	3,33

La médiane tombe après l'indice 49 et c'est l'indice 50 qui atteint le maximum de fréquence. La courbe est très irrégulière, mais elle laisse soupçonner la présence de trois groupes; on voit apparaître trois sommets, qui correspondent à chacun de ces groupes; dans la série des mésorhiniens on peut en observer deux, séparés par une dépression. D'où provient cette irrégularité ? On l'attribue au mélange des races et on assigne la même cause à la grande étendue des oscillations qui est de 18,74.

Répartition sériaire. — Le groupement a donné les résultats indiqués dans le tableau suivant :

INDICES	Nombre	Prop. °/o	Série de Mendonck	Série de Saaflingen	Série des Francs d'Anderlecht	Série des Néolithiques d'Hastière	Indice maximum	Indice minimum	Indice moyen
Leptorhiniens. .	9	30	48,07	62,96	60	16,66	47,91	38,70	43,51
Mésorhiniens . .	15	50	46,15	25,93	10	41,66	52,08	48,07	49,80
Platyrhiniens . .	6	20	5,78	11,11	30	41,66	57,44	53,84	55,00

Nous avons déjà constaté la prépondérance des crânes brachycéphales et chamaeprosopes; nous voyons maintenant les mésorhiniens l'emporter dans notre série. La population de Mendonck est aussi d'une leptorhinie qui confine à la mésorhinie, et dans le passé les Mérovingiens de Broca étaient mésorhiniens comme quelques séries actuelles de l'Europe (*). Les néolithiques

(*) P. Topinard. *Éléments d'Anthropologie générale*, Paris, 1885, p. 293.

de Belgique étaient également brachycéphales et mésorhiniens (*).

MOYENNE. — L'indice nasal moyen est 49,79 et il range nos Flamands dans l'embranchement auquel ils appartiennent en majorité.

INDICE NASAL ET INDICE CÉPHALIQUE. — Nous comparons l'indice nasal et l'indice céphalique dans le tableau suivant :

INDICE NASAL	Dolichocéphales		Mésaticéphales		Brachycéphales	
	Nombre	Prop. °/°	Nombre	Prop. °/°	Nombre	Prop. °/°
Leptorhinien	2	20	2	33,33	5	35,7
Mésorhinien	5	50	3	50	7	50
Platyrhinien	3	30	1	16,66	2	14,28
Indice maximum. . .	54,90		57,44		55,10	
Indice minimum . . .	38,70		47,16		41,03	
Indice moyen. . . .	47,61		50,33		47,61	

Quand nous mettons les deux indices en parallèle, l'indice céphalique moyen est mésaticéphale, comme l'indice nasal moyen est mésorhinien, mais l'harmonie est loin de régner ; quand nous parcourons les gammes des deux indices, nous remarquons que chaque groupe des indices céphaliques comprend des leptorhiniens, des mésorhiniens et des platyrhiniens.

INDICE NASAL ET INDICE FACIAL. — Le tableau suivant montre les rapports entre la conformation de la face et la conformation du nez :

INDICE NASAL	Leptoprosopes		Mésoprosopes		Chamaeprosopes	
	Nombre	Prop. °/°	Nombre	Prop. °/°	Nombre	Prop. °/°
Leptorhinien	4	44,44	3	50	2	13,33
Mésorhinien	5	55,55	3	50	7	46,66
Platyrhinien	0		0		6	40,00

(*) E. Houzé. *Enquête anthropologique sur le village de Mendonck* (Extrait du BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ D'ANTHROPOLOGIE DE BRUXELLES, t. XV, 1896-1897). Bruxelles, 1897, p. 21.

Les leptorhiniens n'appartiennent pas exclusivement au groupe des faces allongées; les faces allongées et les faces moyennes comptent des leptorhiniens et des mésorhiniens en quantités à peu près égales. D'autre part, tous les platyrhiniens viennent se ranger dans les groupes des faces courtes, qui tend à rejeter les leptorhiniens et à attirer la majorité des mésorhiniens; les caractères du nez et de la face, tout en n'étant pas en corrélation, manifestent cependant une certaine affinité qui agit sur certains traits pour les associer.

COMPARAISON DES TROIS INDICES. — A supposer qu'il existe des types caractérisés par la dolichocéphalie, la face allongée et un nez long et mince, on peut se demander en quelle proportion on les rencontre dans la population de la Westflandre. La même question peut se poser pour les brachycéphales caractérisés par une face courte, la mésorhinie ou la platyrhinie. Le tableau suivant peut fournir les éléments de la réponse à ces questions :

Indice facial	Indice nasal	Dolichocéphales	Mésaticéphales	Brachycéphales
Leptoprosopes	Leptorhiniens	1	1	2
	Mésorhiniens	3	0	2
	Platyrhiniens	0	0	0
Mesoprosopes	Leptorhiniens	1	1	1
	Mésorhiniens	0	2	1
	Platyrhiniens	0	0	0
Chamaeprosopes	Leptorhiniens	0	0	2
	Mésorhiniens	2	1	4
	Platyrhiniens	3	1	2

Un seul crâne est dolichocéphale, leptoprosope et leptorhinien : la proportion des types purs est donc de 3,33 p. c. Si nous pouvions tenir compte des données, qui résultent de la taille et de la coloration, bien des sujets seraient encore éliminés et la proportion ne cesserait de décroître, à mesure qu'un nouveau caractère interviendrait dans le tableau comparatif.

Les brachycéphales semblent plus tenaces à se maintenir et à conserver leurs caractères typiques; leurs mésorhiniens et plathy-

rhiniens, à face courte, sont au nombre de six, ce qui élève la moyenne à 20 p. c.; cette moyenne énorme perdrait beaucoup de son importance si la taille et la coloration des yeux et des cheveux entraient en ligne de compte.

Pour le grand duché de Bade, M. Ammon a mis d'autres caractères en regard pour obtenir la proportion des types purs; en combinant les résultats de l'observation de la taille, de la coloration de la peau, des yeux et des cheveux et de la conformation de la tête, il a pu constater que le type nordique est représenté seulement dans la proportion de 1,45 p. c., tandis que le type Alpin, avec une proportion de 40,6 p. c. de brachycéphales, n'arrive qu'à une moyenne de 0,39 p. c. (*).

CHAPITRE VI

RECHERCHES ANTHROPOLOGIQUES SUR LE VIVANT

Préliminaires. — Pour les observations sur le vivant, nous avons réussi à constituer une belle série de cent sujets; ils sont pris au hasard, car ils font partie de deux cours, du cours de philosophie au petit séminaire de Roulers et du premier cours de l'école normale de Thourout (année scolaire 1904-1905); ils sont originaires de tous les coins de la province et représentent toutes les classes de la société; les diverses régions y interviennent en proportions équivalentes.

Tableau des observations. — Le tableau suivant contient le résultat de notre enquête. Pour l'indice céphalique, nous suivons la nomenclature de Broca et nous ramenons les indices à l'indice craniométrique en retranchant deux unités.

Nos d'ordre.	Lieu d'origine.	D.T.	D.A.-P.	Indice cranio-métrique.	Couleur des yeux.	Couleur des cheveux.	Taille.
1	Dickebusch	154	192	78,20	bruns	bruns	1,74
2	Wervicq	158	196	78,61	bleus	blonds	1,72
3	Dixmude	154	196	76,57	bleus	bruns	1,68

(*) O. Ammon, *op. laud.*, p. 209.

Nos d'ordre	Lieu d'origine	D.T.	D.A.-P.	Indice cranio-métrique.	Couleur des yeux.	Couleur des cheveux.	Taille.
—	—	—	—	—	—	—	—
4	Heyst	166	190	85,36	interm.	bruns	1,74
5	Langemarck	158	186	82,94	bruns	bruns	1,65
6	Ichteghem	148	190	75,89	interm.	bruns	1,75
7	Iseghem	152	186	79,72	interm.	bruns	1,71
8	Vormezeele	144	196	71,46	bruns	bruns	1,65
9	Vinckhem	150	190	76,94	bleus	blonds	
10	Beernem	154	194	77,38	interm.	bruns	1,80
11	Coxyde	150	198	73,75	bruns	bruns	1,68
12	Leysele	146	186	76,49	bleus	blonds	1,70
13	Lisseweghe	146	190	74,84	bleus	bruns	
14	Proven	146	192	74,04	bruns	bruns	
15	Pollinckhove	150	194	75,31	interm.	bruns	1,64
16	Merckhem	152	186	79,72	bleus	blonds	1,61
17	Bruges	154	194	77,38	bleus	bruns	
18	Ploegsteert	150	190	76,94	bleus	bruns	
19	Cortemarck	150	190	76,94	bleus	bruns	
20	Oedelem	152	190	78,00	interm.	bruns	1,78
21	Adinkerke	144	190	73,78	interm.	bruns	1,81
22	Moorslede	162	204	77,41	bruns	bruns	
23	Hoogstade	152	178	83,39	bleus	blonds	1,71
24	Wilskerke	148	192	75,08	interm.	bruns	
25	Hooglede	152	184	80,60	interm.	bruns	1,69
26	Reninghelst	142	182	76,02	bruns	bruns	1,70
27	Passchendaele	152	184	80,60	bleus	bruns	1,75
28	Leffinghe	138	180	74,66	bruns	bruns	1,68
29	Pervyse	154	196	76,57	bruns	bruns	1,73
30	Wynghene	152	190	78,80	interm.	blonds	1,69
31	Beernem	152	192	77,16	bleus	bruns	1,70
32	Pollinckhove	144	196	71,46	bleus	blonds	1,76
33	Meulebeke	146	178	80,02	bleus	bruns	1,66
34	Bev.-Roulers	158	186	82,94	bleus	blonds	
35	Hulste	154	196	76,57	bleus	blonds	
36	Roulers	154	188	79,91	bleus	blonds	
37	Bruges	168	192	85,50	interm.	bruns	1,72

Nos d'ordre	Lieu d'origine	D.T.	D.A.-P.	Indice cranio-métrique.	Couleur des yeux.	Couleur des cheveux.	Taille.
38	Bruges	159	182	85,36	bleus	blonds	
39	Bruges	169	197	83,78	bleus	blonds	
40	Bruges	152	195	75,94	bruns	bruns	1,65
41	Thourout	158	184	83,86	bruns	bruns	
42	Bruges	153	184	81,15	interm.	bruns	1,59
43	Bruges	150	188	77,78	bruns	bruns	
44	Bruges	152	187	79,28	bruns	bruns	1,76
45	Bruges	156	188	80,97	bruns	bruns	
46	Bruges	153	178	83,95	bruns	bruns	
47	Bruges	164	192	83,41	bruns	bruns	
48	Bruges	150	193	75,72	bruns	bruns	
49	Lisseweghe	165	186	86,70	bruns	bruns	
50	Desselghem	150	194	75,31	bleus	bruns	
51	Slype	166	196	82,69	bruns	bruns	1,71
52	Ledeghem	160	186	84,02	interm.	bruns	1,56
53	Hooglede	149	189	76,83	bleus	bruns	1,56
54	Bever.-sur-Lys	158	192	80,29	bleus	bruns	
55	Thourout	146	189	75,24	interm.	bruns	1,74
56	Westroosbeke	161	191	82,29	bruns	bruns	
57	Menin	156	196	77,59	bruns	blonds	1,62
58	Courtrai	150	184	83,86	bruns	bruns	1,65
59	Cachtem	161	186	84,55	interm.	bruns.	1,73
60	Zonnebebe	156	183	83,24	bruns	bruns	
61	Zillebeke	158	184	83,86	bruns	bruns	1,65
62	Eessen	160	193	80,90	interm.	bruns	1,71
63	Poperinghe	158	196	78,61	bleus	blonds	1,72
64	Thielt	160	182	85,91	bruns	bruns	
65	Thielt	148	186	77,56	bleus	bruns	
66	Poperinghe	152	196	75,55	bleus	blonds	1,90
67	Poperinghe	154	186	80,79	bleus	bruns	1,62
68	Furnes	150	192	76,12	bleus	blonds	
69	Eeghem	156	186	81,87	bruns	bruns	1,68
70	Thielt	157	196	78,10	bleus	blonds	1,75
71	Dixmude	154	185	81,24	bleus	blonds	1,65

Nos d'ordre	Lieu d'origine	D.T.	D.A.-P.	Indice cranio-métrique.	Couleur des yeux.	Couleur des cheveux.	Taille.
—	—	—	—	—	—	—	—
72	Bever.-Rousb.	144	186	75,41	bleus	bruns	1,76
73	Meulebeke	157	183	83,79	bleus	bruns	
74	Mouscron	155	194	77,89	bleus	bruns	
75	Ypres	158	196	78,61	interm.	bruns	1,60
76	Ypres	146	182	78,21	bruns	bruns	
77	Coolscamp	154	181	83,08	interm.	bruns	1,60
78	Merckhem	151	175	84,28	interm.	bruns	
79	Harelbeke	150	190	76,94	bruns	bruns	1,65
80	Waerdamme	162	191	82,81	interm.	bruns	
81	Thourout	164	200	80,00	bruns	bruns	1,82
82	Roulers	154	190	79,05	bleus	bruns	
83	Roulers	156	196	77,59	bruns	bruns	
84	Courtrai	150	188	77,78	bruns	bruns	
85	Lichtervelde	154	206	72,75	bruns	bruns	
86	Ypres	150	184	79,52	bleus	blonds	
87	Ypres	152	204	72,50	bruns	blonds	
88	Wielsbeke	159	192	80,81	bruns	bruns	
89	Pitthem	163	200	79,50	bruns	bruns	
90	Avelghem	166	196	82,69	bleus	blonds	
91	Menin	164	196	81,67	bleus	blonds	
92	Cuurne	164	192	83,41	bleus	bruns	
93	Pitthem	164	194	82,53	bleus	blonds	
94	Dudzeele	162	196	80,65	bleus	bruns	
95	Ettelghem	163	184	86,58	interm.	blonds	
96	Steenkerke	152	173	85,86	interm.	bruns	
97	Zande	150	183	79,96	bruns	bruns	
98	Westkerke	152	189	78,42	bruns	bruns	
99	Snaeskerke	169	183	90,34	bruns	bruns	
100	Ghistelles	144	200	70,00	interm.	bruns	

Diamètre A.-P. — Le diamètre moyen est 189,80 millimètres : il a pour extrêmes 173 et 206 millimètres. Il coïncide à peu près avec la médiane, qui tombe à 190 millimètres. Le diamètre moyen de Mendonck est 192 millimètres et celui de la Flandre Occidentale, obtenu par M. Houzé sur 47 sujets est de 195,44 millimètres.

DIAMÈTRE TRANSVERSAL. — La moyenne de notre série est de 154,36 millimètres avec un minimum de 138 millimètres et un maximum de 169 millimètres. Elle coïncide avec la médiane et se présente 12 fois. La moyenne de M. Houzé est de 157,38 millimètres (*).

SÉRIATION INDIVIDUELLE. — L'ordination individuelle est consignée dans le tableau suivant :

Indices.	N. et Prop.	Indices.	N. et Prop.	Indices.	N. et Prop.
70	1	76	11	82	7
71	2	77	10	83	10
72	2	78	9	84	3
73	2	79	9	85	5
74	3	80	10	86	2
75	9	81	4	90	1

L'écart de 20 millimètres est notable et il résulte de cette différence qu'il n'existe pas de race flamande et que des types distincts sont mélangés sur notre territoire; pour les races pures on admet un écart de 14 millimètres (**) et c'est la fusion des types qui relève l'amplitude des oscillations de plusieurs unités.

Parmi les divers sommets de la courbe, on constate que c'est l'indice 76 qui atteint le maximum de fréquence et le mouvement irrégulier de cette courbe atteste une fois de plus que la population de la Westflandre a subi un grand mélange de races.

SÉRIATION QUINAIRE. — Le groupement quinaire a abouti aux résultats suivants :

Groupes.	Série du vivant.	Houzé.	Crânes.
Dolichocéphales	10 p. c.	17,02	14 p. c.
Sous-dolichocéphales	27 p. c.	23,40	20 p. c.
Mésaticéphales	21 p. c.	38,29	20 p. c.
Sous-brachycéphales	23 p. c.	10,63	32 p. c.
Brachycéphales	19 p. c.	10,63	14 p. c.

(*) E. Houzé. *Les Indices céphaliques des Flamands et des Wallons*. Bruxelles. 1882, p. 60

(**) L. De Pauw et V. Jacques, *op. cit.*, p. 15.

Nous constatons de nouveau la prépondérance de l'élément brachycéphale, mais la moyenne est un peu plus faible que celle de notre série de crânes. A quelle cause faut-il attribuer cette très légère inflexion? Toutes les régions de la province sont également représentées dans notre série; il n'en est pas de même pour notre collection de crânes, dont quelques-uns proviennent de la plaine maritime, mais dont la majorité a été recueillie dans le sud-est de la province, où on rencontre plus de brachycéphales.

Si le type dolichocéphale appartient à la race nordique et si le type brachycéphale relève de la race alpine, le groupement quinaire atteste la présence des deux races et fait connaître les proportions dans lesquelles elles partagent la population de la Westflandre.

Indice céphalique moyen. — Nos 100 Flamands ont un indice céphalique moyen de 81,82. Il ne concorde pas avec la médiane, qui se voit à 79.

En retranchant deux unités, nous obtenons 79,32. Celui de notre série de crânes était de 79,33; nos deux séries viennent donc se confondre en cette synthèse, qui résume les observations, et se prêter un appui réciproque; on peut fixer l'indice céphalique moyen de la Westflandre à 79,32; il penche davantage vers la brachycéphalie, qui prédomine, que l'indice 78,52, obtenu par M. Houzé, mais la différence est trop faible pour modifier la signification de cette vue d'ensemble et accuser une erreur notable d'un côté ou de l'autre.

L'Indice céphalique au nord-ouest et au sud-est. — Au nord-ouest de la province nous rencontrons 44 p. c. de dolichocéphales, 20 p. c. de mésaticéphales et 36 p. c. de brachycéphales; l'élément dolichocéphale prédomine et l'indice céphalique moyen est de 78,83.

Dans la seconde région nous discernons 30 p. c. de dolichocéphales, 22 p. c. de mésaticéphales et 48 p. c. de brachycéphales. La population est plus brachycéphale et l'indice moyen est de 79,81.

La première région a été peuplée depuis l'époque néolithique, jusqu'à l'époque romaine; alors l'envahissement de la mer y a étendu de nouvelles couches, qui ont été reconquises sur l'élément marin et ont reçu une nouvelle population. Dans l'autre région, les

alluvions se voient seulement dans les prairies qui avoisinent les cours d'eau; la population n'y a subi, de par le mouvement du sol, aucune vicissitude, depuis l'époque néolithique. Il est intéressant de constater que la population des deux régions accuse aussi une certaine diversité de caractères anthropologiques.

L'INDICE CÉPHALIQUE ET LA TAILLE. — Nous possédons la taille de 50 sujets; en effectuant la répartition, d'après la nomenclature de Topinard, nous obtenons le groupement suivant :

Grandes tailles de 1m,70 et au-dessus	Tailles au-dessus de la moyenne de 1m,65 à 1m,69	Tailles au-dessous de la moyenne de 1m,64 à 1m,60	Petites tailles de 1m,59 et au-dessous
56 %	26 %	12 %	6 %

Établissons à présent le rapport entre la taille et l'indice céphalique :

GROUPES	Nombre	Taille moyenne	De 1,70 et plus		De 1,65 à 1,69		De 1,60 à 1,64		De 1,59 et moins	
			Nombre	Prop. %	Nombre	Prop. %	Nombre	Prop. %	Nombre	Prop. %
Dolichocéphales	21	1,712	12	57,14	6	28,57	2	9,52	1	4,76
Mésaticéphales	11	1,711	8	72,72	1	9,09	2	18,18		
Brachycéphales	18	1,680	8	44,44	6	33,33	2	11,11	2	11,11

Bien que notre série ne soit pas assez étendue pour vérifier la loi de la haute taille des dolichocéphales et de la moindre taille des brachycéphales, nous pouvons constater que la plus haute stature moyenne se rencontre chez les dolichocéphales, que la proportion des hautes tailles est plus forte chez eux que chez les brachycéphales et que pour les autres catégories de tailles la proportion des brachycéphales est plus élevée que celle des dolichocéphales.

Si nous recherchons l'indice céphalique moyen pour chaque catégorie de tailles, nous arrivons aux résultats suivants :

Tailles.	Grandes tailles.	Tailles au-dessus de la moyenne.	Tailles au-dessous de la moyenne.	Petites tailles.
—	—	—	—	—
Indices céphaliques moyens	78,60	78,29	79,18	80,66

L'indice céphalique moyen des tailles au-dessus de la moyenne est moins élevé que l'indice moyen des hautes tailles; on peut constater néanmoins une progression assez régulière des indices, qui atteste que la dolichocéphalie est associée à la haute taille et la brachycéphalie à une taille moins élevée (*).

Le grand nombre de hautes statures, que nous avons relevé, nous amène à la moyenne assez forte de 1m,70, qui est à comparer avec celle de 1m,703 de Mendonck et qui a pour minimum 1m,56 et pour maximum 1m,90 (**).

L'INDICE CÉPHALIQUE ET LA COULEUR DES YEUX. — Suivant l'exemple de certains auteurs, nous distinguons ici les yeux en trois catégories, nous admettons les yeux bleus, les yeux marrons et les yeux intermédiaires et nous arrivons à la classification suivante :

Yeux.	Nombre.	Dolichocéphales.	Mésaticéphales.	Brachycéphales.
—	—	—	—	—
Bleus	37	16	8	15
Intermédiaires	23	7	4	12
Marrons	38	14	9	15

La proportion des yeux marrons diffère peu de celle que nous avons obtenue dans notre enquête sur la coloration de l'iris, et la proportion des yeux bleus est plus élevée, parce que sans doute

(*) O. Ammon, *op. laud.*, p. 112.

(**) M. Houzé a trouvé comme taille moyenne de la Flandre Occidentale 1m,663. E. Houzé. *La Taille, la Circonférence thoracique et l'Angle xiphoidien des Flamands et des Wallons.* Dans BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ D'ANTHROPOLOGIE DE BRUXELLES, t. VI. Bruxelles, 1887, p. 282. Pour mille miliciens nous avons obtenu 1675 millimètres.

nous n'avons pas eu l'occasion de nous servir de l'échelle chromatique de Broca.

Nous n'avons aucune déduction à tirer du rapprochement de la coloration des yeux et de l'indice céphalique. Nous constatons simplement que les yeux bleus et les yeux marrons se rencontrent en quantités équivalentes chez les brachycéphales comme chez les dolichocéphales. A l'exemple de M. Ammon, nous pouvons peut-être attribuer cette répartition au mélange des races que notre population a subi (*).

L'Indice céphalique et la couleur des cheveux. — Nous n'avons pu établir que deux classes de cheveux, les cheveux blonds et les cheveux foncés ; la proportion des blonds est déjà en décroissance, parce que nos sujets sont plus avancés en âge que les enfants des écoles.

Tout ce qu'on peut apercevoir, c'est que les cheveux foncés manifestent une certaine inclination vers la brachycéphalie. M. Ammon a constaté en Bade l'absence de tout rapport entre la coloration des cheveux et l'indice céphalique (**).

Le type blond, le type brun et l'indice céphalique. — Les types bruns sont au nombre de 36 : ils se répartissent comme suit pour l'indice céphalique : 12 sont dolichocéphales, 9 mésaticéphales et 15 brachycéphales.

Parmi les types blonds qui sont au nombre de 20, il y a 6 dolichocéphales, 6 mésaticéphales et 8 brachycéphales.

Le type blond, le type brun et la taille. — Nous possédons les tailles de 9 sujets du type blond : ils ont une taille moyenne de 1724 millimètres ; les 15 sujets du type brun, dont nous connaissons la taille, donnent comme moyenne 1m,70 ; la taille tend donc à diminuer chez les sujets du type foncé ; ils ont cependant conservé une haute stature.

Conclusion. — Si nous envisageons l'ensemble des caractères, qui constituent le type nordique, nous rencontrons trois sujets qui les possèdent et nous arrivons à une moyenne de 6 p. c. Voici un type blond : c'est le n° 32 de notre série (voir figure ci-contre) :

(*) O. Ammon, *op. cit.*, p. 186.
(**) O. Ammon, *op. cit.*, p. 190.

Deux sujets relèvent du type alpin, qui associe une taille petite ou moyenne à la brachycéphalie et aux nuances foncées ; c'est une moyenne de 4 p. c. inférieure à celle du type nordique, bien que les types bruns soient les plus nombreux ; mais nous avons constaté que beaucoup de types foncés sont dolichocéphales et que certains brachybruns ont une taille au-dessus de la moyenne et se sont approprié un caractère que l'on attribue au type nordique et qui les élimine du type alpin.



CHAPITRE VII

CARACTÈRES DESCRIPTIFS ET ANCIENNETÉ DE QUELQUES TYPES CRANIENS.

Type dolichocéphale. — Nous avons dégagé, dans notre série de crânes, un type dolichocéphale ; c'est le n° 28 de notre collection. Fournissons à présent quelques caractères descriptifs de ce crâne, pour en démêler plus complètement la physionomie.

Il a l'épine nasale assez prononcée ; l'aire des orbites est grande et l'indice orbitaire est mégasème ; à la racine du nez, nous obser-

vons une dépression assez marquée; la glabelle est en relief et le développement des arcades sourcilières correspond à celui de la glabelle; le front est très fuyant et la courbe antéro-postérieure, qui se développe régulièrement, se termine par une saillie très forte de l'occipital.

LES CRANES DE PITTHEM, DE ROULERS ET DE ZEEBRUGGE. — Les découvertes archéologiques n'ont contribué que pour une part très minime à l'anthropologie de la Westflandre. Nous ne connaissons que les cinq crânes qui ont été recueillis à Pitthem, à Roulers, à Lisseweghe et à Zeebrugge.

En 1896, nous avons effectué des fouilles à Pitthem, dans un champ appelé cimetière païen; il renfermait des débris de tegulae et des tessons de poterie romaine. Le cimetière pouvait être un cimetière à inhumation de l'époque romaine ou un cimetière de l'époque franque. Le seul crâne que ces recherches nous ont procuré a été mensuré par M. Jacques. C'est un type franchement dolichocéphale. En relevant approximativement le diamètre antéro-postérieur (180), M. Jacques a obtenu, avec un diamètre transversal de 130, l'indice céphalique de 72,22. L'indice facial de 70,4 était en corrélation avec l'indice céphalique (*).

Au mois de novembre 1905, nous avons recueilli à Roulers, dans un gisement tourbeux à pilotis, une calotte cranienne sous-dolichocéphale (**).

Le crannoge de Zeebrugge a fourni un crâne avec l'indice céphalique de 74,85 (***).

TYPES BRACHYCÉPHALES. — Notons à présent quelques caractères, par lesquels se distingue l'élément brachycéphale et signalons d'abord les traits communs. Aucun de nos six crânes ne présente une saillie sensible de l'occipital et la courbe antéro-postérieure se termine par une chute presque verticale; c'est là une différence très importante avec le type dolichocéphale. Ces six crânes ont aussi les orbites plus basses.

(*) V. Jacques, *Le Cimetière franc de Pitthem*. Dans BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ D'ANTHROPOLOGIE DE BRUXELLES, t. XV. Bruxelles, 1897, pp. 203-206.

(**) Renseignement inédit.

(***) V. Jacques, *Note sur le crâne trouvé à Zeebrugge*. Dans BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ D'ANTHROPOLOGIE DE BRUXELLES, t. XXIV. Bruxelles, 1905, p. XXII.

Pour d'autres caractères ces six crânes s'éloignent aussi les uns des autres.

Le n° 5 de notre collection a l'épine nasale peu saillante; on n'aperçoit pas de dépression à la racine du nez; le front est un peu fuyant, tandis que la glabelle et les arcades sourcilières sont nulles.

Le n° 8 et le n° 36 ont le front droit; pour les autres caractères, ils se rapprochent du n° 5.

Le n° 13, le n° 18 et le n° 46 ont l'épine nasale plus accusée et ils tiennent encore du type dolichocéphale par le front fuyant, la dépression plus forte à la racine du nez et la saillie de la glabelle et des arcades sourcilières.

LES CRANES DE ROULERS ET DE LISSEWEGHE. — Les travaux publics, exécutés à Roulers en 1899, dans un bassin traversé par la Mandel, amenèrent la découverte de nombreux pilotis, d'ossements d'animaux, d'un petit anneau en bronze et d'un squelette. C'était probablement un gisement palafittique, antérieur à l'époque romaine. Par son indice céphalique, 81,92, la saillie du front et la forme arrondie de l'occipital, le crâne de Roulers, étudié par M. Houzé, est apparenté aux brachycéphales de Furfooz et d'Hastière (*).

Un crâne, trouvé à Lisseweghe en 1896, avec des poteries du haut moyen âge, lors du creusement du canal maritime, semble appartenir à la même race; il est mésaticéphale, mais son aspect, l'indice facial de 66,19 et l'indice nasal de 53,86, le rangent dans la série brachycéphale, observée à Saaflingen (**).

(*) E. Houzé, *Ossements humains, trouvés dans la station lacustre de Roulers*, dans BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ D'ANTHROPOLOGIE DE BRUXELLES, t. XIX. Bruxelles, 1900, pp. XXVI et suiv.

(**) V. Jacques, *Note sur le crâne de Lisseweghe*, dans BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ D'ANTHROPOLOGIE DE BRUXELLES, t. XV. Bruxelles, 1897, p. 222.

TABLE DES MATIÈRES

MÉMOIRE

SUR

L'ATTRACTION DU PARALLÉLIPIPÈDE ELLIPSOÏDAL

PAR

M. le Vte de SALVERT

Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille.

CHAPITRE II (*)

Le point attiré étant situé dans un plan principal du Système Ellipsoïdal, expression de la Composante Normale au dit plan principal.

RÉDUCTION DE LA RECHERCHE A LA DÉTERMINATION D'UNE SEULE INTÉGRALE DOUBLE, OU CALCUL EFFECTIF DE LA PREMIÈRE QUADRATURE, DANS LE CAS LE PLUS GÉNÉRAL. — Avant d'étudier le Cas le plus général, nous voulons, avons-nous dit dans l'Introduction de ce travail, traiter en détail un cas particulier assez étendu pour lequel les résultats s'exprimeront à l'aide des éléments classés et étudiés dans l'état actuel de l'Analyse, à savoir celui où le point attiré est supposé situé dans l'un des trois plans principaux du Système Ellipsoïdal auquel appartiennent les six surfaces limitatives du solide attirant proposé. Or, dans ce problème particulier, la Composante de l'Attraction normale au plan principal envisagé s'obtient par des procédés plus simples que les deux autres Composantes, parallèles au plan, et doit dès lors être traitée à part. Son étude seule fera donc l'objet de ce second Chapitre, nous réservant

---

(*) Voir le Chapitre I au Tome XXI, 2e partie (p. 131) des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, 1896-97.

d'examiner dans le Chapitre suivant, à titre de sous-cas particulier, l'hypothèse intéressante où le point attiré serait situé sur l'un des axes mêmes du Système Ellipsoïdal, problème qui nous permettra de nouveau d'en pousser jusqu'au bout la solution, c'est-à-dire d'arriver à des formules prêtes pour la détermination numérique des résultats.

Mais, avant d'aborder le Cas particulier qui doit faire ainsi l'objet du présent Chapitre, nous allons tout d'abord reprendre pour le Cas le plus général, c'est-à-dire en partant des définitions analytiques (1) et (2) [de l'Introduction] relatives aux Composantes et à la distance ρ qui y figure, le calcul de la première quadrature, en étendant simplement à ces nouvelles données, sans en modifier l'esprit ni la méthode, celui que nous avons développé au début du Chapitre I précédent, pour les définitions particulières (11) et (16) des quantités précitées.

Posant donc, comme alors [formules (19)], à cet effet,

$$\Omega = \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{\rho} \frac{pdp}{\sqrt{P}}, \qquad \Omega' = \int_{q_1}^{q_2} \frac{1}{\rho} \frac{qdq}{\sqrt{Q}}, \qquad \Omega'' = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\rho} \frac{rdr}{\sqrt{R}},$$

valeurs dont la première donnera, par la différentiation en q, les limites q_1 et q_2 (10) étant constantes par hypothèse, et les dénominateurs ρ et $\sqrt{P}$ (33) toujours différents de zéro entre ces limites,

$$\frac{d\Omega}{dq} = \int_{p_1}^{p_2} \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{pdp}{\sqrt{P}},$$

nous en déduirons encore, en multipliant, en premier lieu, par $\sqrt{Q}\, dq$,

$$\sqrt{Q} \frac{d\Omega}{dq} dq = \int_{p_1}^{p_2} \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{pdp}{\sqrt{P}} \cdot \sqrt{Q}\, dq$$

$$= \int_{p_1}^{p_2} \frac{Q}{q} \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{pdp}{\sqrt{P}} \frac{qdq}{\sqrt{Q}},$$

puis, en second lieu, par le facteur $\frac{R'dr}{2\sqrt{R}} = \frac{R'}{2r} \frac{rdr}{\sqrt{R}}$ dans lequel R'

désigne la dérivée de R,

$$\sqrt{Q}\frac{d\Omega}{dq}dq.\frac{R'dr}{2\sqrt{R}}=\int_{p_1}^{p_2}\frac{R'}{2r}\frac{Q}{q}\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{pdp}{\sqrt{P}}\frac{qdq}{\sqrt{Q}}\frac{rdr}{\sqrt{R}},$$

et de là, en permutant dans ce résultat les deux variables q et r, changement qui n'atteint pas les quantités ρ (1) ni Ω (19),

$$\sqrt{R}\frac{d\Omega}{dr}dr.\frac{Q'dq}{2\sqrt{Q}}=\int_{p_1}^{p_2}\frac{Q'}{2q}\frac{R}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{pdp}{\sqrt{P}}\frac{qdq}{\sqrt{Q}}\frac{rdr}{\sqrt{R}},$$

puis retranchant alors ces deux derniers résultats l'un de l'autre, on obtiendra

$$\left(\frac{R'\sqrt{Q}}{2\sqrt{R}}\frac{d\Omega}{dq}-\frac{Q'\sqrt{R}}{2\sqrt{Q}}\frac{d\Omega}{dr}\right)dq\,dr$$

$$=\int_{p_1}^{p_2}\left[\frac{R'}{2r}\cdot\frac{Q}{q}\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{\rho}\right)-\frac{Q'}{2q}\cdot\frac{R}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\frac{pdp}{\sqrt{P}}\frac{qdq}{\sqrt{Q}}\frac{rdr}{\sqrt{R}},$$

d'où finalement, en intégrant en q et r les deux membres de l'égalité que nous venons de former, et ajoutant ensuite les trois égalités semblables que donnerait la permutation circulaire des trois variables p, q, r, résultera la nouvelle égalité,

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}&\int_{q_1}^{q_2}\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{R'\sqrt{Q}}{2\sqrt{R}}\frac{d\Omega}{dq}-\frac{Q'\sqrt{R}}{2\sqrt{Q}}\frac{d\Omega}{dr}\right)dq\,dr\\&+\int_{r_1}^{r_2}\int_{p_1}^{p_2}\left(\frac{P'\sqrt{R}}{2\sqrt{P}}\frac{d\Omega}{dr}-\frac{R'\sqrt{P}}{2\sqrt{R}}\frac{d\Omega}{dp}\right)dr\,dp\\&+\int_{p_1}^{p_2}\int_{q_1}^{q_2}\left(\frac{Q'\sqrt{P}}{2\sqrt{Q}}\frac{d\Omega}{dp}-\frac{P'\sqrt{Q}}{2\sqrt{P}}\frac{d\Omega}{dq}\right)dp\,dq\\&=\int_{p_1}^{p_2}\int_{q_1}^{q_2}\int_{r_1}^{r_2}-\begin{vmatrix}1, & \frac{P'}{2p}, & \frac{P}{p}\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{\rho}\right)\\ 1, & \frac{Q'}{2q}, & \frac{Q}{q}\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{\rho}\right)\\ 1, & \frac{R'}{2r}, & \frac{R}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\rho}\right)\end{vmatrix}\frac{pdp}{\sqrt{P}}\frac{qdq}{\sqrt{Q}}\frac{rdr}{\sqrt{R}},\end{aligned}\right.$$

laquelle coïncidera visiblement avec l'équation (20), si l'on y introduit l'hypothèse $\rho_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 0$ (*), et dont l'interprétation successive des deux membres nous fournira de nouveau le résultat demandé.

Pour le premier, nous n'avons rien à changer, ni quant au résultat, à savoir le dernier membre des équations (26), ni quant à la démonstration elle-même, à ce que nous avons dit et développé dans le Chapitre I, car nous avons eu soin d'y observer expressément, en donnant la raison de ce dire (p. 21, *au bas*), que le résultat trouvé subsistait sans aucune modification dans tout autre cas, soit particulier, soit général, de la question.

Reste donc à interpréter le second membre seulement.

Pour cela, remarquant que l'expression actuelle de ρ^2 devient, en introduisant à la fois celle (13) de la somme $(x^2 + y^2 + z^2)$ qui représentait dans l'hypothèse du Chapitre I la distance ρ^2, en même temps que celle (8) des x, y, z,

$$(2)\left\{\begin{aligned}\rho^2 &= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \\ &= (x^2 + y^2 + z^2) - 2(x_0 x + y_0 y + z_0 z) + (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) \\ &= (p^2 + q^2 + r^2 - f) - 2\Big[x_0 . \frac{-pqr}{l . m} + y_0 . \frac{1}{lm}\sqrt{(l^2 - p^2)(l^2 - q^2)(l^2 - r^2)} \\ &\qquad + z_0 . \frac{i}{mn}\sqrt{(n^2 + p^2)(n^2 + q^2)(n^2 + r^2)}\end{aligned}\right.$$

et donnera, par conséquent, en la différentiant en p, puis tenant compte de nouveau des mêmes valeurs (8),

$$2\rho\frac{d\rho}{dp} = 2p - 2\Big[x_0 . \frac{-qr}{l . m} + y_0 . \frac{-p}{lm}\frac{\sqrt{(l^2 - q^2)(l^2 - r^2)}}{\sqrt{l^2 - p^2}} + z_0 . \frac{ip}{mn}\frac{\sqrt{(n^2 + q^2)(n^2 + r^2)}}{\sqrt{n^2 + p^2}}\Big]$$

(*) En effet, les premiers membres étant les mêmes de part et d'autre, il suffit d'observer, quant aux seconds membres, que dans la dite hypothèse $\rho_0 = 0$ du Chapitre I, la valeur (11) de ρ donnera alors

$$\frac{P}{p}\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{P}{p}\frac{-1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dp} = \frac{P}{p}\frac{-1}{\rho^2}\frac{p}{\rho} = \frac{-P}{\rho^3},$$

et de même pour les deux autres termes analogues.

$$= 2p - 2\left(\frac{x_0}{p}\,\frac{-pqr}{l.m} + y_0\cdot\frac{1}{lm}\sqrt{(l^2-p^2)(l^2-q^2)(l^2-r^2)}\cdot\frac{-p}{l^2-p^2}\right.$$

$$\left. + z_0\cdot\frac{i}{mn}\sqrt{(n^2+p^2)(n^2+q^2)(n^2+r^2)}\cdot\frac{p}{n^2+p^2}\right)$$

$$= 2p - 2\left(\frac{x_0}{p}x + y_0y\,\frac{-p}{l^2-p^2} + z_0z\,\frac{p}{n^2+p^2}\right),$$

ou en divisant par $2p\rho$,

$$\frac{1}{p}\frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{x_0x}{p^2} + \frac{y_0y}{l^2-p^2} - \frac{z_0z}{n^2+p^2}\right),$$

nous déduirons de là dès lors, en ayant égard à la définition (9bis), des P, Q, R, la valeur du terme

$$\frac{P}{p}\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{P}{p}\frac{-1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dp} = \frac{-P}{\rho^2}\cdot\frac{1}{p}\frac{d\rho}{dp}$$

$$= \frac{-P}{\rho^2}\cdot\frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{x_0x}{p^2} + \frac{y_0y}{l^2-p^2} - \frac{z_0z}{n^2+p^2}\right)$$

$$= \frac{-1}{\rho^3}\left(P - x_0x\,\frac{P}{p^2} + y_0y\,\frac{P}{l^2-p^2} - z_0z\,\frac{P}{n^2+p^2}\right)$$

$$= \frac{-1}{\rho^3}\left[P - x_0x\frac{P}{p^2} + y_0y(n^2+p^2) - z_0z\,(l^2-p^2)\right],$$

et la simple permutation circulaire des deux groupes (p, q, r) et (P, Q, R), qui n'atteint ni ρ ni les x, y, z (8), nous fournira immédiatement la valeur des deux autres termes analogues.

Cela posé, et nous reportant en outre aux valeurs (21) des trois dérivées P′, Q′, R′, nous trouverons successivement pour l'expression du déterminant qui figure dans l'élément de l'intégrale triple que nous voulons interpréter, et qui forme le second membre de l'équation ci-dessus (1),

$$
(3)\left\{
\begin{aligned}
&-\begin{vmatrix} 1, \frac{P'}{2p}, & \frac{P}{p}\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{\rho}\right) \\ 1, \frac{Q'}{2q}, & \frac{Q}{q}\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{\rho}\right) \\ 1, \frac{R'}{2r}, & \frac{R}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\rho}\right) \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1, f-2p^2, \frac{P}{p}\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{\rho}\right) \\ 1, f-2q^2, \frac{Q}{q}\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{\rho}\right) \\ 1, f-2r^2, \frac{R}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\rho}\right) \end{vmatrix} \\
&= 2\begin{vmatrix} 1, & p^2, & \frac{P}{p}\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{\rho}\right) \\ 1, & q^2, & \frac{Q}{q}\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{\rho}\right) \\ 1, & r^2, & \frac{R}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\rho}\right) \end{vmatrix}. \\
&= 2\begin{vmatrix} 1, & p^2, & \frac{-1}{\rho^3}\left[P - x_0x\frac{P}{p^2} + y_0y(n^2+p^2) - z_0z(l^2-p^2)\right] \\ 1, & q^2, & \frac{-1}{\rho^3}\left[Q - x_0x\frac{Q}{q^2} + y_0y(n^2+q^2) - z_0z(l^2-q^2)\right] \\ 1, & r^2, & \frac{-1}{\rho^3}\left[R - x_0x\frac{R}{r^2} + y_0y(n^2+r^2) - z_0z(l^2-r^2)\right] \end{vmatrix} \\
&= \frac{-2}{\rho^3}\begin{vmatrix} 1, p^2, P - x_0x\frac{P}{p^2} \\ 1, q^2, Q - x_0x\frac{Q}{q^2} \\ 1, r^2, R - x_0x\frac{R}{r^2} \end{vmatrix} = \frac{-2}{\rho^3}\begin{vmatrix} 1, p^2, P \\ 1, q^2, Q \\ 1, r^2, R \end{vmatrix} + x_0x\frac{2}{\rho^3}\begin{vmatrix} 1, p^2, \frac{P}{p^2} \\ 1, q^2, \frac{Q}{q^2} \\ 1, r^2, \frac{R}{r^2} \end{vmatrix}
\end{aligned}
\right.
$$

valeur qu'il faudra multiplier par le produit $\frac{pdp}{\sqrt{P}}\frac{qdq}{\sqrt{Q}}\frac{rdr}{\sqrt{R}}$, p en faire l'intégrale triple entre les limites données, pour avoir quantité en question.

Or, en écrivant les valeurs (9bis) de P, Q, R avec la consta f (14), le premier de ces deux déterminants se réduisant simp ment à

$$\begin{vmatrix} 1, p^2, P \\ 1, q^2, Q \\ 1, r^2, R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, p^2, l^2n^2+fp^2-p^4 \\ 1, q^2, l^2n^2+fq^2-q^4 \\ 1, r^2, l^2n^2+fr^2-r^4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1, p^2, p^4 \\ 1, q^2, q^4 \\ 1, r^2, r^4 \end{vmatrix},$$

donnera donc naissance, par l'intégration triple dans les conditions que nous venons de dire, à un premier terme qui sera, en ayant égard aux expressions (8) des x, y, z, et (9) de l'élément de masse $d\mathfrak{M}$,

$$(4)\left\{\begin{aligned} & \mathbf{S}\frac{2}{\rho^3}\begin{vmatrix} 1, p^2, p^4 \\ 1, q^2, q^4 \\ 1, r^2, r^4 \end{vmatrix}\frac{pdp}{\sqrt{P}}\frac{qdq}{\sqrt{Q}}\frac{rdr}{\sqrt{R}} \\ & = \mathbf{S} -2\frac{l.in}{D}\frac{-pqr}{l.in}\frac{D}{\rho^3}\begin{vmatrix} 1, p^2, p^4 \\ 1, q^2, q^4 \\ 1, r^2, r^4 \end{vmatrix}\frac{dp}{\sqrt{P}}\frac{dq}{\sqrt{Q}}\frac{dr}{\sqrt{R}} = -2\frac{l.in}{D}\mathbf{S}\frac{xd\mathfrak{M}}{\rho^3}; \end{aligned}\right.$$

et de la même façon, l'autre des déterminants obtenus tout à l'heure donnera naissance à un second terme qui se transformera successivement ainsi qu'il suit :

$$\mathbf{S}\, x_0 x \frac{2}{\rho^3}\begin{vmatrix} 1, & p^2, & \frac{P}{p^2} \\ 1, & q^2, & \frac{Q}{q^2} \\ 1, & r^2, & \frac{R}{r^2} \end{vmatrix}\frac{pdp}{\sqrt{P}}\ \frac{qdq}{\sqrt{Q}}\ \frac{rdr}{\sqrt{R}}$$

$$= \mathbf{S}\, 2x_0\frac{-pqr}{l.in}\cdot\frac{1}{\rho^3}\begin{vmatrix} 1, & p^2, & \frac{P}{p^2} \\ 1, & q^2, & \frac{Q}{q^2} \\ 1, & r^2. & \frac{R}{r^2} \end{vmatrix}\frac{pdp}{\sqrt{P}}\ \frac{qdq}{\sqrt{Q}}\ \frac{rdr}{\sqrt{R}}$$

$$= \frac{-2x_0}{l.in} \mathop{\mathrm{S}} \frac{p^2q^2r^2}{\rho^3} \begin{vmatrix} 1, & p^2, & \frac{P}{p^2} \\ 1, & q^2, & \frac{Q}{q^2} \\ 1, & r^2, & \frac{R}{r^2} \end{vmatrix} \frac{dp}{\sqrt{P}} \frac{dq}{\sqrt{Q}} \frac{dr}{\sqrt{R}}$$

$$= \frac{-2x_0}{l.in} \mathop{\mathrm{S}} \frac{1}{\rho^3} \begin{vmatrix} p^2, & p^4, & P \\ q^2, & q^4, & Q \\ r^2, & r^4, & R \end{vmatrix} \frac{dp}{\sqrt{P}} \frac{dq}{\sqrt{Q}} \frac{dr}{\sqrt{R}}$$

$$= \frac{-2x_0}{l.in} \mathop{\mathrm{S}} \frac{1}{\rho^3} \begin{vmatrix} p^2, & p^4, & l^2n^2+fp^2-p^4 \\ q^2, & q^4, & l^2n^2+fq^2-q^4 \\ r^2, & r^4, & l^2n^2+fr^2-r^4 \end{vmatrix} \frac{dp}{\sqrt{P}} \frac{dq}{\sqrt{Q}} \frac{dr}{\sqrt{R}}$$

$$= \frac{-2x_0}{l.in} \mathop{\mathrm{S}} \frac{l^2n^2}{\rho^3} \begin{vmatrix} p^2, & p^4, & 1 \\ q^2, & q^4, & 1 \\ r^2, & r^4, & 1 \end{vmatrix} \frac{dp}{\sqrt{P}} \frac{dq}{\sqrt{Q}} \frac{dr}{\sqrt{R}}$$

$$= \frac{2\,lin.x_0}{D} \mathop{\mathrm{S}} \frac{D}{\rho^3} \begin{vmatrix} 1, & p^2, & p^4 \\ 1, & q^2, & q^4 \\ 1, & r^2, & r^4 \end{vmatrix} \frac{dp}{\sqrt{P}} \frac{dq}{\sqrt{Q}} \frac{dr}{\sqrt{R}} = \frac{2\,lin}{D} \cdot x_0 \mathop{\mathrm{S}} \frac{d\mathfrak{M}}{\rho^3}.$$

En réunissant donc ce terme à celui trouvé tout à l'heure (4), l'expression (3) du déterminant qui figure dans le second membre de l'équation (1) qu'il s'agissait d'interpréter, montre ainsi que ce second membre représentera la quantité

$$-2\frac{lin}{D} \mathop{\mathrm{S}} \frac{x\,d\mathfrak{M}}{\rho^3} + 2\frac{lin}{D} \mathop{\mathrm{S}} \frac{x_0\,d\mathfrak{M}}{\rho^3} = \frac{-2\,lin}{f\mathrm{D}} \cdot f \mathop{\mathrm{S}} \frac{x-x_0}{\rho^3}\,d\mathfrak{M}$$

$$= 2\frac{-l.in}{f\mathrm{D}}\,\mathrm{X} = 2\Delta^{(x)},$$

si nous convenons de faire encore pour le Cas général comme nous l'avons fait pour le Cas particulier du Chapitre I :

$$(5)\qquad X=\frac{-fD}{l.in}\Delta^{(x)},\qquad Y=\frac{-fD}{m.il}\Delta^{(y)},\qquad Z=\frac{-fD}{n.im}\Delta^{(z)}.$$

Avec cette notation, l'équation en question (1), en la divisant par 2, puis intervertissant les deux membres, s'écrira donc de nouveau, exactement comme dans le susdit Cas particulier,

$$(6)\qquad \begin{cases} \Delta^{(x)}=\left(\sqrt{P}\int_{q_1}^{q_2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{q^2-r^2}{\rho}\frac{qdq}{\sqrt{Q}}\frac{rdr}{\sqrt{R}}\right)_{p_2}^{p_1}+\left(\sqrt{Q}\int_{r_1}^{r_2}\int_{p_1}^{p_2}\frac{r^2-p^2}{\rho}\frac{rdr}{\sqrt{R}}\frac{pdp}{\sqrt{P}}\right)_{q_2}^{q_1} \\ \qquad\qquad +\left(\sqrt{R}\int_{p_1}^{p_2}\int_{q_1}^{q_2}\frac{p^2-q^2}{\rho}\frac{pdp}{\sqrt{P}}\frac{qdq}{\sqrt{Q}}\right)_{r_2}^{r_1}, \end{cases}$$

et pourra par conséquent être mise encore sous la forme abrégée (30), savoir

$$(7)\qquad \Delta^{(x)}=\left[\sqrt{P}\,I^{(p^2)}\right]_2^1+\left[\sqrt{Q}\,I^{(q^2)}\right]_2^1+\left[\sqrt{R}\,I^{(r^2)}\right]_2^1,$$

à l'aide des mêmes notations (29) et conventions connexes, en substituant seulement au type d'intégrale double (28) le type plus général, qui renferme ce dernier pour l'hypothèse $\rho_0=0$,

$$(8)\qquad I^{(\varpi)}=\frac{1}{4}\int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{s-t}{\rho_\varpi}\frac{ds}{\sqrt{S}}\frac{dt}{\sqrt{T}},$$

le symbole ρ_ϖ désignant ce que devient l'expression de ρ relative au Cas le plus général, dont le carré est celle ci-dessus (2), lorsqu'on y remplace l'une des variables p, q, r par $\sqrt{\varpi}$ et les deux autres par $\sqrt{s}$ et $\sqrt{t}$, ainsi que nous l'avons fait dans le Chapitre I en introduisant le type (28).

Et, d'après la remarque faite en posant le problème dans notre Introduction (p. 8 *in medio*), il résulte immédiatement de la loi de permutation circulaire à laquelle obéissent toutes les formules relatives à nos Coordonnées u, v, w, que, si au lieu de la compo-

sante X, nous nous proposions de déterminer, soit la composante Y, soit la composante Z, les quantités $\Delta^{(y)}$ et $\Delta^{(z)}$ définies par la seconde et la troisième des équations (5) seraient de même exprimées par l'une ou l'autre des formules

$$(9)\left\{\begin{aligned} \Delta^{(y)} &= \left[\sqrt{P'}\, I^{(p'^2)}\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sqrt{Q'}\, I^{(q'^2)}\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sqrt{R'}\, I^{(r'^2)}\right]^{\frac{1}{2}}, \\ \Delta^{(z)} &= \left[\sqrt{P''}\, I^{(p''^2)}\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sqrt{Q''}\, I^{(q''^2)}\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sqrt{R''}\, I^{(r''^2)}\right]^{\frac{1}{2}}; \end{aligned}\right.$$

les symboles P′, Q′, R′ ou P″, Q″, R″ désignant respectivement ce que deviennent les quantités P, Q, R lorsque, en permutant circulairement, soit une fois, soit deux fois de suite, les trois constantes l, m, n, on remplace en même temps les variables p, q, r par celles p', q', r', ou p'', q'', r'' définies par le même tableau (7) de ladite Introduction; et les six nouveaux éléments de ces dernières formules (9) $I^{(p'^2)}$ ..., $I^{(r''^2)}$ représentant de même ce que devient le même type (8) d'intégrale double $I^{(\varpi)}$ ci-dessus, lorsqu'on y fait jouer semblablement aux variables p', q', r' ou p'', q'', r'', le rôle des variables p, q, r dans les définition et conventions connexes à ce même type $I^{(\varpi)}$.

Cette observation nous sera très utile, comme on le verra, à la fin du Chapitre III suivant.

Même résultat obtenu par la simple transformation en Coordonnées de Lamé du résultat classique correspondant procuré par l'emploi des coordonnées rectilignes. — Nous étant proposé comme but du présent travail, selon ce que nous avons dit dans notre Introduction (p. 3 *en haut*), de faire ressortir par un nouvel exemple avec quelle facilité les Coordonnées de Lamé, transformées comme nous l'avons fait, se prêtaient au développement de calculs en apparence difficiles et compliqués, nous avons jugé plus expédient pour réaliser cet objectif de n'employer que ces seules coordonnées pour la totalité du problème, sans quoi nous fussions parvenus beaucoup plus rapidement au résultat précédent (*) en empruntant simplement pour cette intégration le

(*) Nous entendons parler dans cette comparaison de l'étendue *totale* de la démonstration précédente, c'est-à-dire en y comprenant l'interprétation du second membre de l'équation (1) empruntée au Chapitre I, que nous nous sommes borné à rappeler dans le paragraphe précédent.

résultat classique obtenu par le moyen des Coordonnées Rectilignes, et nous bornant à le transformer dans le système de nos nouvelles Coordonnées.

Nous allons indiquer également, à titre de confirmation, ce nouveau calcul.

Pour un Corps homogène de forme quelconque, l'élément de masse $d\mathfrak{M}$ ayant pour expression en Coordonnées Rectilignes

$$d\mathfrak{M} = \mathrm{D}\, dx\, dy\, dz,$$

D étant la densité, et d'autre part la valeur de ρ^2 [(1) de l'Introduction] donnant par la différentiation en x

$$\rho \frac{d\rho}{dx} = x - x_0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d\rho}{dx} = \frac{x - x_0}{\rho},$$

on trouvera donc immédiatement pour la Composante X (2) *(idem)*, en effectuant la première intégration en x,

$$\mathrm{X} = f \mathbf{S} \frac{x - x_0}{\rho^3} d\mathfrak{M} = f \int\int\int \frac{x - x_0}{\rho} \frac{\mathrm{D}\, dx\, dy\, dz}{\rho^2}$$
$$= f\mathrm{D} \int\int \left(\int \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dx} dx \right) dy\, dz = f\mathrm{D} \int\int \left(\frac{-1}{\rho} \right)_{x_1}^{x_2} dy\, dz,$$

x_1 et x_2 étant les valeurs de x relatives à l'entrée et à la sortie dans le Corps d'une parallèle à l'axe des x, et l'intégrale double s'étendant à toute l'aire de la projection du contour apparent sur le plan $x\,y$: intégrale double qu'une transformation très fréquemment usitée permettra d'écrire aussi bien sous la forme

$$(10) \qquad \mathrm{X} = f\mathrm{D} \sum \frac{1}{\rho} \cdot d\sigma \cos \epsilon,$$

la sommation $\sum$ étant relative à tous les éléments $d\sigma$ de la surface du Corps, et ϵ désignant l'angle que forme avec la partie positive de l'axe des x la normale *intérieure* (*) (par rapport au

(*) Voir Jordan, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, t. II, pp. 202-203. Dans le dit ouvrage, la même somme est prise avec le signe —, parce qu'on y considère la normale *extérieure* au Corps.

Corps) à la dite surface; et, si c'est la quantité auxiliaire $\Delta^{(x)}$ que nous nous proposons de calculer, elle aura donc, d'après la définition (5) ci-dessus, pour expression dans les mêmes conditions :

$$(11) \qquad \Delta^{(x)} = \frac{l.in}{-fD} X = -l.in \sum \frac{1}{\rho} d\sigma \cos \epsilon.$$

Il s'agit donc pour nous, en nous plaçant dans l'hypothèse particulière du Corps attirant qui fait l'objet de ce Mémoire, d'exprimer simplement ce dernier résultat au moyen de nos Coordonnées Thermométriques (*) u, v, w, ce que nous ferons plus aisément en passant par l'intermédiaire des Coordonnées Elliptiques λ, μ, ν, de Jacobi.

Pour cela nous rappellerons, en premier lieu, que si l'on désigne par α, β, γ les angles que forme la partie positive de l'axe des x avec les normales en un même point aux trois surfaces coordonnées (normales considérées dans le sens dans lequel *croît* le paramètre de la famille de surface proposée), les cosinus des dits angles auront respectivement pour expression, sans ambiguïté de signe,

$$(12) \qquad \cos\alpha = \Delta_1 \lambda \frac{dx}{d\lambda}, \qquad \cos\beta = \Delta_1 \mu \frac{dx}{d\mu}, \qquad \cos\gamma = \Delta_1 \nu \frac{dx}{d\nu};$$

(*) Cette dénomination de *Thermométrique* attribuée par Lamé lui-même à son système de Coordonnées (voir notamment *Leçons sur les Fonctions Inverses*, etc. et *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes*, aux endroits marqués ci-dessous), a pour signification de rappeler que ces Coordonnées sont, dans son langage habituel, les paramètres *thermométriques* eux-mêmes des familles de surfaces correspondantes, tandis que les Coordonnées Elliptiques de Jacobi ne sont que des paramètres *géométriques* des mêmes familles : ce qui veut dire, en langage ordinaire, que les premiers $\theta = \mathcal{F}(x, y, z)$ vérifient chacun l'équation *d'Équilibre de Température*, savoir

$$0 = \Delta_2 \theta = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2},$$

tandis que les seconds $\lambda = F(x, y, z)$, qui peuvent être considérés comme une fonction arbitraire des premiers, ne la vérifient pas, mais vérifient à la place l'équation

$$0 = \Delta_2 \lambda + f(\lambda)\Delta_1^2 \lambda = \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2}\right) + f(\lambda)\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2\right],$$

$f(\lambda)$ désignant une certaine fonction du dit paramètre géométrique $\lambda = F(x, y, z)$.

(Voir encore *Leçons sur les Fonctions Inverses*, etc., §§ I et IV, pp. 2 et 5, et *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes*, §§ XX et XXI, pp. 30-32.)

puis, en second lieu, que si l'on désigne semblablement par dn, dn', dn'' les trois éléments de ces normales prises dans le sens que nous venons de dire, c'est-à-dire les portions de semblables normales communes à deux surfaces infiniment voisines de chaque famille et comprises entre ces deux surfaces, ces trois éléments de normales ayant respectivement pour valeurs (*),

$$dn = \frac{d\lambda}{\Delta_1 \lambda}, \qquad dn' = \frac{d\mu}{\Delta_1 \mu}, \qquad dn'' = \frac{d\nu}{\Delta_1 \nu},$$

les aires des six faces du parallélipipède curviligne infiniment petit qui constitue actuellement l'élément de volume et dont ces éléments de normale sont les arêtes, auront donc, deux à deux, pour expressions:

$$(13)\quad \begin{cases} \omega = dn'\,dn'' = \dfrac{d\mu}{\Delta_1 \mu}\,\dfrac{d\nu}{\Delta_1 \nu}, & \omega' = dn''\,dn = \dfrac{d\nu}{\Delta_1 \nu}\,\dfrac{d\lambda}{\Delta_1 \lambda}, \\ & \omega'' = dn\,dn' = \dfrac{d\lambda}{\Delta_1 \lambda}\,\dfrac{d\mu}{\Delta_1 \mu}. \end{cases}$$

Ces préliminaires étant rappelés, partant de ce fait que la surface totale du solide proposé se compose de six portions ou faces courbes appartenant chacune à une surface coordonnée, si, pour effectuer la sommation (11) relative à la totalité de la surface du Corps, nous convenons d'associer deux à deux, le terme relatif à chaque élément $d\sigma$ emprunté à une certaine surface coordonnée et le terme relatif à l'élément correspondant aux mêmes valeurs des deux autres coordonnées situé sur l'autre surface coordonnée de la même famille, il est facile de voir que la quantité $\Delta^{(x)}$ représentée par la somme en question (11), se composera alors, sans aucune

(*) Voir, si l'on veut, notre MÉMOIRE SUR LA THÉORIE DE LA COURBURE DES SURFACES, formule (40bis), p. 44. — Dans cet Ouvrage, comme ici, le symbole Δ_1 désigne, suivant la notation de Lamé, le *paramètre différentiel du premier ordre*, c'est-à-dire, pour une fonction quelconque θ, la détermination *positive* du radical

$$\Delta_1 \theta = \sqrt{\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2}.$$

ambiguïté de signe, des trois sommes partielles correspondant à chaque famille

$$(14)\quad \begin{cases} \Delta^{(x)} = -l.in\sum\left[\left(\frac{1}{\rho}\omega\cos\alpha\right)_1 - \left(\frac{1}{\rho}\omega\cos\alpha\right)_2\right] - l.in\sum\left[\left(\frac{1}{\rho}\omega'\cos\beta\right)_1 - \left(\frac{1}{\rho}\omega'\cos\beta\right)_2\right] \\ \qquad\qquad - l.in\sum\left[\left(\frac{1}{\rho}\omega''\cos\gamma\right)_1 - \left(\frac{1}{\rho}\omega''\cos\gamma\right)_2\right] \end{cases}$$

étant entendu que l'indice 1 se rapporte à la valeur la plus petite du paramètre et l'indice 2 à la plus grande; car l'angle ϵ des formules (10) et (11) étant par définition celui formé par la normale à la surface du Corps prise dans le sens qui correspond *à l'intérieur* du Corps, il est clair que cette normale intérieure correspondra bien ainsi au sens dans lequel croît le paramètre de chaque famille de surfaces pour la face empruntée à cette famille et caractérisée par l'indice 1, tandis qu'elle correspondra forcément à la direction contraire pour la face opposée, c'est-à-dire celle empruntée à la même famille et caractérisée par l'indice 2 : en sorte que $\cos\epsilon$ étant représenté par $\cos\alpha$, $\cos\beta$ ou $\cos\gamma$ pour un élément de la face 1, il sera représenté par $-\cos\alpha$, $-\cos\beta$ ou $-\cos\gamma$ pour l'élément correspondant de la face 2.

Cela posé, calculons la première de ces trois sommes partielles en Coordonnées Elliptiques λ, μ, ν.

A cet effet, si nous adoptons pour un instant les notations de notre *Théorie Nouvelle du Système Orthogonal triplement Isotherme,* en faisant à la fois

$$ds^2 = H_1 d\lambda^2 + K_1 d\mu^2 + J_1 d\nu^2, \quad H_1 = \Delta_1^{-2}\lambda, \quad K_1 = \Delta_1^{-2}\mu, \quad J_1 = \Delta_1^{-2}\nu,$$

les expressions (13) et (12) ci-dessus donneront la valeur

$$(15)\quad \omega\cos\alpha = \frac{d\mu}{\Delta_1\mu}\frac{d\nu}{\Delta_1\nu}\cdot\Delta_1\lambda\frac{\partial x}{\partial\lambda} = \frac{\Delta_1^2\lambda\cdot\frac{\partial x}{\partial\lambda}d\mu d\nu}{\Delta_1\lambda\,\Delta_1\mu\,\Delta_1\nu} = (H_1K_1J_1)^{\frac{1}{2}}H^{-1}\frac{\partial x}{\partial\lambda}d\mu d\nu,$$

pour laquelle les expressions très connues de ces quantités H_1, K_1, J_1, ainsi que celle de x en Coordonnées λ, μ, ν (*) fourniront elles-mêmes les valeurs

(*) Voir les vingt-sixième et vingt-septième des *Vorlesungen über Dynamik* de Jacobi, ou à défaut les formules (94), (95) et (96) de notre *Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes,* p. 69.

$$H_1K_1J_1=\frac{1}{4}\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{f(\lambda)}\cdot\frac{1}{4}\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{f(\mu)}\cdot\frac{1}{4}\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{f(\nu)}$$
$$=\frac{-1}{(2^2)^3}\frac{(\mu-\nu)^2(\nu-\lambda)^2(\lambda-\mu)^2}{f(\lambda)\,f(\mu)\,f(\nu)},$$

en sorte qu'ayant à la fois, avec les notations (4) de l'Introduction du présent Ouvrage,

$$x=\frac{\sqrt{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}}{\sqrt{l^2(-n^2)}},\qquad \frac{\partial x}{\partial\lambda}=\frac{1}{2l.in}\frac{\sqrt{(a^2+\mu)(a^2+\nu)}}{\sqrt{a^2+\lambda}},$$
$$(H_1K_1J_1)^{\frac{1}{2}}=\frac{i}{2^3}\frac{(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)}{\sqrt{f(\lambda)}\sqrt{f(\mu)}\sqrt{f(\nu)}},$$

les expressions rappelées tout à l'heure donneront donc pour la quantité (15) la valeur

$$\omega\cos\alpha=\frac{i}{2^3}\frac{(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)}{\sqrt{f(\lambda)}\sqrt{f(\mu)}\sqrt{f(\nu)}}\frac{4f(\lambda)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}\frac{1}{2l.in}\frac{\sqrt{a^2+\mu}\sqrt{a^2+\nu}}{\sqrt{a^2+\lambda}}d\mu d\nu$$
$$=\frac{-1}{4ln}\cdot(\mu-\nu)\frac{\sqrt{f(\lambda)}}{\sqrt{a^2+\lambda}}\cdot\frac{\sqrt{a^2+\mu}}{\sqrt{f(\mu)}}d\mu.\frac{\sqrt{a^2+\nu}}{\sqrt{f(\nu)}}d\nu;$$

d'où il suit que la première des trois sommes partielles qui composent l'expression (11) de $\Delta^{(x)}$ pourra donc s'écrire, étant exprimée en Coordonnées Elliptiques,

$$(16)\begin{cases}-l.in\Big[\int_{\mu_1}^{\mu_2}\int_{\nu_1}^{\nu_2}\Big(\frac{1}{\rho}\frac{-1}{4ln}(\mu-\nu)\sqrt{\frac{f(\lambda)}{a^2+\lambda}}\sqrt{\frac{a^2+\mu}{f(\mu)}}d\mu.\sqrt{\frac{a^2+\nu}{f(\nu)}}d\nu\Big)_{\lambda_1}\\ \quad-\int_{\mu_1}^{\mu_2}\int_{\nu_1}^{\nu_2}\Big(\frac{1}{\rho}\frac{-1}{4ln}(\mu-\nu)\sqrt{\frac{f(\lambda)}{a^2+\lambda}}\sqrt{\frac{a^2+\mu}{f(\mu)}}d\mu.\sqrt{\frac{a^2+\nu}{f(\nu)}}d\nu\Big)_{\lambda_2}\Big]\\ \quad=\frac{i}{4}\left[\sqrt{\frac{f(\lambda)}{a^2+\lambda}}\int_{\mu_1}^{\mu_2}\int_{\nu_1}^{\nu_2}\frac{\mu-\nu}{\rho}\frac{d\mu}{\sqrt{\frac{f(\mu)}{a^2+\mu}}}\frac{d\nu}{\sqrt{\frac{f(\nu)}{a^2+\nu}}}\right]_{\lambda_2}^{\lambda_1}.\end{cases}$$

Cela fait, il n'y a plus à présent qu'à repasser des Coordonnées Elliptiques λ, μ, ν aux Coordonnées Thermométriques u, v, w, ou, mieux encore, aux variables p, q, r que nous leur avons substituées dans le présent Ouvrage pour la commodité des calculs, en remarquant que la simple comparaison de trois des équations (12) du Chapitre I avec la définition (7) des dites variables fournira immédiatement les relations

$$a^2+\lambda = p^2, \qquad a^2+\mu = q^2, \qquad a^2+\nu = r^2,$$

d'où l'on déduira ensuite, par soustraction ou différentiation,

$$\left\{\begin{array}{lll} \mu-\nu = q^2-r^2, & \nu-\lambda = r^2-p^2, & \lambda-\mu = p^2-q^2, \\ d\lambda = 2pdp, & d\mu = 2qdq, & d\nu = 2rdr, \end{array}\right.$$

puis, par la définition des P, Q, R [(9bis) de l'Introduction], la première des trois expressions suivantes,

$$\left\{\begin{array}{l} P=(l^2-p^2)(n^2+p^2)=[(a^2-b^2)-(a^2+\lambda)]\,[(c^2-a^2)+(a^2+\lambda)] \\ \qquad\qquad = -(b^2+\lambda)(c^2+\lambda) = -\dfrac{f(\lambda)}{a^2+\lambda}, \\ Q = -\dfrac{f(\mu)}{a^2+\mu}, \qquad R = -\dfrac{f(\nu)}{a^2+\nu}; \end{array}\right.$$

et alors, avec ces nouvelles valeurs, il est bien clair que la première des trois sommes partielles en question, déjà ramenée par nous à la forme ci-dessus (16), se réduira définitivement à la forme plus simple

$$\frac{i}{4}\left(i\sqrt{P}\int_{q_1}^{q_2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{q^2-r^2}{\rho}\frac{2qdq}{i\sqrt{Q}}\frac{2rdr}{i\sqrt{R}}\right)_{p_2}^{p_1} = \left(\sqrt{P}\int_{q_1}^{q_2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{q^2-r^2}{\rho}\frac{qdq}{\sqrt{Q}}\frac{rdr}{\sqrt{R}}\right)_{p_2}^{p_1},$$

c'est-à-dire exactement le premier des trois termes de l'expression (6) déjà trouvée pour $\Delta^{(x)}$ par une première intégration en Coordonnées Thermométriques, et celui-là étant obtenu les deux autres s'en déduiront évidemment par une simple permutation circulaire des variables λ, μ, ν d'abord, puis u, v, w ou p, q, r, ce qui établit la parfaite concordance des deux résultats.

Conditions dans lesquelles sera entrepris utilement le calcul de l'intégrale double en question, et mode d'emploi de la permutation circulaire dans les Cas correspondants. — La détermination des trois quantités auxiliaires $\Delta^{(x)}$, $\Delta^{(y)}$, $\Delta^{(z)}$ (ou, ce qui revient au même, des trois composantes X, Y, Z) étant ainsi ramenée de nouveau au calcul de la seule intégrale double $I^{(\varpi)}$ (8) analogue à celle (28) déjà rencontrée dans notre Chapitre I, voyons d'abord dans quelles conditions se présentera actuellement ce nouveau problème analytique, et, par suite, dans quel cas nous pourrons espérer en obtenir la solution.

La signification du symbole ρ_ϖ, déduit de l'expression (2) de ρ de la manière que nous avons dite plus haut, étant dès lors la racine carrée de la quantité

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} \rho_\varpi^2 = (\varpi+s+t-f) - 2\Big(x_0\frac{-\sqrt{\varpi}\sqrt{st}}{l.in} + y_0\frac{\sqrt{l^2-\varpi}}{lm}\sqrt{(l^2-s)(l^2-t)} \\ + z_0\frac{i\sqrt{n^2+\varpi}}{mn}\sqrt{(n^2+s)(n^2+t)}\Big)+\rho_0^2,\end{aligned}\right.$$

expression qui, en faisant pour abréger

$$(18)\qquad X_0 = x_0\frac{\sqrt{\varpi}}{l},\qquad Y_0 = y_0\sqrt{1-\frac{\varpi}{l^2}},\qquad Z_0 = z_0\sqrt{1+\frac{\varpi}{n^2}},$$

s'écrira plus simplement

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \rho_\varpi^2 = (\varpi+s+t-f) - 2\Big(\frac{iX_0}{n}\sqrt{st} + \frac{Y_0}{m}\sqrt{(l^2-s)(l^2-t)} \\ + \frac{iZ_0}{m}\sqrt{(n^2+s)(n^2+t)}\Big) + \rho_0^2,\end{aligned}\right.$$

l'élément de l'intégrale double en question (8) contiendra donc maintenant, engagés sous un même radical, trois radicaux différents, lesquels ne sont plus fonctions que des deux variables s et t. Il sera donc possible, à la vérité, de faire disparaître encore deux de ces radicaux par le moyen d'un changement algébrique de variables, mais le troisième radical qui subsistera toujours, quel que soit ce changement, constituera un nouvel obstacle, peut-être

insurmontable, à l'intégration. Nous verrons plus tard ce qu'il sera possible de faire pour ce cas le plus général du problème; mais jusque-là, les calculs que nous allons développer dans ce Chapitre et les deux suivants reposant, comme nous venons de le dire, sur un seul changement des variables s et t, supposeront ainsi toujours l'absence de l'un des trois radicaux qui figurent dans l'expression précédente de ρ_{ϖ}^2, c'est-à-dire : ou bien, que x_0, y_0, z_0 restant indéterminés, l'on envisage l'une des trois hypothèses

$$\varpi = 0, \qquad l^2 - \varpi = 0, \qquad n^2 + \varpi = 0; \; (^*)$$

ou bien, au contraire, que ϖ demeurant quelconque, l'une au moins des trois coordonnées x_0, y_0, z_0 soit nulle, c'est-à-dire que le point attiré soit situé dans l'un des plans principaux du Système Ellipsoïdal auquel appartiennent les six faces du Solide attirant.

A la vérité, des trois hypothèses précédentes, les deux dernières sont sans intérêt au point de vue de la recherche à laquelle nous avons ramené le problème, à savoir le calcul de l'expression de $\Delta^{(x)}$, par la raison que chacun des six termes dont se compose la dite expression, si l'on fait abstraction de l'indice relatif à ϖ, étant alors du type $\sqrt{(l^2-\varpi)(n^2+\varpi)}\,.\,\mathrm{I}^{(\varpi)}$, la quantité $\mathrm{I}^{(\varpi)}$ correspondante à cette hypothèse disparaît donc précisément de l'expression qu'il s'agit de calculer dans chacune des deux dernières hypothèses en question. Mais il n'en est pas de même de la première qui équivaut à la seule hypothèse $p^2 = p_1^2 = l^2 sn^2 u_1 = 0$, ou simplement $u_1 = 0$ [eu égard aux définitions (7) des variables p, q, r et aux

(*) Ces trois hypothèses seront réalisées isolément, si l'on admet respectivement pour chacune d'elles

$$p^2 = 0, \qquad p^2 \text{ ou } q^2 = l^2, \qquad q^2 \text{ ou } r^2 = -n^2,$$

ou, ce qui est la même chose pour chaque cas, d'après la définition (7) des variables p, q, r,

$$u = 0, \qquad u = \mathrm{K} \text{ ou } v = 0, \qquad v = \mathrm{K}' \text{ ou } w = 0.$$

L'une d'entre elles se présentera donc chaque fois que l'une des six faces du Solide sera plane, c'est-à-dire empruntée à l'un des trois plans coordonnés.

limites admises pour la variation de la coordonnée *u* (*)], et dont la considération s'imposera dès lors pratiquement, ainsi que nous l'avons déjà dit dans notre Chapitre I (page 64, *en haut*), toutes les fois que l'une des faces du Solide sera plane et empruntée au plan des *yz*.

Nous traiterons dans ce Chapitre l'hypothèse $X_0 = 0$, qui se présente ainsi en admettant soit $\varpi = 0$, soit $x_0 = 0$, c'est-à-dire soit le cas particulier que nous venons de spécifier à l'instant, la position du point attiré étant d'ailleurs quelconque, soit lorsque le point attiré sera situé dans le plan coordonné *yz*, les surfaces limites du Corps n'étant d'ailleurs astreintes à aucune autre condition que celles spécifiées par sa définition même. Comme c'est encore la composante X, de même que dans le Chapitre précédent, que nous nous proposons toujours de calculer, dans ce second cas la détermination que nous effectuerons sera donc alors celle de la Composante *Normale* au plan principal dans lequel on supposera situé le point attiré.

Les hypothèses $Y_0 = 0$ ou $Z_0 = 0$ que nous traiterons dans le Chapitre IV subséquent, à l'égard de la même composante X, et qui, elles au contraire, équivaudront *pratiquement*, d'après ce que nous avons dit tout à l'heure, aux seules suppositions $y_0 = 0$ ou $z_0 = 0$, c'est-à-dire aux cas où le point attiré est situé dans le plan coordonné *zx* ou dans le plan *xy*, correspondront donc semblablement à la détermination de l'une des deux Composantes *Parallèles* au plan principal dans lequel on supposera situé le point attiré, les surfaces limites du Corps n'étant encore astreintes à aucune condition supplémentaire.

De là les titres que nous avons cru devoir donner, pour la brièveté de l'énonciation, au présent Chapitre et au subséquent, bien que pour le premier il ne formule pas exactement, en réalité, d'après ce que nous avons dit tout à l'heure, la totalité de l'hypothèse à laquelle se rapportent les calculs qui y sont développés.

Dans ces deux Chapitres, la question posée étant ainsi telle que les trois plans ou axes coordonnés n'y jouent pas un rôle semblable par rapport à la situation admise pour le point attiré, il résulte

(*) Voir notre *Théorie Nouvelle du Système Orthogonal triplement Isotherme*, T. I, p. 426.

dès lors de cette absence de symétrie que la permutation circulaire ne permettra plus de déduire, *immédiatement* du moins, comme pour la question traitée dans le Chapitre I précédent, de l'expression acquise pour l'une des composantes, celle des deux autres relatives au même problème. Il importe donc, pour remplir le programme que nous nous sommes tracé dans notre Introduction, de montrer tout de suite comment on pourra néanmoins utiliser encore le même procédé, si sûr et si rapide, pour réduire de nouveau la recherche au calcul d'une seule composante pour chacune des deux questions traitées respectivement dans les Chapitres précités.

Convenant, pour un instant, de mettre en évidence par un indice, dans la notation de nos composantes, celui des trois plans coordonnés, ou plans principaux du Système Ellipsoïdal, dans lequel on supposera situé le point attiré, nous allons calculer dans le présent Chapitre, avons-nous dit tout à l'heure, la Composante Normale X_{yz}. — Une permutation circulaire nous fournira donc immédiatement les deux autres Composantes Normales analogues Y_{zx} et Z_{xy}.

Puis dans le Chapitre IV subséquent, nous calculerons de même, par une intégration directe, la Composante Parallèle X_{xy}. — Or, au point de vue envisagé dans le dit Chapitre, à savoir celui de la recherche d'une Composante Parallèle au plan principal qui est supposé contenir le point attiré, les deux plans coordonnés zx et xy, qui contiennent l'un et l'autre l'axe des x parallèle à la Composante demandée, jouent donc un rôle semblable à l'égard de cette Composante ; et dès lors, si les résultats étaient exprimés en Coordonnées Rectilignes, une simple permutation, opérée cette fois entre les deux plans zx et xy seulement, permettrait de déduire encore immédiatement, de l'expression supposée acquise X_{xy}, l'autre corrélative X_{zx}.

Mais les résultats finaux de cet Ouvrage sont exprimés en Coordonnées Rectilignes, quant aux données relatives à la position du point attiré et en Coordonnées Thermométriques u, v, w, quant à la forme et à la situation du Corps attirant. Il s'agit donc de connaître à quel changement par rapport à ces deux systèmes de coordonnées correspond la permutation des deux plans zx et xy seulement.

Or, quant au premier Système, il est facile de voir que la dite

permutation équivaut à changer la partie ***positive*** de l'axe des y dans la partie ***négative*** de l'axe des z, et réciproquement (ce que nous appellerons, pour abréger, permuter ***au signe près*** les deux coordonnées y et z), et non pas à permuter simplement, à la fois en direction et sens, les deux axes des y et des z, car cette dernière opération conduirait à un nouveau système d'axes qui ne serait pas ***superposable*** au système primitif : c'est-à-dire que, tandis que dans celui-ci, selon qu'on le suppose toujours, un observateur situé le long de la partie positive de l'axe des x, les pieds sur le plan yz, et regardant dans la direction des y positifs, avait ***à sa droite*** la partie positive de l'axe des z, dans le système résultant de la simple permutation des y et des z, le même observateur situé de la même façon aurait alors ***à sa gauche*** la même partie positive de l'axe des z, d'où nécessité, en permutant les directions géométriques des axes des y et des z, d'intervertir en même temps leurs sens, pour que le nouveau système d'axes ainsi obtenu puisse représenter une nouvelle situation du système primitif : condition évidemment indispensable pour qu'on puisse considérer comme s'y rapportant encore les résultats des théories exposées et des calculs déjà effectués.

D'autre part, quant au second Système, nous allons faire voir que cette même permutation, qui entraînera d'abord celle des deux axes b et c du Système Ellipsoïdal, en sorte que les trois différences

$$(20) \qquad a^2 - b^2 = l^2, \qquad b^2 - c^2 = m^2, \qquad c^2 - a^2 = n^2,$$

se changeront respectivement en

$$(21) \qquad a^2 - c^2 = -n^2, \qquad c^2 - b^2 = -m^2, \qquad b^2 - a^2 = -l^2,$$

et inversement, équivaut, par rapport aux Coordonnées Thermométriques, à changer à la fois k, k', k'' respectivement en $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{k''}$, $\frac{1}{k'}$, et u, v, w respectivement en ku, $k''w$, $k'v$.

Pour faire cette démonstration, il suffira de montrer que l'ensemble des formules de transformation des Coordonnées Rectilignes en Coordonnées Thermométriques u, v, w, c'est-à-dire l'ensemble du système (6) de notre Introduction, n'est pas altéré, la

seconde équation se changeant simplement dans la troisième et *vice versa,* lorsqu'on y effectue simultanément les divers changements que nous venons de dire, à savoir, d'une part de y en $-z$ et z en $-y$, puis de l, m, n, respectivement en in, $-im$, $-il$; et d'autre part de k, k', k'' en $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{k''}$, $\frac{1}{k'}$, et enfin de u, v, w en ku, $k''w$, $k'v$.

Dans ce but, nous abrégerons considérablement le discours, et rendrons par là la démonstration beaucoup plus claire, en adoptant le signe $\equiv$, que nous énoncerons *devient* pour représenter les ***équivalences***, dont le second membre exprimera ce que devient la quantité qui en forme le premier membre par l'effet de la permutation spécifiée ci-dessus (celles des plans des zx et xy, ou des axes des y et des z au sens près). Ainsi, par exemple, le fait déjà observé tout à l'heure relativement aux différences (20) et (21) se dénotera simplement ainsi

$$l^2 \equiv -n^2, \qquad m^2 \equiv -m^2, \qquad n^2 \equiv -l^2,$$

conditions que nous interpréterons expressément de la façon suivante :

$$(22) \qquad l \equiv in, \qquad m = -im, \qquad n = -il.$$

Cette notation étant admise, d'une part, les trois équations de droite (6) de l'Introduction nous donneront tout d'abord, en tenant compte des équivalences que nous venons d'écrire, relativement aux trois modules k, k', k'' propres aux trois coordonnées u, v, w,

$$\left\{ \begin{array}{ll} k^2 = \dfrac{l^2}{-n^2} \equiv \dfrac{-n^2}{l^2} = \dfrac{1}{k^2}, & k'^2 = \dfrac{m^2}{-l^2} \equiv \dfrac{-m^2}{n^2} = \dfrac{1}{k''^2}, \\ & k''^2 = \dfrac{n^2}{-m^2} \equiv \dfrac{-l^2}{m^2} = \dfrac{1}{k'^2}, \end{array} \right.$$

ou simplement :

$$k \equiv \frac{1}{k}, \qquad k' \equiv \frac{1}{k''}, \qquad k'' \equiv \frac{1}{k'}.$$

D'autre part, si l'on change à la fois dans les diverses fonctions elliptiques qui entrent dans les formules de transformation précitées, respectivement k, k', k'' en $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{k''}$, $\frac{1}{k'}$ et u, v, w en ku, $k''w$, $k'v$, les dites fonctions deviendront respectivement, en ayant égard aux formules classiques de transformation *par modules réciproques*, ainsi qu'aux définitions ci-dessus rappelées des modules en question k, k', k'' :

$$
(23)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left\{
\begin{aligned}
&\operatorname{sn}(u, k) \equiv \operatorname{sn}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = k \operatorname{sn}(u, k) = \frac{l}{in} \operatorname{sn}(u, k),\\
&\operatorname{cn}(u, k) \equiv \operatorname{cn}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \operatorname{dn}(u, k),\\
&\operatorname{dn}(u, k) \equiv \operatorname{dn}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \operatorname{cn}(u, k);
\end{aligned}\right.\\
&\left\{
\begin{aligned}
&\operatorname{sn}(v, k') \equiv \operatorname{sn}\left(k''w, \frac{1}{k''}\right) = k'' \operatorname{sn}(w, k'') = \frac{n}{im} \operatorname{sn}(w, k''),\\
&\operatorname{cn}(v, k') \equiv \operatorname{cn}\left(k''w, \frac{1}{k''}\right) = \operatorname{dn}(w, k''),\\
&\operatorname{dn}(v, k') \equiv \operatorname{dn}\left(k''w, \frac{1}{k''}\right) = \operatorname{cn}(w, k'');
\end{aligned}\right.\\
&\left\{
\begin{aligned}
&\operatorname{sn}(w, k'') \equiv \operatorname{sn}\left(k'v, \frac{1}{k'}\right) = k' \operatorname{sn}(v, k') = \frac{m}{il} \operatorname{sn}(v, k'),\\
&\operatorname{cn}(w, k'') \equiv \operatorname{cn}\left(k'v, \frac{1}{k'}\right) = \operatorname{dn}(v, k'),\\
&\operatorname{dn}(w, k'') \equiv \operatorname{dn}\left(k'v, \frac{1}{k'}\right) = \operatorname{cn}(v, k').
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right.
$$

Dès lors, si l'on effectue simultanément, dans les formules de transformation en question [(6) de l'Introduction], les divers changements que nous avons spécifiés plus haut, ces mêmes formules deviendront, en y faisant passer préalablement tous les termes dans le premier membre, puis intervertissant ensuite ces deux membres,

$$\left\{\begin{aligned}
0 &= x - l.\operatorname{sn}(u,k).\operatorname{dn}(v,k').\operatorname{cn}(w,k'')\\
&\equiv x - in.\frac{l}{in}\operatorname{sn}(u,k).\operatorname{cn}(w,k'').\operatorname{dn}(v,k')\\
&= x - l\operatorname{sn}(u,k)\operatorname{dn}(v,k')\operatorname{cn}(w,k''),\\
0 &= y - m.\operatorname{sn}(v,k').\operatorname{dn}(w,k'').\operatorname{cn}(u,k)\\
&\equiv -z + im.\frac{n}{im}\operatorname{sn}(w,k'').\operatorname{cn}(v,k').\operatorname{dn}(u,k)\\
&= -z + n\operatorname{sn}(w,k'')\operatorname{dn}(u,k)\operatorname{cn}(v,k'),\\
0 &= z - n.\operatorname{sn}(w,k'').\operatorname{dn}(u,k).\operatorname{cn}(v,k')\\
&\equiv -y + il.\frac{m}{il}\operatorname{sn}(v,k').\operatorname{cn}(u,k).\operatorname{dn}(w,k'')\\
&= -y + m\operatorname{sn}(v,k')\operatorname{dn}(w,k'')\operatorname{cn}(u,k);
\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire que la première formule n'étant pas altérée par ces divers changements, les deux autres se permuteront simplement l'une dans l'autre : d'où il résulte immédiatement que la permutation, au sens près, des deux axes des y et des z, ou, ce qui revient au même, celle des plans zx et xy, équivaut bien, ainsi que nous l'avons annoncé, au changement des coordonnées u, v, w en ku, $k''w$, $k'v$, en même temps que des constantes l, m, n en in, $-im$, $-il$, et, par suite, des modules k, k', k'' en $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{k''}$, $\frac{1}{k'}$.

Subsidiairement, on peut aussi remarquer que la même permutation, au sens près, des deux axes des y et des z équivaut encore, quant au système des variables p, q, r, à la simple permutation des variables q et r, car on aura de même, en tenant compte des équivalences (22) et (23) et des définitions des dites variables p, q, r [formules (7) de l'Introduction],

$$(24)\left\{\begin{aligned}
p &= l.\operatorname{sn}(u,k) \equiv in.\frac{l}{in}\operatorname{sn}(u,k) = l\operatorname{sn}(u,k) = p,\\
q &= l.\operatorname{dn}(v,k') \equiv in.\operatorname{cn}(w,k'') = r,\\
r &= in.\operatorname{cn}(w,k'') \equiv i(-il).\operatorname{dn}(v,k') = l\operatorname{dn}(v,k') = q,
\end{aligned}\right.$$

ce qui justifie le fait annoncé.

Faisant donc l'application de cette proposition si nette aux résultats qui ressortiront de nos calculs, on voit qu'il nous suffira, pour résoudre la question, d'obtenir, dans l'un des Chapitres suivants, ainsi que nous l'avons dit, par une intégration directe, la composante X_{xy}, de laquelle nous déduirons alors immédiatement la composante corrélative X_{zx}, en y permutant simplement y_0 et $-z_0$, et changeant à la fois l, m, n en in, $-im$, $-il$, puis k, k', k'' en $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{k''}$, $\frac{1}{k'}$, et enfin u, v, w en ku, $k''w$, $k'v$.

Puis cela fait, la permutation circulaire fournira alors de nouveau, d'abord en partant du premier de ces résultats, les trois composantes X_{xy}, Y_{yz}, Z_{zx}; puis, en partant du second, les trois autres X_{zx}, Y_{xy}, Z_{yz}; et comme on sera ainsi désormais en possession de l'expression des neuf composantes

$$X_{yz},\ Y_{zx},\ Z_{xy}\,; \qquad X_{xy},\ Y_{yz},\ Z_{zx}\,; \qquad X_{zx},\ Y_{xy},\ Z_{yz}\,;$$

l'on voit qu'il suffira de rapprocher alors celles de même indice, pour avoir la solution complète du problème d'Attraction traité dans cet Ouvrage pour chacun des trois Cas correspondant à l'hypothèse du point attiré situé d'une façon quelconque dans un des plans principaux du Système Ellipsoïdal.

Ces explications étant donc fournies une fois pour toutes, et bien comprises, nous n'y reviendrons plus lorsqu'il s'agira d'en faire usage une fois les résultats de nos intégrations obtenues, et, en conséquence, nous ne maintiendrons pas non plus dorénavant, dans la notation de nos Composantes, les indices que nous venons d'y introduire dans ce paragraphe, seulement pour la facilité et la clarté de l'exposition qui précède.

Introduction d'un nouveau Système de variables pour le Calcul de l'Intégrale double proposée. — Dans le présent Chapitre nous allons effectuer tous les calculs d'intégration en nous basant simplement sur l'hypothèse analytique $0 = X_0 \pm \frac{x_0\sqrt{\varpi}}{l}$, sans spécifier laquelle des deux données $\varpi = 0$ ou $x_0 = 0$ nous avons en vue, c'est-à-dire sans particulariser, soit les limites du Corps, soit la position du point attiré. Nous effectuerons donc les dits

calculs d'intégration comme si X_0, x_0, et ϖ étaient trois quantités indépendantes, et, en conséquence, nous y laisserons subsister partout à la fois les deux constantes x_0 et ϖ, bien que l'absence de l'une d'elles soit le fondement même de ces calculs, mais en ayant soin de nous souvenir que les résultats n'en seront exacts qu'à la condition d'y introduire après coup l'une ou l'autre des deux suppositions $\varpi = 0$ ou $x_0 = 0$. Et, de cette façon, le même calcul d'intégration nous aura donné à la fois, dans le premier cas l'expression de la quantité $I^{(0)}$ relative à une situation quelconque du point attiré, et dans le second celle de la quantité $I^{(\varpi)}$ pour la Composante Normale au plan principal xy qui contiendrait par hypothèse le point attiré.

Ceci entendu, nous lèverons la difficulté signalée plus haut et relative aux radicaux qui figurent dans l'expression (19) de ρ_{ϖ}^2, à l'aide de variables exclusivement réelles comme les variables actuelles s et t elles-mêmes, en faisant choix des nouvelles variables φ et ψ définies par les deux équations

$$(25)\quad (l^2-s)(l^2-t) = \pm\, m^2\varphi^2, \qquad (n^2+s)(n^2+t) = \pm\, m^2\psi^2,$$

à la condition de prendre dans chacune le signe même qui, pour la signification admise des variables s et t, appartient constamment à chacune des deux quantités :

$$L = (l^2-s)(l^2-t), \qquad N = (n^2+s)(n^2+t).$$

Or, il résulte des formules déjà rappelées en tête de nos tableaux P, Q, R dans le Chapitre I précédent (pp. 72-74), ainsi que des hypothèses initiales de notre Système de Coordonnées, savoir $l^2>0$, $m^2>0$, $n^2<0$ (*), et $w = iw'$, u, v, w' étant réels (**), qu'on aura à la fois, quels que soient u, v, w,

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} &l^2-p^2 = l^2\operatorname{cn}^2 u > 0, \quad (^{***}) && n^2+p^2 = n^2\operatorname{dn}^2 u < 0,\\ &l^2-q^2 = -\,m^2\operatorname{sn}^2 v < 0, && n^2+q^2 = -\,m^2\operatorname{cn}^2 v < 0,\\ &l^2-r^2 = -\,m^2\operatorname{dn}^2 w < 0, && n^2+r^2 = n^2\operatorname{sn}^2 w > 0;\end{aligned}\right.$$

(*) *Théorie nouvelle du Système Orthog. triplem. Isoth.*, t. I (p. 42).

(**) *Ibid.*, p. 410, *in medio.*

(***) Ces différents signes résultent plus rigoureusement encore des formules (12), (16), (21) et (23) du Chapitre VI (T. I) de notre *Théorie Nouvelle du Système*

d'où il suit qu'on aura respectivement, pour chacun des trois termes dont est composée l'expression (7) de $\Delta^{(x)}$,

$$\begin{aligned}
&(\text{I}) \quad \varpi = p^2, \quad s = q^2, \quad t = r^2, \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{L} = (l^2 - q^2)(l^2 - r^2) > 0, \\ \text{N} = (n^2 + q^2)(n^2 + r^2) < 0; \end{array} \right. \\
&(\text{II}) \quad \varpi = q^2, \quad s = r^2, \quad t = p^2, \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{L} = (l^2 - r^2)(l^2 - p^2) < 0, \\ \text{N} = (n^2 + r^2)(n^2 + p^2) < 0; \end{array} \right. \\
&(\text{III}) \quad \varpi = r^2, \quad s = p^2, \quad t = q^2, \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{L} = (l^2 - p^2)(l^2 - q^2) < 0, \\ \text{N} = (n^2 + p^2)(n^2 + q^2) > 0; \end{array} \right.
\end{aligned}$$

et que par conséquent, pour n'employer que des variables exclusivement réelles, il faudrait définir nos nouvelles variables φ et ψ, respectivement dans chacun de ces trois cas, par chacune des lignes d'équations suivantes :

$$(26^{\text{bis}}) \left\{ \begin{array}{lll} (\text{I}) & (l^2-s)(l^2-t) = m^2\varphi^2, & (n^2+s)(n^2+t) = -m^2\psi^2; \\ (\text{II}) & (l^2-s)(l^2-t) = -m^2\varphi^2, & (n^2+s)(n^2+t) = -m^2\psi^2; \\ (\text{III}) & (l^2-s)(l^2-t) = -m^2\varphi^2, & (n^2+s)(n^2+t) = m^2\psi^2. \end{array} \right.$$

Mais, alors, les signes qu'il faudrait prendre dans les équations de définition (25) étant différents dans chacun des trois Cas, et, par conséquent, les diverses formules que nous obtiendrions comme résultats devant aussi être différentes dans chacun de ces Cas, il semble qu'il faille ainsi recommencer, pour chacun d'eux, le même calcul d'intégration, sans quoi, ces intégrations n'étant pas effectuées avec des variables exclusivement réelles, leurs résultats ne comporteraient aucune signification précise.

Nous éviterons cette objection grave en observant qu'il résulte de cette discussion qu'en ne considérant qu'un seul signe dans les

---

Orthogonal triplement Isotherme (pp. 412, 414, 416, 418), formules par lesquelles nous réduisons aux deux seuls modules complémentaires *canoniques* k et k_1 les trois fonctions elliptiques *sn*, *cn*, *dn* de chacune des trois coordonnées u, v, w.

équations ci-dessus (25), les nouvelles variables φ et ψ définies en particulier par les équations relatives au Cas (I), savoir

$$(27)\qquad (l^2-s)(l^2-t)=m^2\varphi^2,\qquad (n^2+s)(n^2+t)=-m^2\psi^2,$$

étant dans les trois Cas ou réelles ou purement imaginaires, en premier lieu, les quadratures relatives à chacune d'elles auront, même dans les Cas où elles seront imaginaires, la signification précise d'intégrales rectilignes qui appartient aux variables réelles, en sorte qu'aucune incertitude ou obscurité n'est à redouter à aucun instant de ce chef quant à l'interprétation des résultats du calcul; et, en second lieu, que le module du déterminant fonctionnel $\dfrac{\partial(s,t)}{\partial(\varphi,\psi)}$ aura, dans les trois Cas, la même valeur : or, c'est ce module, et non le déterminant lui-même, qui, d'après la théorie du changement de variables dans l'intégration double, intervient dans la nouvelle expression, avec les variables φ et ψ, de l'intégrale à calculer, savoir

$$(28)\qquad \mathrm{I}^{(\varpi)}=\frac{1}{4}\int\int\frac{s-t}{\rho\varpi}\bmod\frac{\partial(s,t)}{\partial(\varphi,\psi)}\frac{d\varphi\,d\psi}{\sqrt{\mathrm{ST}}}\ (^*).$$

Nous pouvons donc faire usage dans tous les Cas, pour le calcul de la dite intégrale double, du même système de variables qui correspond à des valeurs réelles de φ et ψ pour le Cas (I), ainsi que l'indiquent les tableaux de la page 27, et alors, bien qu'en les employant pour les Cas (II) et (III) dans lesquels l'une au moins des variables ainsi définies est imaginaire, elles doivent nous conduire alors, pour les calculs d'intégration, à des résultats d'apparence imaginaire en φ et ψ, il arrivera néanmoins que, lorsqu'on abandonnera ensuite ces variables auxiliaires φ et ψ pour revenir

(*) Nous entendons, en écrivant cette équation, que les quatre quantités s, t, S et T y tiennent lieu de leurs valeurs en φ et ψ résultant des définitions précédentes (25) et de celles (29) du Chapitre I, et nous réservons provisoirement les limites des nouvelles variables φ et ψ, dont la détermination fera l'objet du paragraphe suivant.

aux variables primitives s et t, en remettant partout dans les dits résultats, à la place de φ et ψ, leurs valeurs en s et t,

$$(29)\qquad \varphi = \frac{1}{m}\sqrt{(l^2-s)(l^2-t)}, \qquad \psi = \frac{i}{m}\sqrt{(n^2+s)(n^2+t)},$$

il arrivera alors, disons-nous, que toutes les imaginaires disparaîtront d'elles-mêmes de ces résultats ainsi que cela se produit toujours pour les questions d'ordre réel, lorsqu'on trouve avantage pour la facilité des calculs à les traiter au moyen de variables ou de constantes imaginaires.

D'ailleurs, ce système de variables φ et ψ nous conduira, comme on va le voir, pour l'élément de l'intégrale double en question (28), à une expression symétrique de forme en φ et ψ, en sorte que la première quadrature amènera toujours à un résultat de même forme, quelle que soit celle des variables φ ou ψ que l'on ait adoptée pour cette première intégration.

Les nouvelles variables que nous substituerons à s et t étant donc ainsi définies pour les trois Cas par les équations (27), voyons donc à présent quelle sera, avec ces variables, l'expression de l'intégrale double (28) que nous nous proposons de calculer.

Pour cela, d'une part, les dites équations de définition donnant, étant différentiées chacune en s et t,

$$\left\{\begin{aligned} -(l^2-t) &= 2m^2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial s}, & n^2+t &= -2m^2\psi\frac{\partial\psi}{\partial s},\\ -(l^2-s) &= 2m^2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}, & n^2+s &= -2m^2\psi\frac{\partial\psi}{\partial t},\end{aligned}\right.$$

d'où nous tirerons successivement les valeurs

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial s} &= \frac{-(l^2-t)}{2m^2\varphi}, & \frac{\partial\psi}{\partial s} &= \frac{-(n^2+t)}{2m^2\psi},\\ \frac{\partial\varphi}{\partial t} &= \frac{-(l^2-s)}{2m^2\varphi}, & \frac{\partial\psi}{\partial t} &= \frac{-(n^2+s)}{2m^2\psi};\end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(s,t)} &= \frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\\ &= \frac{1}{2m^2\varphi.2m^2\psi}\Big[(l^2-t)(n^2+s)-(n^2+t)(l^2-s)\Big]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4m^4\varphi\psi}\left[\left\{l^2n^2 + (l^2s - n^2t) - st\right\} - \left\{n^2l^2 + (l^2t - n^2s) - st\right\}\right]$$
$$= \frac{1}{4m^4\varphi\psi}\left[l^2(s-t) + n^2(s-t)\right] = \frac{(l^2+n^2)(s-t)}{4m^4\varphi\psi} = \frac{-(s-t)}{4m^2\varphi\psi},$$

nous aurons donc, par un théorème connu, pour celle du déterminant fonctionnel qui nous intéresse :

$$(30) \qquad \frac{\partial(s,t)}{\partial(\varphi,\psi)} = \frac{1}{\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(s,t)}} = \frac{-4m^2\varphi\psi}{s-t}.$$

D'autre part, comme les mêmes équations deviennent, en les développant, et faisant passer tous les termes dans le premier membre,

$$(30^{\text{bis}}) \qquad \begin{gathered} l^4 - l^2(s+t) + st - m^2\varphi^2 = 0, \\ n^4 + n^2(s+t) + st + m^2\psi^2 = 0, \end{gathered}$$

et qu'elles donnent dès lors par soustraction, en rappelant les égalités (5) de l'Introduction et (14) du Chapitre I,

$$\begin{aligned} 0 &= (l^4 - n^4) - (l^2 + n^2)(s+t) - m^2(\varphi^2 + \psi^2) \\ &= (l^2 + n^2)\left[(l^2 - n^2) - (s+t)\right] - m^2(\varphi^2 + \psi^2) \\ &= -m^2\left[f - (s+t) + \varphi^2 + \psi^2\right], \end{aligned}$$

ou simplement

$$(30^{\text{ter}}) \qquad s + t - f = \varphi^2 + \psi^2,$$

l'expression (19) de ρ_{ϖ}^2, en y remettant cette valeur, ainsi que celles-ci

$$\sqrt{(l^2-s)(l^2-t)} = m\varphi, \qquad \sqrt{(n^2+s)(n^2+t)} = \frac{m}{i}\psi,$$

qui résultent des définitions précitées, deviendra donc elle-même,

$$(31)\left\{\begin{aligned} \rho_{\varpi}^2 &= (\varpi + \varphi^2 + \psi^2) - 2(Y_0\varphi + Z_0\psi) + \rho_0^2 \\ &= \varpi + (\varphi^2 - 2Y_0\varphi + Y_0^2) + (\psi^2 - 2Z_0\psi + Z_0^2) - Y_0^2 - Z_0^2 + \rho_0^2 \\ &= (\varphi - Y_0)^2 + (\psi - Z_0)^2 + \Pi, \end{aligned}\right.$$

en représentant par Π la constante

$$(32)\qquad \Pi = \varpi - Y_0^2 - Z_0^2 + \rho_0^2,$$

c'est-à-dire, eu égard aux définitions (18) de Y_0 et Z_0, et à la signification admise du symbole ρ_0 :

$$(33)\quad \begin{cases} \Pi = \varpi - y_0^2\left(1 - \frac{\varpi}{l^2}\right) - z_0^2\left(1 + \frac{\varpi}{n^2}\right) + \left(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2\right) \\ \quad = \varpi\left(1 + \frac{y_0^2}{l^2} - \frac{z_0^2}{n^2}\right) + x_0^2. \end{cases}$$

Enfin, les mêmes définitions donneront immédiatement, en partant de celles (29) du Chapitre I relatives à S et T,

$$\begin{cases} ST = (l^2-s)(n^2+s).(l^2-t)(n^2+t) = (l^2-s)(l^2-t).(n^2+s)(n^2+t) \\ \qquad = m^2\varphi^2.(-m^2\psi^2) = -m^4\varphi^2\psi^2, \\ \sqrt{ST} = im^2\varphi\psi. \end{cases}$$

En remettant donc la dernière de ces valeurs, ainsi que celle (30) du déterminant fonctionnel, dans l'intégrale double à calculer (28), et entendant que le symbole ρ_ϖ y tient lieu à présent de la racine carrée de l'expression précédente (31), la dite intégrale double se présentera donc maintenant sous la forme très simple et symétrique (à part la valeur des coefficients) en φ et ψ

$$(34)\quad \begin{cases} I^{(\varpi)} = \frac{1}{4}\int\int \frac{s-t}{\rho_\varpi}\frac{ds}{\sqrt{S}}\frac{dt}{\sqrt{T}} = \frac{1}{4}\int\int \mathrm{mod}\frac{\partial(s,t)}{\partial(\varphi,\psi)}\frac{s-t}{\rho_\varpi}\frac{d\varphi\, d\psi}{\sqrt{ST}} \\ \quad = \frac{1}{4}\int\int \pm\frac{-4m^2\varphi\psi}{s-t}\frac{s-t}{\rho_\varpi}\frac{d\varphi\, d\psi}{im^2\varphi\psi} = \pm i\int\int\frac{d\varphi\, d\psi}{\rho_\varpi} \\ \quad = \pm i\int\int\frac{d\varphi\, d\psi}{\sqrt{(\varphi - Y_0)^2 + (\psi - Z_0)^2 + \Pi}}, \end{cases}$$

devant laquelle le signe supérieur correspond au cas où la valeur du déterminant fonctionnel (30) est positive et le signe inférieur à l'hypothèse contraire.

Or, la quantité sous le radical étant un polynôme du second degré seulement par rapport à l'une ou l'autre des variables, de même que, pour la question traitée dans le Chapitre précédent, la quantité analogue l'était par rapport à la variable ω, la première intégration nous amènera donc encore un simple logarithme de fonction algébrique, et le même procédé déjà employé alors, à savoir l'intégration par parties, devra nous permettre encore de mener à bonne fin la totalité du problème envisagé dans ce Chapitre.

Limites de l'intégration relatives a chaque nouvelle variable. — Pour que les explications qui vont suivre présentent une entière précision, il conviendra de considérer spécialement l'un des trois Cas sus-indiqués auxquels correspondent respectivement les trois systèmes de variables réelles (26bis), soit par exemple le Cas I, mais tous les raisonnements que nous allons produire, et les calculs qui en seront la traduction, subsisteront exactement *mutatis mutandis* en tenant compte de la modification très facile à apercevoir qui en résulterait pour la disposition de la figure, si l'on se plaçait dans l'un ou l'autre des deux autres Cas.

Cela dit nous reconnaîtrons sans peine les limites propres à chacune des nouvelles variables dans l'intégration double, en suivant de point en point la marche que nous avons adoptée dans notre Chapitre I pour un objet tout semblable, et nous laissant guider dès lors en chaque point par une analogie manifeste.

En effet, les deux systèmes de variable s, t et φ, ψ étant envisagés de nouveau comme deux systèmes de coordonnées, rectilignes d'une part et curvilignes de l'autre, si l'on considère successivement deux systèmes d'axes rectilignes parallèles aux s et t, et ayant tous deux leur origine sur la bissectrice des mêmes axes, en faisant à deux reprises

$$(35)\qquad s = l^2 + s', \quad t = l^2 + t', \qquad \text{ou} \qquad s' = -l^2 + s, \quad t' = -l^2 + t,$$

puis

$$(36)\qquad s'' = n^2 + s, \qquad\qquad t'' = n^2 + t,$$

les deux équations de définition (27) de nos variables φ et ψ (en nous plaçant, comme nous l'avons dit, dans le Cas I) s'écrivant alors

(37) $$s' t' = m^2 \varphi^2, \qquad s'' t'' = - m^2 \psi^2,$$

les deux familles de courbes $\varphi = \text{const.}$ et $\psi = \text{const.}$ représenteront donc l'une et l'autre une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes les nouveaux axes parallèles aux s et t (des s' t' ou des s'' t''), et, par conséquent, pour axe (transverse dans le premier cas, non transverse

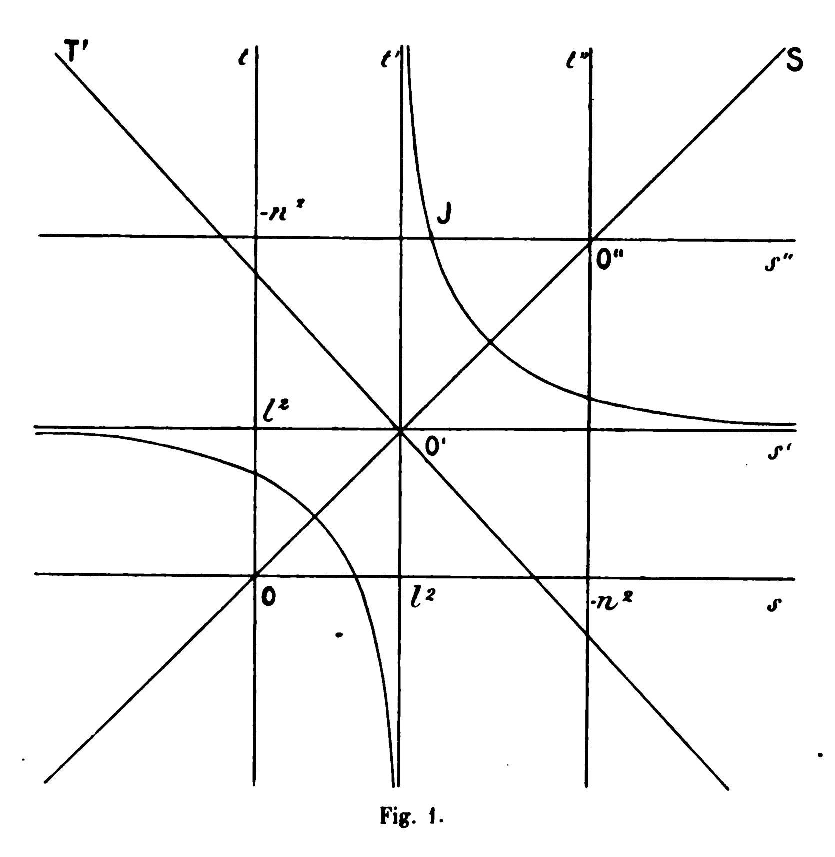


Fig. 1.

dans le second) la bissectrice de ces nouveaux axes, c'est-à-dire précisément la bissectrice des axes primitifs des st : disposition qu'indiquent respectivement pour chaque famille les figures 1 et 2 ci-contre. Comme la première intégration correspond à la sommation des éléments situés le long de l'une de ces courbes

(empruntée à la première famille si l'on intègre en premier lieu par rapport à ψ, à la seconde dans le cas contraire) ces courbes joueront donc par conséquent dans la question actuelle le même rôle que la normale à la bissectrice des axes pour celle déjà traitée dans notre Chapitre I.

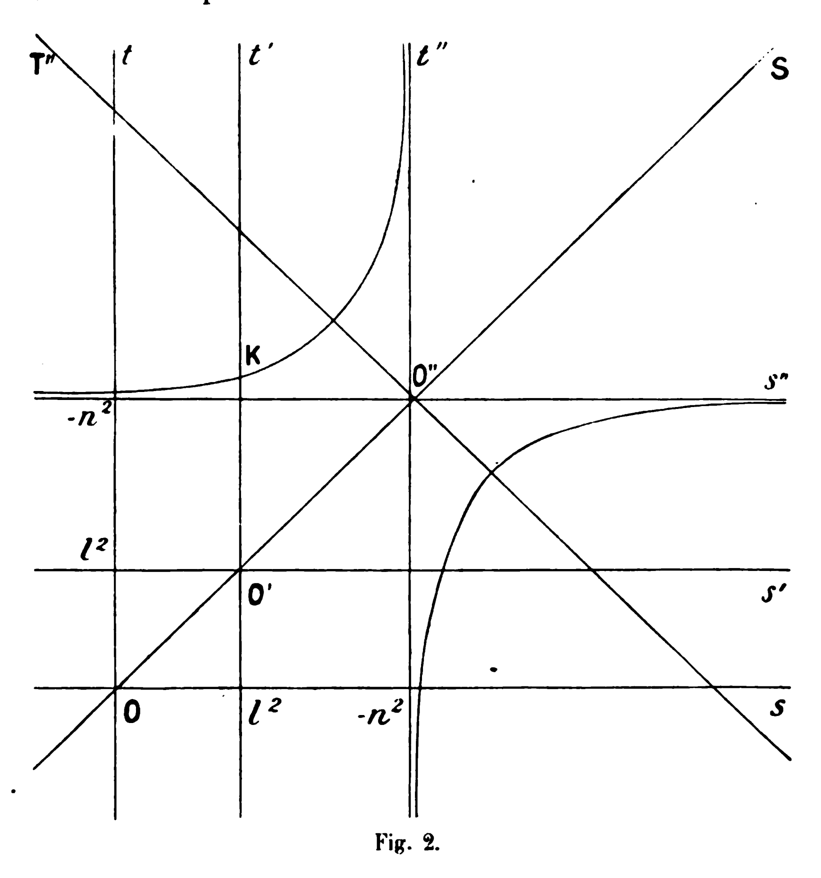


Fig. 2.

Le premier point à déterminer est donc de savoir, d'abord, dans quelle étendue du plan il y aura lieu d'envisager les dites courbes, et ensuite comment variera ψ sur une courbe de la première famille ou φ sur une courbe de la seconde.

Nous avons déjà reconnu dans notre Chapitre I (pp. 36-37) dans

quelle région du plan se trouvait strictement cantonné le rectangle d'intégration pour chacun des trois Cas sus-mentionnés : distinction importante qu'indique avec précision la figure 3 ci-contre empruntée au dit Chapitre, et que, pour plus de facilité, nous croyons devoir reproduire ici.

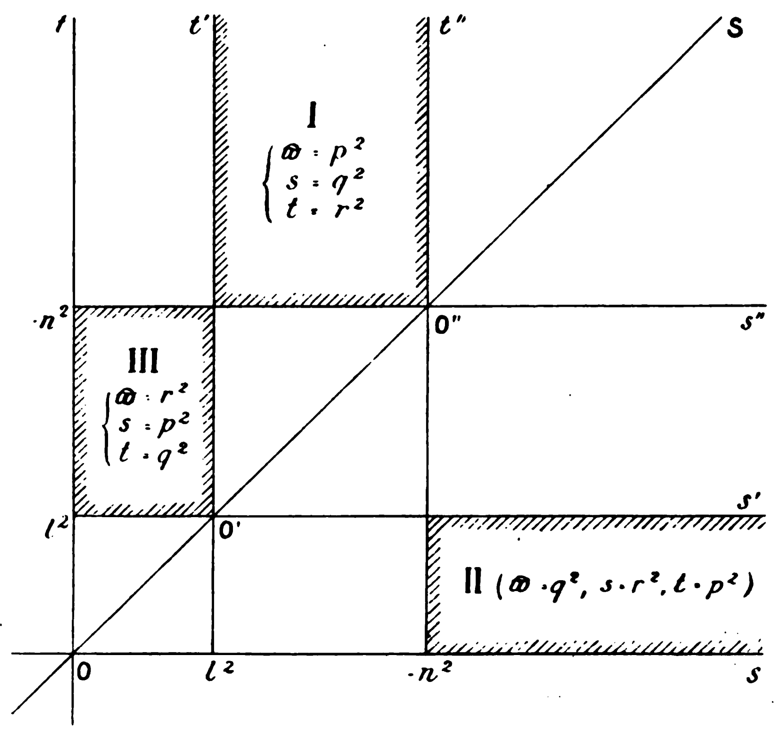


Fig. 3.

Les régions en question marquées I, II, III sur cette figure, étant évidemment les seules dans lesquelles la variation des nouvelles variables φ ou ψ nous intéresse (chacune sur la famille de courbes représentée par l'autre), il résultera dès lors du rapprochement (ou mieux encore de la superposition) de cette figure successivement avec les figures 1 et 2 précédentes, que dans l'hypothèse du Cas I auquel se rapporte le choix de variables adoptées :

1° Il suffira de considérer, pour la première famille φ, la branche de courbe comprise dans l'angle des s' t' positifs, et de même pour la seconde famille ψ, celle comprise dans l'angle des s'' négatifs et des t'' positifs;

2° L'on pourra, à volonté, effectuer la première intégration soit par rapport à φ, c'est-à-dire le long des courbes $\varphi = \text{const.}$, soit par rapport à ψ, c'est-à-dire le long des courbes $\psi = \text{const.}$, puisque l'une et l'autre famille rencontreront également bien le champ d'intégration.

Voyons maintenant comment variera ψ sur une courbe de la première famille, ou φ sur une courbe de la seconde famille.

Pour cela, remarquons d'abord que ces variables φ et ψ devant, comme nous l'avons dit, jouer dans notre théorie le rôle de véritables coordonnées curvilignes, et devant dès lors être définies de telle sorte qu'en chaque point de la région qui nous intéresse elles reçoivent une valeur réelle, unique et déterminée, si elles s'annulaient l'une ou l'autre, d'après leurs équations de définition (27), dans l'intérieur de cette région, il serait par suite indispensable de leur attribuer des valeurs positives et des valeurs négatives, et dès lors, de les définir avec précision chacune en grandeur et en signe.

Mais cette obligation n'existe pas ici en raison de ce que, d'après l'autre forme (37) des mêmes équations de définition, et celles (35) et (36) des s', t', s'', t'', chacune ne s'annule que sur un des bords de la région en question, savoir φ pour $s' = 0$ ou $s = l^2$, et ψ pour $t'' = 0$ ou $t = -n^2$, ainsi que le fait voir la superposition des figures sus-indiquées. Il suffira donc, pour que les dites variables puissent jouer le rôle de coordonnées, d'attribuer à chacune des valeurs exclusivement positives.

Avec cette convention il est clair tout d'abord que la valeur de l'expression (30) du déterminant fonctionnel $\dfrac{\partial(s, t)}{\partial(\varphi, \psi)}$ sera constamment positive, attendu que la constante $m^2 = b^2 - c^2$ étant déjà positive par hypothèse ($a^2 > b^2 > c^2$), la figure 3 montre immédiatement que, pour l'hypothèse admise du Cas I, le rectangle d'intégration est situé dans une région pour laquelle on aura $t > s$ ou $s - t < 0$, cette région étant située tout entière au-dessus de la bissectrice des axes positifs. La valeur en question sera donc

constamment positive, et devra par suite être introduite constamment avec le signe $+$ dans l'expression de l'intégrale double (34) qui sera ainsi pour ce premier cas :

$$(38)\quad I^{(\varpi)} = i\iint \frac{d\varphi\, d\psi}{\rho_\varpi} = i\iint \frac{d\varphi\, d\psi}{\sqrt{(\varphi - Y_0)^2 + (\psi - Z_0)^2 + \Pi}} \ (^*).$$

Ce premier point acquis, pour voir comment variera ψ sur une courbe φ, ou φ sur une courbe ψ, faisons tourner de 45°, dans le sens direct, les axes rectangulaires des $s\,t$, de manière à prendre pour nouvel axe des S la bissectrice des axes précédents; comme il faudra faire à cet effet

$$(38^{\text{bis}})\quad s = \frac{S - T}{\sqrt{2}},\qquad t = \frac{S + T}{\sqrt{2}},\qquad \text{d'où}\qquad s + t = \sqrt{2}.S,$$

l'équation ci-dessus (30ter) devenant, en intervertissant les deux membres,

$$\varphi^2 + \psi^2 = \sqrt{2}\,.\,S - f,$$

(*) Il peut sembler, au premier abord, que cette précision du signe à prendre devant l'expression de l'intégrale double (34) soit absolument vaine et illusoire, en raison de la présence, immédiatement après, du facteur imaginaire i, qui, par définition, comporte la double signification $\pm\sqrt{-1}$. Mais cette objection, qui serait péremptoire si la quantité $I^{(\varpi)}$ était elle-même le but réel de la recherche, sera reconnue ici sans valeur, si l'on fait attention que, le but réel du calcul étant au contraire la composante X ou, ce qui revient au même, d'après la première des formules (5), la quantité proportionnelle $\Delta^{(x)}$, la quantité en question $I^{(\varpi)}$ représente ici simplement un résultat intermédiaire destiné à être reporté, successivement avec les trois déterminations $\varpi = p^2, q^2, r^2$, dans l'expression (7) de la susdite quantité $\Delta^{(x)}$. Or, il résulte immédiatement de la situation, par rapport à la diagonale OS des axes s et t, mise en évidence par la figure 3 ci-dessus, du rectangle d'intégration pour chacun de ces trois Cas; que quelle que soit l'interprétation que l'on soit convenu d'adopter pour le symbole i, les mêmes considérations qui viennent de nous imposer le signe $+$ pour le Cas I l'imposeront également pour le Cas III, mais le rejetteront pour le Cas II, en sorte que nonobstant la double détermination inhérente essentiellement au symbole i, le second terme dans les crochets de l'expression (7) devra toujours être pris avec le signe contraire à celui des deux autres termes, du moment que par définition les symboles $\sqrt{P}$, $\sqrt{Q}$, $\sqrt{R}$ représentent les déterminations positives des dits radicaux.

montrera qu'en y supposant constante, à tour de rôle, chacune des deux variables φ et ψ, le carré de l'autre sera une fonction linéaire, à coefficient positif, de la coordonnée S, et, par conséquent, variera dans le même sens que cette coordonnée. Or, la seule inspection des figures 1 et 2 fait voir qu'en imaginant qu'un point mobile s'avance, soit sur une courbe φ dans la direction des t ou t' positifs à partir du point J pour lequel ψ est nul, l'axe des S étant alors l'axe transverse de la courbe, soit sur une courbe ψ dans la même direction des t ou t'' positifs à partir du point K pour lequel φ est nul, dans l'un et l'autre cas la coordonnée S de ce point mobile ira constamment en croissant. Il en sera donc de même du carré ψ^2 dans le premier cas, ou φ^2 dans le second, c'est-à-dire par conséquent des variables φ ou ψ elles-mêmes, puisque nous les supposons positives par définition.

Le mode de variation de chacune des nouvelles variables, considérées isolément, étant ainsi connu nettement, pour calquer, en quelque sorte, la marche de nos raisonnements sur celle qui nous a déjà conduit au but dans notre Chapitre I, nous ferons grandir indéfiniment à partir de zéro, dans les équations (37), la valeur de celle de ces variables que nous entendons réserver pour la seconde intégration, ce qui équivaut à imaginer que l'hyperbole correspondante se déforme insensiblement, les asymptotes restant invariables, de manière à balayer successivement tout l'angle des s', t' positifs ou des $s''<0$ et $t''>0$, attendu que son axe transverse a pour grandeur $m\sqrt{2}.\varphi$ ou $m\sqrt{2}.\psi$; et nous tracerons alors sur le plan chacune des positions de cette courbe variable qui passeront par l'un des quatre sommets du rectangle d'intégration, ainsi que nous l'avons fait pour la normale à la bissectrice des axes dans la question précédente du Chapitre I (pp. 40-42).

Il est évident alors, d'après l'autre forme (29) des mêmes définitions (27) des variables en question que, sauf l'ordre dans lequel elles se succèderont, et qui dépendra des dispositions de la figure, ces quatre courbes correspondront aux quatre valeurs du paramètre φ, homologues de celles (49) du Chapitre I,

$$(39)\begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{m}\sqrt{(l^2-s_1)(l^2-t_1)}, & \varphi_2 = \frac{1}{m}\sqrt{(l^2-s_1)(l^2-t_2)}, \\ \varphi_3 = \frac{1}{m}\sqrt{(l^2-s_2)(l^2-t_1)}, & \varphi_4 = \frac{1}{m}\sqrt{(l^2-s_2)(l^2-t_2)}, \end{cases}$$

si la première intégration a été effectuée par rapport à ψ, et de même aux quatre valeurs du paramètre ψ

$$(40)\begin{cases} \psi_1 = \frac{i}{m}\sqrt{(n^2+s_2)(n^2+t_1)}, & \psi_2 = \frac{i}{m}\sqrt{(n^2+s_2)(n^2+t_2)}, \\ \psi_3 = \frac{i}{m}\sqrt{(n^2+s_1)(n^2+t_1)}, & \psi_4 = \frac{i}{m}\sqrt{(n^2+s_1)(n^2+t_2)}, \end{cases}$$

si la première intégration a été opérée par rapport à φ.

Admettons, pour fixer les idées, que l'ordre de succession des quatre courbes correspondantes à ces quatre valeurs des paramètres φ ou ψ soit précisément celui des indices 1, 2, 3, 4, c'est-à-dire qu'elles se présentent en faisant croître la valeur de φ ou ψ dans l'ordre même où nous venons d'écrire les dites valeurs, lequel ordre correspond à la disposition des figures 4 et 5 ci-après. On voit alors, qu'étant ainsi tracées sur le plan, elles partageront le rectangle ou champ d'intégration en trois champs partiels, en forme de triangles ou de parallélogrammes semi-curvilignes, une ou deux des bases de ces figures étant ici précisément deux courbes successives de la série que nous venons de dire, et les deux autres côtés étant rectilignes et empruntés au rectangle d'intégration lui-même. D'ailleurs, dans toute l'étendue de chacun de ces champs partiels séparément, marqués des n°s 1, 2, 3 sur la figure 4 précitée, les limites de la première intégration conserveront constamment les mêmes expressions, ainsi qu'il en était déjà pour les champs partiels analogues considérés dans notre Chapitre I (p. 40, *au bas*), expressions qui s'obtiendront très aisément par le moyen des considérations suivantes.

Supposons d'abord que la première intégration ait été effectuée par rapport à ψ, et qu'on demande la valeur de cette variable ψ, sur une courbe donnée de la famille φ, au point P' ou P'' où cette courbe rencontre un des côtés du rectangle parallèles aux t (fig. 5),

c'est-à-dire par conséquent la valeur de la coordonnée ψ d'un point dont on se donne la coordonnée φ et la coordonnée $s = \sigma$ (σ étant s_1 ou s_2). Or, dans ces conditions, la coordonnée t de ce point étant

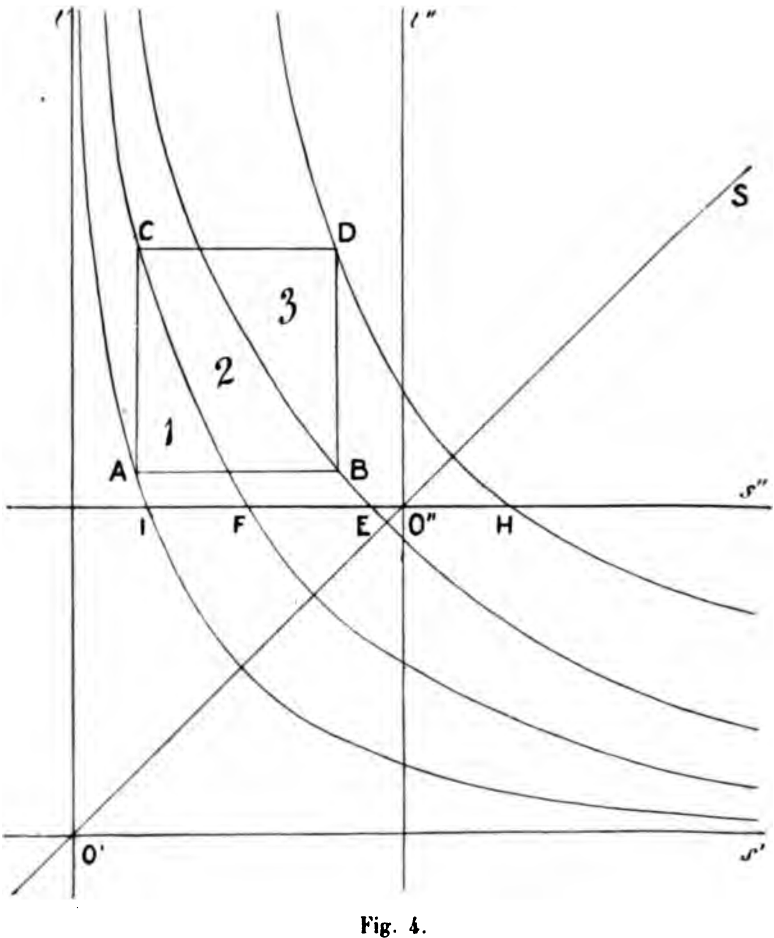


Fig. 4.

déterminée isolément par l'équation de gauche (27) dans laquelle on aura fait $s = \sigma$, il est clair que la valeur de ψ demandée sera celle fournie par l'équation de droite associée dans laquelle on

aura remis la valeur que nous venons de dire, en même temps qu'on y aura fait aussi $s = \sigma$. En d'autres termes, la valeur de ψ sera fournie par l'équation résultant de l'élimination de t entre les deux équations :

$$(l_2 - \sigma)(l^2 - t) = m^2\varphi^2, \qquad (n^2 + \sigma)(n^2 + t) = -m^2\psi^2.$$

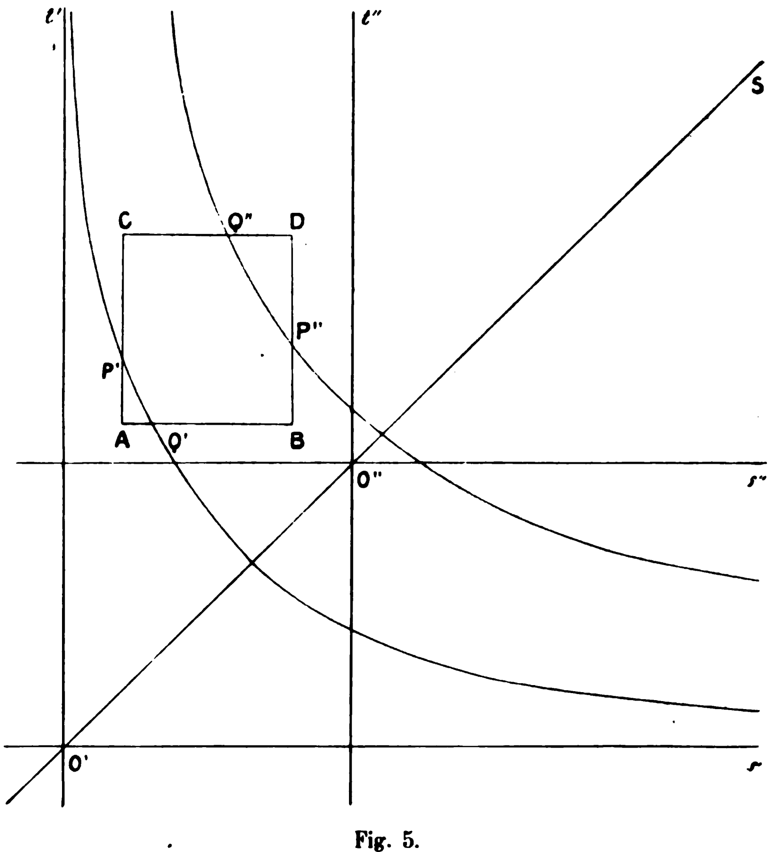


Fig. 5.

On verra exactement de la même façon que la valeur de ψ qui correspondra au point de rencontre Q' ou Q'' d'une courbe de la même famille φ avec un côté du rectangle parallèle aux s, et

représentés en conséquence par $t = \tau$ (τ étant t_1 ou t_2), sera fourni par l'équation résultant de l'élimination de s entre les deux équations :

$$(l^2 - s)(l^2 - \tau) = m^2\varphi^2, \qquad (n^2 + s)(n^2 + \tau) = - m^2\psi^2.$$

En raison de la symétrie en s et t du système des équations envisagées (27), ces deux résultats peuvent être énoncés en une formule unique en disant que toute limite de l'intégration en ψ, correspondant à l'intersection de l'hyperbole $\underset{.}{v}$ relative avec le côté du rectangle s (ou t) $= \epsilon$, est représentée par la valeur de ψ fournie par l'équation résultant de l'élimination de l'autre coordonnée rectiligne η, connexe de ϵ, entre les deux équations

$$(41) \quad (l^2 - \epsilon)(l^2 - \eta) = m^2\varphi^2, \qquad (n^2 + \epsilon)(n^2 + \eta) = - m^2\psi^2,$$

ou

$$l^2 - \eta = m^2 \frac{\varphi^2}{l^2 - \epsilon}, \qquad (n^2 + \eta) = - m^2 \frac{\psi^2}{n^2 + \epsilon},$$

laquelle équation sera donc, en ajoutant simplement ces deux dernières,

$$l^2 + n^2 = m^2 \left(\frac{\varphi^2}{l^2 - \epsilon} - \frac{\psi^2}{n^2 + \epsilon}\right),$$

ou, en divisant par $l^2 + n^2 = - m^2$,

$$(42) \qquad -1 = \frac{\varphi^2}{l^2 - \epsilon} - \frac{\psi^2}{n^2 + \epsilon};$$

c'est-à-dire, qu'en désignant par ψ_ϵ cette limite, elle aura pour expression, les radicaux étant supposés pris avec la détermination positive :

$$(43) \qquad \psi_\epsilon = \sqrt{\frac{n^2 + \epsilon}{l^2 - \epsilon}} \sqrt{\varphi^2 + (l^2 - \epsilon)}.$$

Un raisonnement tout semblable montrera de même que si l'on a effectué, au contraire, la première intégration par rapport à φ, et qu'on demande en conséquence la valeur limite de cette variable

en un point où une courbe donnée de la famille ψ rencontre un des côtés s (ou t) $= \epsilon$, l'autre coordonnée rectiligne η du même point sera dès lors déterminée encore isolément par l'équation de droite (27) dans laquelle on aura fait s (ou t) $= \epsilon$, c'est-à-dire par l'équation de droite ci-dessus (41), et, par suite, la valeur de φ demandée sera celle fournie par l'équation de gauche associée (27) dans laquelle on aura remis la valeur de η que nous venons de dire, en y faisant en même temps dans elle aussi s (ou t) $= \epsilon$. En d'autres termes, la valeur de φ en question sera donnée par l'équation résultant de l'élimination de η entre les deux mêmes équations ci-dessus (41), c'est-à-dire par conséquent toujours par la même équation (42) que tout à l'heure, et aura dès lors pour expression, les radicaux étant encore supposés pris positivement :

$$(44) \qquad \varphi_\epsilon = \sqrt{\frac{l^2-\epsilon}{n^2+\epsilon}}\sqrt{\psi^2-(n^2+\epsilon)}.$$

En se basant sur ces considérations, il est facile d'écrire dans tous les cas la limite de chaque quadrature, pour chacun des trois champs partiels dans lesquels nous avons décomposé le rectangle d'intégration proposé.

En effet, nous étant placés spécialement dans l'hypothèse relative au Cas I où $\varpi = p^2$, à laquelle se rapportent les figures 4 et 5, si c'est par rapport à ψ que nous effectuons la première intégration, et que nous convenions de désigner en général par ψ' et ψ'' les deux limites inférieure et supérieure de ψ sur une même courbe φ, la seule inspection de la figure fait voir, ψ allant en croissant sur ces courbes en s'éloignant du sommet (pp. 37-38), que ces diverses limites seront, respectivement pour chacun des trois champs partiels spécifiés par l'indice de ψ' ou ψ'',

$$(45)\left\{\begin{aligned}
\psi'_1 &= \sqrt{\frac{n^2+t_1}{l^2-t_1}}\sqrt{\varphi^2+(l^2-t_1)}, & \psi''_1 &= \sqrt{\frac{n^2+s_1}{l^2-s_1}}\sqrt{\varphi^2+(l^2-s_1)},\\
\psi'_2 &= \sqrt{\frac{n^2+t_1}{l^2-t_1}}\sqrt{\varphi^2+(l^2-t_1)}, & \psi''_2 &= \sqrt{\frac{n^2+t_2}{l^2-t_2}}\sqrt{\varphi^2+(l^2-t_2)},\\
\psi'_3 &= \sqrt{\frac{n^2+s_2}{l^2-s_2}}\sqrt{\varphi^2+(l^2-s_2)}, & \psi''_3 &= \sqrt{\frac{n^2+t_2}{l^2-t_2}}\sqrt{\varphi^2+(l^2-t_2)};
\end{aligned}\right.$$

et avec ces valeurs (45) et (39) ainsi déterminées, l'intégrale double à calculer (38) s'obtiendra par le moyen de la succession d'opérations figurées par le symbole

$$\mathrm{I}^{(\varpi)} = i\left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(\int_{\psi'_1}^{\psi''_1}\frac{d\psi}{\rho_\varpi}\right)d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\varphi_3}\left(\int_{\psi'_2}^{\psi''_2}\frac{d\psi}{\rho_\varpi}\right)d\varphi + \int_{\varphi_3}^{\varphi_4}\left(\int_{\psi'_3}^{\psi''_3}\frac{d\psi}{\rho_\varpi}\right)d\varphi\right],$$

lequel pourra encore, tout comme dans la question du Chapitre I, être notablement simplifié à l'aide de la remarque suivante.

Rappelant que la variable ψ, positive par définition, prend sa valeur minimum zéro aux points tels que I (fig. 4), c'est-à-dire ceux situés sur les axes des s'' et correspondant dès lors à $t'' = 0$, ou, ce qui est la même chose, à $t = -n^2$, et écrivant en conséquence, comme dans le calcul précité, en sous-entendant un même indice (1, 2, ou 3) pour ψ' et ψ'',

$$\int_{\psi'}^{\psi''}\frac{d\psi}{\rho_\varpi} = \int_0^{\psi''}\frac{d\psi}{\rho_\varpi} - \int_0^{\psi'}\frac{d\psi}{\rho_\varpi},$$

nous mettrons d'abord cette dernière expression de $\mathrm{I}^{(\varpi)}$ sous la forme

$$\mathrm{I}^{(\varpi)} = i\left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(\int_0^{\psi''_1}\frac{d\psi}{\rho_\varpi} - \int_0^{\psi'_1}\frac{d\psi}{\rho_\varpi}\right)d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\varphi_3}\left(\int_0^{\psi''_2}\frac{d\psi}{\rho_\varpi} - \int_0^{\psi'_2}\frac{d\psi}{\rho_\varpi}\right)d\varphi\right.$$
$$\left. + \int_{\varphi_3}^{\varphi_4}\left(\int_0^{\psi''_3}\frac{d\psi}{\rho_\varpi} - \int_0^{\psi'_3}\frac{d\psi}{\rho_\varpi}\right)d\varphi\right]$$

puis remarquant alors que le tableau précédent (45) donne immédiatement, ainsi d'ailleurs que le simple aspect de la figure, $\psi'_2 = \psi'_1$ et $\psi''_3 = \psi''_2$, cette dernière expression pourra donc être écrite,

$$\mathrm{I}^{(\varpi)} = i\left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(\int_0^{\psi''_1}\frac{d\psi}{\rho_\varpi} - \int_0^{\psi'_1}\frac{d\psi}{\rho_\varpi}\right)d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\varphi_3}\left(\int_0^{\psi''_2}\frac{d\psi}{\rho_\varpi} - \int_0^{\psi'_1}\frac{d\psi}{\rho_\varpi}\right)d\varphi\right.$$
$$\left. + \int_{\varphi_3}^{\varphi_4}\left(\int_0^{\psi''_2}\frac{d\psi}{\rho_\varpi} - \int_0^{\psi'_3}\frac{d\psi}{\rho_\varpi}\right)d\varphi\right.$$

ou par un autre groupement de ces six intégrales doubles, en rapprochant maintenant celles qui ont mêmes limites par rapport à ψ :

$$
{}^{(\varpi)} = i\Bigg[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(\int_0^{\psi''_1}\frac{d\psi}{\rho_\varpi}\right)d\varphi - \left\{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(\int_0^{\psi'_1}\frac{d\psi}{\rho_\varpi}\right)d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\varphi_3}\left(\int_0^{\psi'_1}\frac{d\psi}{\rho_\varpi}\right)d\varphi\right\}
$$

$$
+ \left\{\int_{\varphi_2}^{\varphi_3}\left(\int_0^{\psi''_2}\frac{d\psi}{\rho_\varpi}\right)d\varphi + \int_{\varphi_3}^{\varphi_4}\left(\int_0^{\psi''_2}\frac{d\psi}{\rho_\varpi}\right)d\varphi\right\} - \int_{\varphi_3}^{\varphi_4}\left(\int_0^{\psi'_3}\frac{d\psi}{\rho_\varpi}\right)d\varphi\Bigg]
$$

$$
= i\Bigg[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(\int_0^{\psi''_1}\frac{d\psi}{\rho_\varpi}\right)d\varphi - \int_{\varphi_1}^{\varphi_3}\left(\int_0^{\psi'_1}\frac{d\psi}{\rho_\varpi}\right)d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\varphi_4}\left(\int_0^{\psi''_2}\frac{d\psi}{\rho_\varpi}\right)d\varphi - \int_{\varphi_3}^{\varphi_4}\left(\int_0^{\psi'_3}\frac{d\psi}{\rho_\varpi}\right)d\varphi\Bigg].
$$

Or, si nous attribuons de nouveau aux symboles ϵ et η le même sens que dans notre Chapitre I, et que nous procédions comme alors (pp. 44-45), en convenant de représenter cette fois par (ϵ) l'intégrale double

$$
(46) \qquad (\epsilon) = i\int_{\frac{1}{m}\sqrt{(l^2-\epsilon)(l^2-\eta_1)}}^{\frac{1}{m}\sqrt{(l^2-\epsilon)(l^2-\eta_2)}}\left(\int_0^{\sqrt{\frac{n^2+\epsilon}{l^2-\epsilon}}\sqrt{\varphi^2+(l^2-\epsilon)}}\frac{d\psi}{\rho_\varpi}\right)d\varphi,
$$

ρ_ϖ tenant toujours lieu, dans cette formule, de la racine carrée de l'expression (19), il appert des valeurs (39) et (45) des diverses limites de φ et de ψ que l'expression de l'intégrale double $I^{(\varpi)}$ à laquelle nous venons d'arriver, s'écrira encore en abrégé par le moyen de ces symboles,

$$
I^{(\varpi)} = (s_1) - (t_1) + (t_2) - (s_2),
$$

et sera par conséquent représentée, sous forme condensée, par la formule suivante, homologue de celle (56) de notre Chapitre I,

$$(47)\quad \mathrm{I}^{(\varpi)}=\sum_{\epsilon}\pm(\epsilon)=\sum_{\epsilon}\pm i\int_{\frac{1}{m}\sqrt{(l^2-\epsilon)(l^2-\eta_1)}}^{\frac{1}{m}\sqrt{(l^2-\epsilon)(l^2-\eta_2)}}\left(\int_0^{\sqrt{\frac{n^2+\epsilon}{l^2-\epsilon}}\sqrt{\varphi^2+(l^2-\epsilon)}}\frac{d\psi}{\rho_\varpi}\right)d\varphi$$

avec la condition, quant au double signe, de prendre encore devant chacun des quatre termes le signe qui affecte celle des quatre limites données s_1, s_2, t_1, t_2 figurée par ϵ, dans l'inégalité de droite (48) du Chapitre I, savoir :

$$(48)\qquad s_1-s_2-t_1+t_2<0.$$

Si, au lieu d'adopter la variable ψ pour variable de la première intégration, nous eussions choisi la variable φ, nous fussions arrivés, par le moyen de considérations et de calculs complètement analogues, basés sur la nouvelle figure 6 ci-contre, à une autre formule tout à fait semblable à celle que nous venons d'établir, formule que les considérations développées dans le paragraphe antéprécédent permettent, comme on va le voir, de déduire immédiatement de la précédente, à l'aide du raisonnement suivant.

Partant de ce fait que l'expression proposée (6) de $\Delta^{(x)}$ n'est pas atteinte par la permutation des deux plans coordonnés zx et xy [car cette permutation ayant pour effet, quant aux variables p, q, r, de permuter simplement les deux variables q et r (p. 24), le premier terme de la dite expression (6) de $\Delta^{(x)}$ n'est pas altéré et les deux autres s'échangent simplement l'un dans l'autre], et qu'en conséquence, même après cette permutation, les trois termes en question seront encore engendrés de la même façon qu'auparavant par le même type d'intégrale double (8), imaginons donc que nous permutions ensemble les dits plans coordonnés zx et xy. A la vérité, après cette permutation, les mêmes valeurs de y_0 et z_0 ne représenteront plus le même point de l'espace, mais, du moment que ces coordonnées sont par définition des paramètres arbitraires, cela n'a aucune importance pour la démonstration de la formule générale que nous avons en vue.

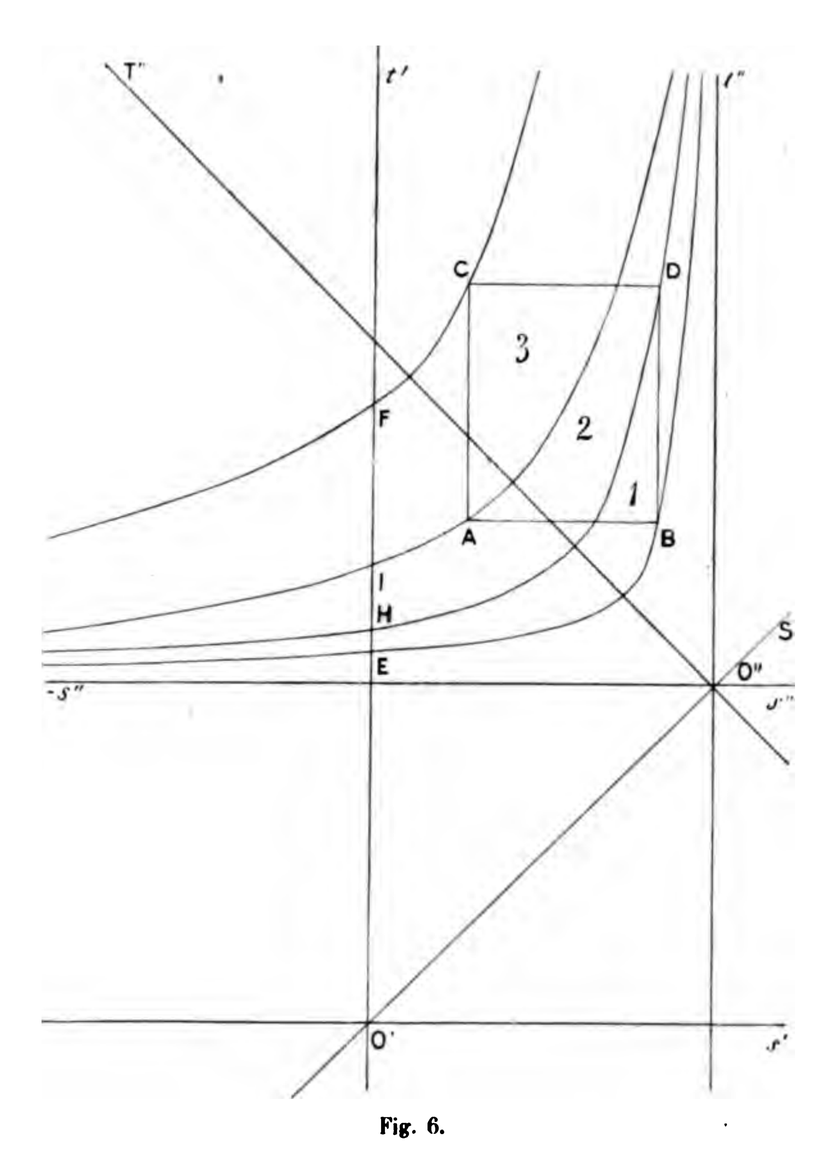


Fig. 6.

Or, cette permutation ayant pour effet, quant aux coordonnées rectilignes, de changer y_0 en $-z_0$ et z_0 en $-y_0$ (pp. 20-21), et quant

aux constantes l, m, n, de les changer respectivement en in, $-im$, $-il$ (p. 22), il ressort des définitions (18) que la constante Y_0 deviendra $-Z_0$ et la constante Z_0 deviendra $-Y_0$, tandis que la constante Π (32) ne sera pas altérée : par où l'on voit qu'il suffira, dès lors, de changer semblablement φ en $-\psi$ et ψ en $-\varphi$, ce qui n'altérera pas le produit différentiel $d\varphi\, d\psi$, pour que, tout d'abord, l'expression (31) de ρ_ϖ^2 ne soit pas altérée non plus, et qu'en conséquence l'expression (38) de $I^{(\varpi)}$ ne le soit pas davantage.

Dans ces conditions, on voit que l'on sera en possession de la formule demandée, en effectuant simultanément dans la formule précédente (47) tous les divers changements que nous venons d'indiquer comme entraînés par la permutation des plans zx et xy, et dont les résultats, quant aux limites des deux quadratures successives, seront figurés, à l'aide de l'algorithme déjà employé plus haut, par les équivalences

$$\left\{\begin{aligned} &\sqrt{\frac{n^2+\epsilon}{l^2-\epsilon}}\sqrt{\varphi^2+(l^2-\epsilon)} = \sqrt{\frac{-l^2+\epsilon}{-n^2-\epsilon}}\sqrt{\psi^2+(-n^2-\epsilon)} = \sqrt{\frac{l^2-\epsilon}{n^2+\epsilon}}\sqrt{\psi^2-(n^2+\epsilon)} \\ &\frac{1}{m}\sqrt{(l^2-\epsilon)(l^2-\eta)} \equiv \frac{1}{-im}\sqrt{(-n^2-\epsilon)(-n^2-\eta)} = \frac{i}{m}\sqrt{(n^2+\epsilon)(n^2+\eta)} \end{aligned}\right.$$

de telle sorte que la formule en question sera donc ainsi :

$$(49) \qquad I^{(\varpi)} = \sum_\epsilon \pm i \int_{\frac{i}{m}\sqrt{(n^2+\epsilon)(n^2+\eta_1)}}^{\frac{i}{m}\sqrt{(n^2+\epsilon)(n^2+\eta_2)}} \left(\int_0^{\sqrt{\frac{l^2-\epsilon}{n^2+\epsilon}}\sqrt{\psi^2-(n^2+\epsilon)}} \frac{d\varphi}{\rho_\varpi} \right) d\psi$$

toujours avec la même signification des symboles ϵ et η, et la même convention relative à l'interprétation du double signe.

Telle est bien, en effet, celle à laquelle on parvient directement, par le moyen de considérations et de calculs analogues à ceux développés ci-dessus pour arriver à la formule antéprécédente (47), en s'aidant de la figure relative à cette nouvelle hypothèse.

Si le Lecteur ne veut pas prendre la peine d'acquérir, au prix de

ce travail, une confirmation complète du résultat en question, il en trouvera du moins une confirmation partielle dans ce fait, que les deux types des limites correspondantes à chacune des deux quadratures successives dans cette dernière formule (49) sont bien, en effet, exactement ceux-là mêmes (40) et (44) que nous avons eu l'occasion d'indiquer, chemin faisant, pour les limites de ces quadratures dans ces nouvelles conditions.

Disons enfin, avant d'abandonner ce sujet, que, comme la démonstration de la première formule (47) dépendait en plusieurs points de la disposition particulière de la figure représentative du cas envisagé entre les deux hypothèses contraires

$$s_2 - s_1 > t_2 - t_1 \qquad \text{ou} \qquad s_2 - s_1 < t_2 - t_1,$$

si l'on veut s'affranchir de l'obligation de la reprendre en entier pour le cas de l'autre hypothèse, il sera plus simple et plus rapide de substituer à cette démonstration, constituée par des transformations analytiques de quadratures, une démonstration reposant sur des considérations géométriques qui auront l'avantage de ne dépendre en aucune façon des particularités de cette figure (*), ainsi que nous l'avons fait en second lieu, pour la question traitée dans le Chapitre I (pp. 46-49).

Il suffira pour cela de considérer, comme alors, le rectangle d'intégration proposé ABCD comme la différence des aires de deux pentagones semi-curvilignes, l'un saillant et l'autre rentrant, qui auraient : d'une part trois côtés communs, savoir, les deux courbes extrêmes d'intégration (φ ou ψ) marquées sur les figures, et le segment rectiligne déterminé par les mêmes courbes sur les axes des s'' ou des t', sur lesquels la variable d'intégration (ψ ou φ) prend la valeur zéro; et d'autre part, pour les deux autres côtés, deux côtés adjacents de ce même rectangle, savoir, pour le premier pentagone les deux côtés les plus éloignés, et pour le second

(*) En nous plaçant, bien entendu, comme nous l'avons fait dans tout ce paragraphe, dans l'hypothèse spéciale du Cas I, ou encore du Cas III, sans quoi il y aurait lieu à examiner ensuite à part (en quelques mots seulement) l'hypothèse du Cas II, ainsi que nous le faisons dans notre Chapitre I.

les plus rapprochés, de l'axe transverse des courbes d'intégration envisagées (*).

Mais la question ainsi posée, cette nouvelle démonstration étant alors calquée de point en point sur celle que nous avons donnée dans le Chapitre I pour le Cas I (fig. 3[bis], p. 47) dans lequel nous nous sommes placé par hypothèse dans le présent paragraphe, nous ne jugeons pas utile de la reproduire ici, l'analogie manifeste suffisant amplement pour la suggérer à l'esprit du Lecteur.

Un dernier mot pour justifier l'étendue et les détails minutieux que nous avons cru devoir apporter à cette détermination des limites des nouvelles variables, c'est-à-dire à l'établissement des formules (47) et (49). Si le Lecteur trouvait que nous eussions dû lui épargner le luxe de ces détails, nous lui répondrions que, nous proposant de tirer de ces formules, à la fin du Chapitre suivant, des résultats définitifs, c'est-à-dire prêts pour le calcul numérique, ainsi que nous l'avons annoncé dans notre Introduction, nous avons jugé indispensable pour la parfaite certitude de ces résultats, d'apporter une absolue précision et une complète rigueur à la démonstration des formules originaires dont nous nous proposions de les tirer.

(*) Les deux pentagones semi-curvilignes en question sont respectivement pour les deux formules en question (47) et (49), savoir : pour la première, c'est-à-dire sur la figure 4, les pentagones IACDH et IABDH ; et pour la seconde formule, c'est-à-dire sur la figure 6, les pentagones EBDCF et EBACF.

ÉTUDE

SUR LE

THÉORÈME DE BERNOULLI

PAR

C. de la VALLÉE POUSSIN
Professeur à l'Université de Louvain

---

1. Théorème a démontrer

La probabilité d'un événement est p, celle de l'événement contraire est q; on fait $\mu - 1$ épreuves dans les mêmes conditions. Les nombres d'arrivées les plus probables pour chacun des deux événements sont voisins des deux nombres

$$\mu p - \frac{1}{2}, \qquad \mu q - \frac{1}{2}.$$

Quelle est la probabilité que l'*écart* ne surpasse pas λ, c'est-à-dire pour que le nombre d'arrivées du premier événement soit compris entre

$$\mu p - \frac{1}{2} - \lambda, \qquad \mu p - \frac{1}{2} + \lambda?$$

Telle est la question à laquelle nous nous proposons de répondre.

On connaît le théorème de Jacques Bernoulli. Si l'on fait croître μ indéfiniment et que l'*ecart relatif* (ou le rapport $\lambda : \mu$) ne tende pas vers zéro, la probabilité précédente converge vers la certitude.

La démonstration de ce *résultat asymptotique* est facile. Mais c'est une tout autre question de savoir déterminer, avec telle approximation qu'on voudra, la probabilité pour telles valeurs données de λ et de μ. On doit à M. Mansion (*) un premier résultat répondant en partie à la question précédente. Il fournit une limite inférieure de la probabilité pour un écart donné.

Nous nous proposons, dans ce Mémoire, de pénétrer plus avant dans cette voie et d'assigner à la probabilité en question une limite plus resserrée que celle de M. Mansion.

Nous démontrerons le théorème suivant :

Soient p, q deux nombres tels que $p+q=1$. Définissons la fonction $f(x)$ par la formule

$$(1) \qquad f(x) = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(x+1)\,\Gamma(\mu-x)}\, p^{\mu-x-1}\, q^{x}.$$

THÉORÈME. — *La somme* P *des valeurs de $f(m)$ où l'entier m est compris entre*

$$\mu(q-l)-1 \qquad \text{et} \qquad \mu(q+l)$$

sera supérieure à l'expression

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{T} e^{-t^2}\,dt - \frac{1}{\mu p q}, \qquad T = l\sqrt{\frac{\mu}{2pq}}$$

sous la condition que l ne surpasse pas $\frac{pq}{5}$ et que $\mu p q$ soit au moins égal à 5.

Ce théorème fournit bien la limite dont nous avons parlé, car P représente la probabilité pour que, sur $\mu - 1$ épreuves, l'écart ne surpasse pas

$$l\mu + \frac{1}{2}.$$

La démonstration de ce théorème est assez laborieuse. Nous commencerons par transformer la fonction $f(x)$.

(*) ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE, t. XXVI, seconde partie, p. 191.

2. Transformation de $f(x)$

Posons, pour abréger, $\mu q - \frac{1}{2} = X$;

la valeur de $f(X + x)$ sera

$$\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma\left(\mu q + x + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\mu p - x + \frac{1}{2}\right)} \quad \frac{q^{\mu q + x}\, p^{\mu p - x}}{\sqrt{pq}}.$$

Si l'on appelle ϖ et ϖ_1 les fonctions complémentaires (voir mon *Cours d'Analyse*, t. II, n° 266-270), on a

$$\Gamma(\mu) = \sqrt{\frac{2\pi}{\mu}} \left(\frac{\mu}{e}\right)^{\mu} e^{\varpi(\mu)}$$

$$\Gamma\left(\mu q + x + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\pi} \left(\frac{\mu q + x}{e}\right)^{\mu q + x} e^{-\varpi_1(\mu q + x)}$$

$$\Gamma\left(\mu p - x + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\pi} \left(\frac{\mu p - x}{e}\right)^{\mu p - x} e^{-\varpi_1(\mu p - x)}$$

Désignons par ω la fonction *positive*

$$\omega = \varpi(\mu) + \varpi_1(\mu q + x) + \varpi_1(\mu p - x);$$

on trouve, par la substitution des valeurs précédentes,

$$(2) \qquad f(X + x) = \frac{e^{\omega}}{\sqrt{2\pi\mu pq}} \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{\mu q}\right)^{\mu q + x} \left(1 - \frac{x}{\mu p}\right)^{\mu p - x}}$$

Posons maintenant

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{x}{\mu q}\right)^{\mu q + x} \left(1 - \frac{x}{\mu p}\right)^{\mu p - x}} = e^{-\varphi(x)}$$

On pourra mettre $\varphi(x)$ sous la forme suivante :

$$(3)\quad \varphi(x) = (\mu q + x)\,\mathrm{Log}\left(1 + \frac{x}{\mu q}\right) + (\mu p - x)\,\mathrm{Log}\left(1 - \frac{x}{\mu p}\right).$$

Si l'on observe que $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ et qu'on développe $\varphi(x)$ par la formule de Maclaurin, $\varphi(x)$ est égal au reste après les deux premiers termes qui s'annulent ; et, en écrivant ce reste sous forme d'intégrale définie, on trouve $\varphi(x) = \int_0^x \varphi''(u)\,(x-u)\,du$, ou

$$(4)\qquad \varphi(x) = \int_0^x \left[\frac{1}{\mu p - u} + \frac{1}{\mu q + u}\right](x-u)\,du,$$

ou, en changeant u en ux,

$$(5)\qquad \varphi(x) = x^2 \int_0^1 \left[\frac{1}{\mu p - ux} + \frac{1}{\mu q + ux}\right](1-u)\,du.$$

On aura d'ailleurs, d'après ce qui précède, ω étant > 0,

$$(6)\qquad f(X + x) > \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\, e^{-\varphi(x)}.$$

3. Définition des notations

1° Nous poserons, pour abréger,

$$(7)\qquad \alpha^2 = \frac{1}{\mu pq}.$$

En introduisant cette notation dans la fonction $\varphi(x)$, il vient, au lieu de (4) et (5),

(8) $$\varphi(x) = \alpha^2 \int_0^x \left[\frac{1}{\frac{1}{q} - \alpha^2 u} + \frac{1}{\frac{1}{p} + \alpha^2 u}\right](x - u)\, du.$$

(9) $$\varphi(x) = \alpha^2 x^2 \int_0^1 \left[\frac{1}{\frac{1}{q} - \alpha^2 ux} + \frac{1}{\frac{1}{p} + \alpha^2 ux}\right](1 - u)\, du.$$

2° Changeons de variable par la relation

(10) $$\alpha x = y$$

et posons $\varphi(x) = \psi(y, \alpha)$; il viendra

(11) $$\varphi(x) = \psi(y,\alpha) = y^2 \int_0^1 \left[\frac{1}{\frac{1}{q} - \alpha uy} + \frac{1}{\frac{1}{p} + \alpha uy}\right](1 - u)\, du.$$

3° Nous poserons encore

(12) $$\begin{cases} F(y, \alpha) = e^{-\psi(y,\alpha)}, \\ F_1(x) = F(y, \alpha) = e^{-\varphi(x)}, \end{cases}$$

de sorte que la formule (6) s'écrira, eu égard à (7),

(13) $$f(X + x) > \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} F_1(x).$$

4° La variable x de la formule précédente variera de $-l\mu$ à $+l\mu$ et nous supposerons toujours $l < pq$; nous désignerons par M le nombre positif

(14) $$M = \frac{1}{1 - \frac{l}{pq}}.$$

4. Limites de $\varphi(x)$ et de ses dérivées

Reprenons la formule (8)

$$\varphi(x) = \alpha^2 \int_0^x \left[\frac{1}{\frac{1}{q} - \alpha^2 u} + \frac{1}{\frac{1}{p} + \alpha^2 u} \right] (x - u)\, du.$$

Supposons que x varie entre $-l\mu$ et $+l\mu$, c'est-à-dire entre $-\frac{l}{pq\alpha^2}$ et $+\frac{l}{pq\alpha^2}$. On aura, dans l'intégrale précédente (l étant $< pq$),

$$\frac{1}{\frac{1}{q} - \frac{l}{pq}} > \frac{1}{\frac{1}{q} - \alpha^2 u} > \frac{1}{\frac{1}{q} + \frac{l}{pq}},$$

et *à fortiori*

$$\frac{q}{1 - \frac{l}{pq}} > \frac{1}{\frac{1}{q} - \alpha^2 u} > \frac{q}{1 + \frac{l}{pq}}.$$

Donc, puisque $M = \dfrac{1}{1 - \frac{l}{pq}}$ (voir 14),

$$(15) \quad Mq > \frac{1}{\frac{1}{q} - \alpha^2 u} > \frac{q}{M}; \quad \text{de même,} \quad Mp > \frac{1}{\frac{1}{p} + \alpha^2 u} > \frac{p}{M}.$$

Par la substitution de ces limites dans la dernière intégrale, il vient (car $p + q = 1$)

$$(16) \qquad M\frac{\alpha^2 x^2}{2} > \varphi(x) > \frac{\alpha^2 x^2}{2M}.$$

En dérivant l'intégrale, on trouve

$$\varphi'(x) = \alpha^2 \int_0^x \left[\frac{1}{\frac{1}{q} - \alpha^2 u} + \frac{1}{\frac{1}{p} + \alpha^2 u} \right] du,$$

et, par l'emploi des mêmes limites,

$$(17) \qquad M\alpha^2 x > \varphi'(x) > \frac{\alpha^2 x}{M}.$$

Enfin, en dérivant de nouveau, il vient

$$\varphi''(x) = \alpha^2 \left[\frac{1}{\frac{1}{q} - \alpha^2 x} + \frac{1}{\frac{1}{p} + \alpha^2 x} \right],$$

et, toujours par l'emploi des mêmes limites,

$$(18) \qquad M\alpha^2 > \varphi''(x) > \frac{\alpha^2}{M}.$$

5. La fonction $\psi\ (y, \alpha)$ et ses dérivées

Reprenons la formule (11), à savoir

$$\varphi(x) = \psi(y, \alpha) = y^2 \int_0^1 \left[\frac{1}{\frac{1}{q} - \alpha u y} + \frac{1}{\frac{1}{p} + \alpha u y} \right] (1-u)\, du \cdot$$

En dérivant par rapport à α, on trouve

$$\psi'_\alpha(y, \alpha) = y^3 \int_0^1 \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{q} - \alpha u y\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{p} + \alpha u y\right)^2} \right] (1-u)\, u\, du$$

$$\psi''_\alpha(y, \alpha) = 2y^4 \int_0^1 \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{q} - \alpha u y\right)^3} + \frac{1}{\left(\frac{1}{p} + \alpha u y\right)^3} \right] (1-u)\, u^2\, du.$$

Ces formules donnent, pour $\alpha = 0$,

$$(19) \qquad \psi(y, 0) = \frac{y^2}{2}, \qquad \psi'(y, 0) = y^3 \frac{q-p}{6}.$$

Elles montrent ensuite, par l'emploi des mêmes limites que dans le paragraphe précédent, que ψ''_α est compris entre les limites

$$2y^4 \int_0^1 [M^3 q^3 + M^3 p^3] (1-u) u^2 \, du, \qquad 2y^4 \int_0^1 \frac{q^3 + p^3}{M^3} (1-u) u^2 \, du,$$

c'est-à-dire que l'on a

$$(20) \qquad y^4 M^3 \frac{p^3 + q^3}{6} > \psi''_\alpha > y^4 \frac{p^3 + q^3}{6M^3}.$$

6. Développement de la fonction $F_1(x)$ ou $F(y, \alpha)$

Considérons la fonction (12)

$$F_1(x) = F(y, \alpha) = e^{-\psi(y, \alpha)}$$

On a, par la formule de Maclaurin

$$F(y, \alpha) = F(y, 0) + \alpha F'_\alpha(y, 0) + \frac{\alpha^2}{2} F''_\alpha(y, \theta\alpha).$$

Ces dérivées ont pour valeurs

$$F'_\alpha = -e^{-\psi} \psi'_\alpha, \qquad F''_\alpha = e^{-\psi} (\psi'^2_\alpha - \psi''_\alpha).$$

Il vient donc, par les formules (19) ci-dessus,

$$F(y, \alpha) = e^{-\frac{y^2}{2}} \left[1 + \alpha \frac{p-q}{6} \right] - R,$$

et l'on a

$$R < \frac{\alpha^2}{2} e^{-\psi} \psi''_\alpha,$$

c'est-à-dire, par la limite inférieure (16) de $\psi = \varphi$ et la limite supérieure (20) de ψ''_α,

$$R < \frac{\alpha^2}{2} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2M}} M^3 \frac{p^3 + q^3}{6} y^4.$$

Remplaçons encore y par αx; nous aurons

$$(21)\quad \begin{cases} F_1(x) > e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} \left[1 + \alpha^4 \frac{p-q}{6} x^3\right] - R, \\ R < \alpha^6 \frac{M^3(p^3+q^3)}{12} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2M}} x^4. \end{cases}$$

7. Limite de $\int F_1(x)\,dx$

On tire de la formule (21)

$$\int_{-A}^{+A} F_1(x)dx > \int_{-A}^{+A} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} dx + \alpha^4 \frac{p-q}{6} \int_{-A}^{+A} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} x^3\,dx$$
$$- \alpha^6 \frac{M^3(p^3+q^3)}{12} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2M}} x^4\,dx.$$

Dans le second membre, la deuxième intégrale est nulle. D'autre part, on a (voir mon *Cours d'Analyse*, t. II, n° 90).

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2M} x^2} x^4\,dx = \sqrt{\pi}\,\frac{3}{4} \left(\frac{2M}{\alpha^2}\right)^2 \sqrt{\frac{2M}{\alpha^2}}.$$

Il vient donc

$$(22)\quad \int_{-A}^{+A} F_1(x)dx > 2\int_0^A e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} dx - \alpha\sqrt{2\pi}\,\frac{M^5\sqrt{M}(p^3+q^3)}{4}.$$

8. Réduction d'une somme a une intégrale

Soit maintenant $F(x)$ une fonction quelconque. Proposons-nous d'évaluer la somme

$$\sum_a^b F(x) = F(a) + F(a+1) + F(a+2) + \ldots + F(b-1) + F(b),$$

étendue à une suite de valeurs de x, *entières ou non*, mais ayant pour différence l'unité.

A cet effet, posons la formule de Taylor

$$F(x+t) = F(x) + tF'(x) + t^2\int_0^1 F''(x+ut)(t-u)\,du.$$

Multiplions par dt et intégrons de $-\frac{1}{2}$ à $+\frac{1}{2}$; il vient

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} F(x+t)\,dt = F(x) + \int_0^1 (1-u)\,du \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F''(x+ut)\,t^2\,dt;$$

et, en sommant par rapport à x de a à b,

$$\int_{a-\frac{1}{2}}^{b+\frac{1}{2}} F(x)dx = \sum_a^b F(x) + \int_0^1 (1-u)\,du \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^2 dt \sum_a^b F''(x+ut).$$

On peut, par le théorème de la moyenne, faire sortir $\sum F''$ de la double intégration en y remplaçant ut par une valeur moyenne θ comprise entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$. Il vient ainsi

$$(23)\qquad \sum_a^b F(x) = \int_{a-\frac{1}{2}}^{b+\frac{1}{2}} F(x)dx - \frac{1}{24}\sum_a^b F''(\theta + x);$$

où θ a la même valeur dans tous les termes de la dernière somme.

C'est la formule (23) qui nous servira; mais, pour évaluer $\sum F''$, nous utiliserons les remarques suivantes :

Soit $F(x)$ une fonction *toujours positive;* considérons les deux expressions

$$\sum_a^b F(x), \qquad \int_a^{b+1} F(x)dx.$$

Si F croît de a à $b+1$, la somme est plus petite que l'intégrale, mais la différence est inférieure à $F(b+1)$ qui est le maximum de $F(x)$.

Si, au contraire, F est décroissant, la somme est inférieure à l'intégrale, mais la différence est moindre que $F(a)$ qui est alors le maximum de $F(x)$.

Plus généralement, si $F(x)$ présente des maxima ou des minima entre a et b, la différence entre les deux expressions pourra être positive ou négative, mais sa valeur absolue ne surpassera pas la somme des maxima de $F(x)$ dans l'intervalle $(a, b+1)$, y compris les valeurs aux extrémités si elles surpassent les valeurs aux points voisins dans cet intervalle.

A fortiori, si $F(x)$ est positif pour toutes les valeurs de x de $-\infty$ à $+\infty$ et s'annule à l'infini, la différence en question ne pourra, quels que soient a et b, surpasser la somme de tous les maxima de la fonction $F(x)$. C'est cette dernière remarque que nous utiliserons.

9. Sommation de $F_1(x)$

On a, par la formule (23),

$$(23')\qquad \sum_a^b F_1(x) = \int_{a-\frac{1}{2}}^{b+\frac{1}{2}} F_1(x)dx - \frac{1}{24}\sum_a^b F_1''(\theta + x).$$

Comme $F_1 = e^{-\varphi}$, on a $F_1'' = e^{-\varphi}(\varphi'^2 - \varphi'')$; et, en vertu des limites (16), (17) et (18) de φ, φ' et φ'',

$$F_1'' < e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2M}} (M\alpha^2 x)^2 . - e^{-M\frac{\alpha^2 x^2}{2}} \frac{\alpha^2}{M} .$$

Quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$, le second terme de cette différence n'a qu'un seul maximum $\frac{\alpha^2}{M}$. Mais le premier en a deux symétriques, qui se trouvent immédiatement en observant que $e^{-t}\,t$ atteint son maximum $\frac{1}{e}$ pour $t = 1$. Chacun de ces maxima est donc $\frac{2\,M^3\alpha^2}{e}$.

Donc, en remplaçant dans (23') la sommation par des intégrations sur chaque terme de la différence que nous venons d'assigner comme limite à F_1'', et en ajoutant les trois maxima dont nous venons de parler (ainsi qu'il résulte de la remarque finale du paragraphe précédent), il vient

$$\sum_a^b F_1''(\theta + x) < M^2\alpha^4 \int_{a+\theta-\frac{1}{2}}^{b+\theta+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2M}} x^2\,dx - \frac{\alpha^2}{M}\int_{a+\theta-\frac{1}{2}}^{b+\theta+\frac{1}{2}} e^{-M\frac{\alpha^2 x^2}{2}}\,dx$$
$$+ 2\,\frac{2M^3\alpha^2}{e} + \frac{\alpha^2}{M} .$$

Mais une intégration par parties donne

$$\int e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2M}} x^2 dx = -\frac{Mx}{\alpha^2} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2M}} + \frac{M}{\alpha^2}\int e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2M}} dx .$$

Prenons cette relation aux limites $a + \theta - \frac{1}{2}$ et $b + \theta + \frac{1}{2}$ et *supposons* $a < 0$ et $b > 0$; comme $|\theta|$ est $< \frac{1}{2}$, les limites $a + \theta - \frac{1}{2}$ et $b + \theta + \frac{1}{2}$ sont aussi négative et positive respectivement. Donc,

dans cette hypothèse, le terme aux limites sera négatif, et l'on aura

$$\int_{a+\theta-\frac{1}{2}}^{b+\theta+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha^2x^2}{2M}} x^2 dx < \frac{M}{\alpha^2}\int_{a+\theta-\frac{1}{2}}^{b+\theta+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha^2x^2}{2M}} dx.$$

Substituons cette limite dans la dernière inégalité, il vient

$$\sum_a^b F_1''(\theta+x)<\alpha^2\int_{a+\theta-\frac{1}{2}}^{b+\theta+\frac{1}{2}}\left(M^3 e^{-\frac{\alpha^2x^2}{2M}}-\frac{e^{-M\frac{\alpha^2x^2}{2}}}{M}\right)dx+\alpha^2\left(\frac{4M^3}{e}+\frac{1}{M}\right).$$

Maintenant, la quantité à intégrer étant essentiellement positive, on peut *à fortiori* l'intégrer de $-\infty$ à $+\infty$, auquel cas elle se calcule immédiatement; et il vient ainsi

$$\sum_a^b F_1''(\theta+x) < \alpha\sqrt{2\pi}\,\frac{M^5-1}{M\sqrt{M}}+\alpha^2\left[\frac{4M^3}{e}+\frac{1}{M}\right].$$

On peut simplifier cette limite quand on suppose $l<\frac{pq}{5}$ et $\mu pq>5$, car $M=\frac{1}{1-\frac{l}{pq}}$ est alors $<\frac{5}{4}$ et $\alpha^2=\frac{1}{\mu pq}$ est alors $<\frac{1}{5}$. Dans ce cas, l'expression

$$-\alpha\sqrt{2\pi}\,\frac{1}{M\sqrt{M}}+\alpha^2\left[\frac{4M^3}{e}+\frac{1}{M}\right],$$

qui a le même signe que

$$-\frac{1}{\sqrt{M}}+\frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{4M^4}{e}+1\right),$$

sera négative, car M^4 qui est $< \left(1+\frac{1}{4}\right)^4$ est $< e$ et l'expression précédente moindre que

$$-\frac{1}{\sqrt{M}}+\frac{5\alpha}{\sqrt{2\pi}} < \sqrt{5}\left(-\frac{1}{\sqrt{5M}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right),$$

expression négative, car $5M \leqslant \frac{25}{4} = 6,25$, et $2\pi = 6,28\ldots$ surpasse cette dernière quantité.

En définitive, dans les conditions où nous nous plaçons, on aura donc

$$\sum_a^b F_1''(\theta+x) < \alpha\sqrt{2\pi}\, M^3\sqrt{M}.$$

Par conséquent, on aura aussi

$$(24) \qquad \sum_a^b F_1(x) > \int_{a-\frac{1}{2}}^{b+\frac{1}{2}} F_1(x)\,dx - \frac{\alpha\sqrt{2\pi}\, M^3\sqrt{M}}{24}.$$

10. Démonstration du théorème

Il faut évaluer la somme des valeurs de la fonction

$$f(m) = f(X+x) = f\left(\mu q - \frac{1}{2} + x\right)$$

quand on donne à x toutes les valeurs pour lesquelles $\mu q - \frac{1}{2} + x$ est un entier m compris entre

$$\mu q - l\mu - 1 \qquad \text{et} \qquad \mu q + l\mu.$$

Soit a la plus petite valeur de m et b la plus grande ; on aura

$$a < \mu q - l\mu, \qquad b > \mu q + l\mu - 1.$$

Ceci posé, on aura, par la formule (13),

$$\sum_a^b f(m) = \sum_{a-X}^{b-X} f(X+x) > \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \sum_{a-X}^{b-X} F_1(x)\,dx$$

et, par la formule (24) du paragraphe précédent,

$$\sum_a^b f(m) > \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_{a-X-\frac{1}{2}}^{b-X+\frac{1}{2}} F_1(x)\,dx - \frac{\alpha^2 M^3 \sqrt{M}}{24}$$

et *à fortiori*, en vertu des inégalités

$$\left\{\begin{array}{l} a - X - \frac{1}{2} < (\mu q - l\mu) - \left(\mu q - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = - l\mu, \\ b - X + \frac{1}{2} > (\mu q + l\mu - 1) - \left(\mu q - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = l\mu. \end{array}\right.$$

On pourra écrire

$$\sum_a^b f(m) > \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l\mu}^{l\mu} F_1(x)\,dx - \frac{\alpha^2 M^3 \sqrt{M}}{24}$$

Remplaçons encore l'intégrale par sa limite (22) ; il viendra

$$\sum_a^b f(m) > \frac{2\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{l\mu} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}\,dx - R,$$

$$R < \alpha^2 \frac{M^5 \sqrt{M}\,(p^3+q^3)}{4} + \alpha^2 \frac{M^3 \sqrt{M}}{24},$$

et *à fortiori*, M étant $\leqslant \frac{5}{4}$,

$$R < \alpha^2 \frac{M^3\sqrt{M}}{4}\left(M^2 + \frac{1}{6}\right) < \alpha^2.$$

Faisons dans l'intégrale le changement de variable $x = \frac{t\sqrt{2}}{\alpha}$; puis remplaçons α^2 par $\frac{1}{\mu pq}$, il viendra

$$\sum_a^b f(m) > \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^T e^{-t^2}\, dt - \frac{1}{\mu pq}, \qquad T = l\sqrt{\frac{\mu}{2pq}}.$$

C'est la formule que nous nous sommes proposé d'établir.

L'Hermeton et le ruisseau de Jonquières

Étude de l'évolution d'un réseau hydrographique subséquent

par le Capitaine Commandant d'État-Major
Baron L. GREINDL
professeur de Géographie à l'École de guerre

Nous nous proposons de soumettre à la discussion de nos collègues une hypothèse explicative d'un certain nombre de faits curieux, qu'on peut relever dans le réseau hydrographique de la Fagne.

Lorsque nous traversons cette ingrate région du pays en suivant la ligne ferrée de Hastière à Mariembourg, nous sommes désagréablement impressionnés à partir de la station de Doische par la monotonie du paysage. Le train court dans une sorte de vaste plaine, plantée d'une maigre broussaille, plaine marécageuse à l'horizon de laquelle se dessinent au nord une suite de collines boisées, au sud d'autres monticules sur le flanc desquels se sont réfugiés les villages, placés ainsi entre l'humidité du fond et la sécheresse du plateau calcareux. Entre Doische et Matagne-la-Grande l'aspect général reste sensiblement le même; le tracé de la voie reste confiné dans la dépression, puis sur la droite surgissent quelques croupes nouvelles accidentant la plaine et masquant son accroissement de largeur.

Si l'on demandait à un géographe, placé ainsi devant un large sillon déprimé, qui vient aboutir à la Meuse un peu au Nord de Givet, d'indiquer sommairement quel doit être le drainage théorique de la région, il aurait peut-être l'imprudence d'esquisser une

rivière au cours indécis et à grandes boucles parcourant le fond, à laquelle aboutiraient une série d'affluents assez nets dévalant de la ride boisée du nord, au débit assez constant, grâce aux bois qui la recouvrent, cependant que des ravins, à sec presque toute l'année, échancreraient la ligne de collines calcaires du sud. Sauf pour les affluents Nord, il serait dans l'erreur complète, d'où se dégage la conclusion très nette qu'il y a pour le moment en Fagne *indépendance presque complète entre le réseau hydrographique et le modelé général de la région.*

Examinons la planimétrie : Nous avons figuré sur un croquis embrassant le bassin de l'Hermeton et une partie de celui du Viroin au sud, le tracé de tous les ruisseaux de la région ; au premier abord il paraît très normal. Deux affluents subséquents perpendiculaires à la Meuse, le Viroin et l'Hermeton viennent recouper un certain nombre de ruisseaux tracés sud-nord suivant la pente générale du terrain; le Viroin recueille donc des eaux abondantes descendant de la forêt ardennaise du plateau de Rocroi, par contre il n'a que des affluents insignifiants sur sa rive gauche, puisqu'ils ont dû régresser à l'encontre de la pente générale. L'Hermeton a un tracé plus capricieux ; la réunion de quelques ruisseaux descendant des hauteurs de Philippeville le forme au pied du pittoresque village de Sautour, puis il court vers l'est et comme droit vers la Meuse jusqu'au sud-ouest de Vodelée, alimenté presque également de droite et de gauche. Tout à coup il se détourne brusquement à angle droit de la dépression et s'enfonce dans les collines entre Surice et Vodelée; sa vallée tantôt si large qu'elle en était indécise, se dessine de plus en plus profonde; les méandres encaissés se multiplient; la rivière coule finalement en un vrai ravin tortueux pour atteindre perpendiculairement la Meuse au nord d'Hermeton. Ainsi donc la rivière nous montre trois branches d'orientation et d'aspect très différents; le caractère général en est subséquent ; il est de plus impossible de se dérober à l'idée que les deux branches d'aval ont capturé la branche d'amont. Voici comment nous comprenons l'évolution de la rivière ; un ravin naquit perpendiculairement à la Meuse dans le versant formé par un synclinal très net de psammites du Condroz; peut-être était-il surmonté d'un petit bassin de calcaire carbonifère, prolongement des couches contournées du plateau au sud d'Hastière-par-delà, bassin qui



aurait favorisé la concentration des eaux. Le tracé particulièrement sinueux du bras dirigé est-ouest, ainsi que la raideur des versants, comparée à la profondeur de la gorge, montrent à suffisance, combien, pour creuser son lit, le ruisseau a dû profiter des brisures dans les couches de grés, ce qui lui a permis d'atteindre rapidement un profil d'équilibre, cependant que les flancs de la vallée s'adoucissaient à peine.

La branche nord-sud est formée par un nouveau ravin perpendiculaire au premier, qui a pris une ampleur exagérée. Nous nous en sommes aisément rendu compte en parcourant ce printemps la tête du ravin du ruisseau de Soumié, qui, parallèle à cette branche, se trouve dans une situation tout à fait analogue. On y voit les schistes frasniens profondément et fraîchement ravinés, couverts à peine en quelques endroits d'un peu de végétation, et il est visible qu'à chaque pluie torrentielle, ou aux fontes de neige, le ruisselet gagne un peu vers l'amont. Ainsi progressait autrefois la branche nord-sud de l'Hermeton, quand au sud de Soulme, elle remonta le vallon tout tracé de l'important ruisseau d'Omeris; il est intéressant de constater qu'à partir de ce point la vallée se dirige perpendiculairement vers le fond de la Fagne, sans plus faire le moindre détour bien qu'elle traverse une série de terrains variés recoupant un anticlinal, où perce le givétien. Enfin, à hauteur du vieux chemin de Vodelée à Romedenne, commence la troisième section de l'Hermeton; sa vallée est tout à fait ouverte, et il coule au milieu d'un pré marécageux dont la largeur va de deux à cinq cents mètres, fond qui se raccorde par des pentes très douces au méplat général de la Fagne. Il est visible que nous sommes dans une partie beaucoup plus vieille, depuis plus longtemps usée par les eaux que dans les biefs d'aval, dont la fraîcheur était le caractère saillant. Ainsi l'aspect physique suggère irrésistiblement l'idée d'un réseau d'amont capturé. Nous n'aurions pas insisté sur ce phénomène de capture, très banal en somme, si, précisément, dans la région ne se trouvait un témoin remarquable admirablement conservé de l'ancien réseau d'aval.

Que le lecteur veuille bien avec nous se diriger vers le village de Doische; chemin faisant, il ne rencontrera aucun relief, et, cependant, il quitte le bassin de l'Hermeton à la jonction des voies ferrées de Châtelineau et d'Anor. La ligne de faîte est purement arti-

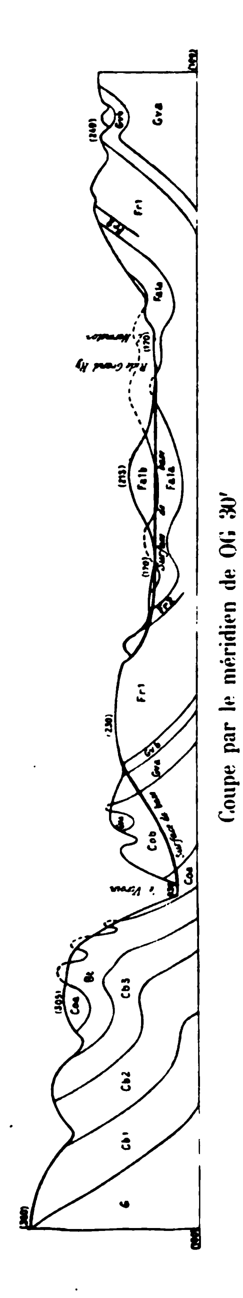
ficielle, c'est le remblai du chemin de fer; traversons-le et nous voici dans la plaine du ruisseau des Moines; il n'a pas quinze cents mètres de longueur, et cependant sa vallée est aussi largement épanouie que celles de l'Hermeton et du faux Ry, que nous avions suivies jusque maintenant. Hâtons-nous de confesser que cette circonstance n'a rien de probant; les schistes du frasnien supérieur et du famennien se délitent si aisément; leur bouillie argileuse donne un limon si fin, que le ruissellement suffit à les enlever : de là, comme chacun sait, l'origine de la dépression de Fagne et Famenne; de là, avec l'abaissement général de la région, un façonnement très avancé de tous les versants.

Mais voici que se dresse devant nous un escarpement calcaire de cinquante à soixante mètres, dans lequel au premier abord ne se révèle aucune coupure. Le ruisselet s'y glisse vers le sud-ouest dans un vallon d'abord assez ample, taillé dans les schistes frasniens mais qui se convertit en un sillon plus resserré dans les calcaires; le vallon s'ouvre un peu vers Vaucelles, pour déboucher dans la vallée de la Meuse à Hierges, sur une largeur de 400 mètres. Ainsi donc ce ruisseau, dont la surface collectrice est nulle, dont le développement en longueur n'atteint pas dix kilomètres, a réussi à se frayer un chemin au travers des multiples bancs calcaires couviniens, givétiens et frasniens qui se dressaient devant lui.

La première et la plus simple explication, qui vienne à l'esprit, est d'attribuer cette véritable coupure dans le relief à la régression d'un ravin subordonné à la Meuse; c'est ainsi que nous avons expliqué le bas Hermeton. Nous serions obligés de nous incliner devant cette hypothèse plausible, si une foule de témoins ne se trouvaient pas sous nos yeux; des affluents de gauche du Viroin, qui tentent cet effort, le plus avancé, le ruisseau du fond de Ry, est loin d'atteindre la crête du bombement calcaire.

On ne peut donc échapper à la conclusion que la vallée Doische à Hierges est parcourue par un cours d'eau décapité, et nos déductions précédentes nous permettent d'ajouter : *Le réseau amont de l'Hermeton, y compris le ruisseau d'Omeris rejoignait autrefois la Meuse par Doische et Hierges.*

Il n'entre pas dans nos intentions d'allonger cette étude outre mesure en étudiant la manière dont s'est créé le réseau du Viroin;



Coupe par le méridien de OG 30'

Coupe par le méridien de OG 40'

bornons-nous à l'étudier dans ses rapports avec le bassin de l'Hermeton. L'Eau-Blanche, rivière de Fagne et l'Eau-Noire, ruisseau d'Ardenne, viennent se joindre au nord de Nismes pour le composer et serpentent, dès lors, de fantastique façon, dans une profonde vallée taillée presque partout dans le calcaire. Dès leur jonction à la côte 153, le Viroin a son sillon tracé sous la Fagne, dont les points bas se trouvent à environ 170 (voir les coupes). Il a donc réussi bien plus rapidement que l'Hermeton à creuser sa vallée.

Mais l'Eau-Blanche, avant d'entrer dans les calcaires, aux environs de Mariembourg, se trouve aussi à la côte 155 seulement; elle constitue donc un point bas d'appel des eaux, un niveau de base pour une partie de la Fagne, auquel convergent le ruisseau de Fagnolle et celui de la Brauffe. Deux de leurs tributaires respectifs, le ruisseau du fond d'Ingremez et le ruisseau du Ribois poussent audacieusement leur tête, de part et d'autre, de la colline de Roly et viennent peu à peu substituer une pente vers Mariembourg, au tracé vers l'Hermeton. Au premier abord on est un peu surpris en traçant la ligne de faîte entre Hermeton et Viroin de la voir se perdre et traverser deux ruisseaux à double issue; la carte géologique renseigne aussi un fond alluvionnal continu. Ainsi, le Viroin prend sa revanche, il est en travail de récupérer en amont une partie du réseau perdu en aval.

L'étude détaillée que nous venons de faire, montre comment des tracés en apparence paradoxaux peuvent aisément s'expliquer par quelques modifications dans un réseau originellement très régulier. Il nous reste à aborder un point assez délicat dans l'examen de l'évolution de ce petit réseau régional. Pourquoi, demanderons-nous, le haut Hermeton venant de Philippeville se dirigeait-il vers Hierges? Il y a quelque phénomène anormal dans ce tracé d'un sillon descendant de l'ouest de Vodelée vers le sud, marquant donc sur 8 kilomètres une pente inverse à la fois de la pente générale du plateau et de celle du collecteur principal. Voici l'hypothèse que nous avançons avec une certaine timidité, comme une tentative d'explication. L'examen du relief actuel montre que le bassin de l'Hermeton est limité au nord par une ligne d'altitude générale de 300 mètres; ce relief élevé, dû aux assises de psammites du Condroz, ne se retrouve vers le sud que sur la rive droite du Viroin, aux affleurements des grès de Burnot. Toute la région

intermédiaire est actuellement au-dessous de ce niveau, les calcaires dénudés de leurs schistes encaissants, faisant un peu saillie sur ces derniers. Ainsi donc la surface générale du terrain primaire marque une gouttière très nette entre le plateau de Rocroi et celui de Philippeville.

Avant l'établissement du réseau actuel, d'autres sillonnèrent la surface de la région et d'éloquents témoins s'en trouvent dans les abîmes, auxquels M. E. Van den Broeck vient de consacrer une si importante étude (*).

Le fond de ces trous montre que la surface de base de la circulation des eaux n'était que légèrement supérieure à l'actuelle dans la région du Viroin, et nous pouvons en conclure que la gouttière est plus ancienne que le réseau dont nous nous occupons. Dès lors tout s'explique : la surface du primaire, recouverte de sédiments tertiaires (**) était ondulée (fig. 1); aussitôt la mise à découvert de

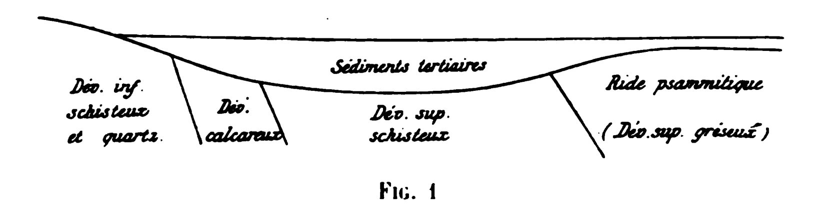


Fig. 1

l'arête psammitique naissait un obstacle que seule la Meuse arrivait à surmonter grâce à sa puissance, tandis que toutes les eaux descendant du plateau de Rocroi se rassemblaient sans réussir à le franchir (fig. 2).

Ainsi donc à ce moment commençaient à naître de petits ruisseaux descendant du plateau.

Le déblaiement des sables tertiaires progressant, la bande de dévonien calcareux fut mise à jour; là l'approfondissement rapide

---

(*) « *Les Abannets* » *Les grands abîmes et* « *paléo-gouffres* » *des collines de la région Couvin-Nismes*, thèse géologique, constituant le chapitre V du livre *Les Cavernes et les Rivières souterraines de Belgique* (Extrait publié en 1906).

(**) J. Cornet, *L'Évolution des rivières belges (1904)*, Annales de la Société géologique de Belgique.

était aisé; aussi le Viroin ne fut-il sans doute jamais en retard dans sa descente par rapport à la Meuse.

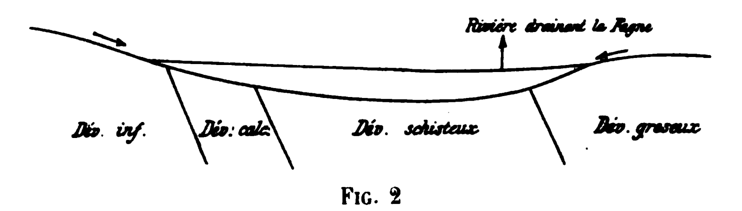


Fig. 2

On conçoit très bien que l'appel de ce niveau de base détermina un déplacement latéral de la rivière drainant la Fagne qui vint en écharpe rejoindre le calcaire (fig. 3).

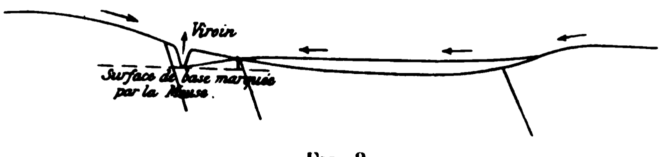


Fig. 3

Dès lors était installé le réseau qui devait subsister en s'abaissant peu à peu jusqu'à la capture par l'Hermeton.

Nous croyons inutile d'insister sur le tracé de l'aval du ruisseau de Jonquières entre Hierges et Aubrives; il est clair qu'il joignait autrefois aux environs de Vireux, et qu'il n'y a là qu'un déplacement de confluents dans l'alluvion; c'est pourquoi nous avons pu assimiler ce ruisseau à l'un des tributaires du Viroin.

En définitive l'évolution de ce réseau repose sur la circonstance que le creusement des rivières est plus aisé dans les calcaires que dans les schistes du dévonien supérieur, tandis que l'abaissement général du niveau topographique par suite du ruissellement est précisément inverse, c'est-à-dire beaucoup plus aisé dans ces mêmes schistes que dans les calcaires.

RECHERCHES

SUR LES

POTENTIELS DE DÉCHARGE

dans les gaz et les vapeurs (*)

PAR

l'Abbé TITS

Docteur en sciences physiques et mathématiques
Professeur au Collège Saint-Rombaut

INTRODUCTION

On admet aujourd'hui que la conductibilité électrique se fait dans les gaz au moyen de particules électrisées appelées *ions* (**). Cette hypothèse donne à l'étude de la décharge disruptive une importance particulière, car il s'agit de reconnaître si les phénomènes qu'elle présente cadrent avec la théorie générale. Aussi, de nombreux observateurs en ont-ils fait l'objet de leurs recherches. La remarquable synthèse qu'a faite M. J.-J. Thomson de ces travaux (***) nous dispense d'en refaire ici l'histoire. Qu'il nous suffise

---

(*) Mémoire envoyé en réponse à la question de concours de la 2e section : *Recherches nouvelles sur le potentiel de décharge dans les différents gaz*, et couronné par la SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE.

(**) Il importe de ne pas confondre ces ions gazeux avec les ions électrolytiques, qui sont de nature toute différente. Si nous utilisons le mot « ion » dans le cas présent, c'est qu'il est le plus en usage. M. de Hemptinne a proposé au Congrès de la radiologie et de l'ionisation, tenu à Liége en 1905, d'appeler « électron » la particule négative, et « électrion » la particule positive (p. 104 du *Compte rendu*).

(***) J.-J. Thomson, *Conduction of electricity through gases*, 1903, ch. XIII, pp. 346 et suiv.

d'énumérer quelques résultats qui offrent, au point de vue de cette étude, un intérêt spécial.

Le phénomène de la décharge est des plus compliqués. Rien ne semble plus capricieux que l'étincelle. C'est qu'en réalité le potentiel disruptif dépend de nombreux facteurs, dont voici les principaux : la forme et la distance des électrodes, la pression, la température, la nature du milieu gazeux. Jusqu'ici, l'on a pu démêler, dans une certaine mesure, la part d'influence qui revient à chacun d'eux. Il est établi, par exemple, que, sauf aux très basses pressions, le potentiel de décharge est sensiblement une fonction linéaire de la pression. M. Paschen (*) a trouvé que, dans un champ homogène, le potentiel explosif V s'exprime par la formule

$$V = f(pd)$$

dans laquelle p est la pression du gaz et d la distance des électrodes. Cette relation a été vérifiée par M. Carr (**) aux très basses pressions. Enfin, les recherches de M. Bouty (***), sur ce qu'il appelle la cohésion diélectrique, permettent de généraliser cette loi de la façon suivante :

$$V = f\left(\frac{pd}{T}\right)$$

T étant la température absolue du milieu considéré.

Ces données expérimentales et beaucoup d'autres, telles que l'existence de ce qu'on appelle la pression et la distance critiques d'étincelle, le « retard » de la décharge, etc., ont permis de se faire une idée du mécanisme de la décharge disruptive. D'après les essais théoriques de MM. Thomson (*loc. cit.*), Townsend (IV) et Stark (V), voici comment on peut l'expliquer : Si l'on produit une

(*) Paschen, Ann. der Phys. und Chemie, 37, p. 69, 1889.

(**) Carr., Proc. Roy. Soc. 71, p. 374, 1903, et dissertation inaugurale.

(***) Bouty, Journal de Physique, 4e s., II, p. 403, 1903 ; — III, p. 29, 1904.

(IV) Townsend, Phil. mag., 3, pp. 557-576, 1902 ; — 5, pp. 389-398, 1903 ; — 6, pp. 358-361, 1903 ; surtout 6, pp. 598-618, 1903. Electrician, 50, p. 971, 1903. Physik Z. S., 4, p. 557, 1903.

(V) J. Stark, *Die Electricität in Gasen*, 1902. Ann. der Phys. und Chemie, 7, pp. 417 et 919 ; 8, pp. 815 et 829. Phil. mag. (6), 6, pp. 116-119, 1903. On pourra se renseigner dans ces articles sur la polémique entre MM. Townsend et Stark au sujet de cette théorie.

différence de potentiel entre deux électrodes placées dans un milieu gazeux, les quelques ions qui s'y trouvaient préalablement se meuvent vers les électrodes, avec une vitesse d'autant plus grande que la différence de potentiel est plus élevée. Par leurs chocs contre les molécules, ils vont détacher de celles-ci des particules électrisées négativement, qui, à leur tour, attirées par l'électrode positive, vont acquérir la vitesse nécessaire pour ioniser, par leurs chocs, d'autres molécules. Le nombre d'ions ainsi produits croît suivant une progression géométrique jusqu'à ce qu'il soit suffisant pour occasionner une décharge continue, obscure ou lumineuse et, dans ce dernier cas, ayant la forme d'effluve ou d'étincelle. Toutefois, si la différence de potentiel était insuffisante, l'ionisation serait contrebalancée par la recombinaison des ions et la décharge lente des électrodes, et dans ce cas l'étincelle ne pourrait se produire. Même, d'après M. Stark (*), il ne pourrait y avoir d'ionisation ultérieure. En effet, la particule électrisée, électron ou électrion, doit avoir une énergie cinétique assez grande pour pouvoir ioniser les molécules qu'elle vient à choquer. Or, comme le démontre cet auteur, cette énergie cinétique au moment du choc est proportionnelle à la chute de potentiel correspondante au chemin libre parcouru par la particule électrisée. Il faut donc que cette chute de potentiel dépasse une valeur minima pour que l'ionisation puisse se produire.

On conçoit que, dans ces conditions, le potentiel de décharge dépende de ce qu'on appelle, dans la théorie cinétique, le chemin moyen libre des molécules, puisque l'électrion, ou noyau positif, correspond à la presque totalité de la molécule et que, par suite, son chemin libre est en relation étroite avec celui de la molécule. C'est ainsi que, d'après Thomson, on aurait

$$V = k + \varphi\left(\frac{d}{\lambda}\right)$$

en appelant V le potentiel disruptif, k une constante qui dépend de la nature du gaz, d la distance des électrodes, et φ une fonction identique pour tous les gaz.

Cette relation, comme celles qui précèdent, n'a été vérifiée que

(*) J. Stark, *Die Electricität in Gasen*, pp. 53 et suiv.; pp. 218 et suiv., 1902.

dans des gaz de structure simple, éloignés de leur point de liquéfaction. Ce n'est que récemment que MM. Guye (*) ont expérimenté sur quelques gaz simples au voisinage de la pression critique. Pour les corps de structure plus complexe, sauf quelques mesures peu précises de Natterer (**) et quelques résultats de M. Bouty (***) relatifs à des pressions qui ne dépassent pas 2 centimètres de mercure, il n'existe, à notre connaissance, aucune recherche. Le présent mémoire a pour but de compléter en partie cette lacune.

Les lois de Paschen et de Bouty s'appliquent-elles aux vapeurs facilement liquéfiables? — Le potentiel de décharge est-il encore, dans le cas de ces vapeurs, fonction linéaire de la pression?—Les relations prévues entre le potentiel disruptif et le chemin libre moyen se vérifient-elles? — Enfin, existe-t-il entre la constitution chimique des corps et le potentiel de décharge des liens analogues à ceux qui caractérisent d'autres propriétés physiques de ces corps? De telles relations seraient sans nul doute du plus haut intérêt pour la physico-chimie.

Avant d'exposer les résultats de nos recherches, nous croyons utile de faire connaître par quels procédés nous avons effectué la mesure des potentiels explosifs. Ces méthodes ne sont pas nouvelles; c'est ainsi que Faraday (IV) utilisait un micromètre de comparaison. Mais on les a toujours considérées comme peu précises (V). Des expériences nombreuses nous ont permis de comparer l'emploi du micromètre à celui de l'électromètre et de déterminer la précision et les avantages respectifs des deux méthodes. Cette étude comprendra donc deux parties :

I. La mesure des potentiels disruptifs (VI) — II. Les résultats.

(*) Ch. Eug. et H. Guye, ***Recherches sur la décharge disruptive dans les gaz aux pressions élevées.*** COMPTES RENDUS DU PREMIER CONGRÈS INTERNATIONAL POUR L'ÉTUDE DE LA RADIOLOGIE ET DE L'IONISATION, pp. 37 et suiv., 1905.

(**) Natterer, ANN. DER PHYS. UND CHEMIE., 38, p. 63, 1889 (cité par J.-J. Thomson).

(***) Bouty, COMPTES RENDUS, 131, pp. 469 et suiv. 1900.

(IV) Faraday, *Experimental researches*, série XII, § 1381 à 1393.

(V) Faraday, *loc. cit.*, §§ 1391 et 1392. — Bouty, JOURNAL DE PHYSIQUE, 1904, p. 12.

(VI) Nous avions déjà traité ce sujet antérieurement (ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE, t. XXX, p. 190, 1906). Certaines observations, qui nous ont été présentées par des critiques obligeants, nous forcent d'y revenir.

PREMIÈRE PARTIE

LA MESURE DES POTENTIELS

I

Dispositif expérimental

Les connexions entre les divers appareils ont été établies de façon à permettre l'emploi simultané des deux méthodes dont la description va suivre. C'est ce qui ressort de la représentation schématique (fig. 1).

Donnons quelques détails sur notre installation :

M est une machine Wimshurst à quatre plateaux, ou, éventuellement, une autre source d'électricité. Nous parlerons ailleurs des essais effectués au moyen de certaines sources d'électricité dynamique.

La régulation du potentiel n'a guère exigé de précautions spéciales. Moyennant une rotation régulière de la machine statique, il nous a suffi de relier un de ses pôles à une puissante batterie L de six jarres dont l'armature extérieure était mise au sol. De plus, une ligne de terre T réunissait l'autre pôle de la machine, une électrode de chaque micromètre à étincelles et l'armature extérieure de l'électromètre.

Le micromètre à étincelles A est celui que nous appellerons micromètre d'expérience. Il était placé dans un récipient de 14 centimètres de diamètre et de 20 centimètres de hauteur. Cet appareil, dont la figure 2 montre une coupe verticale, se composait de deux parties, l'une cylindrique, l'autre hémisphérique, appliquées l'une sur l'autre suivant des surfaces rodées enduites (comme toutes les parties rodées) d'une graisse qui permit une fermeture hermétique. Le robinet *r*, qui fait corps avec un bouchon rodé, servait à faire le vide et à introduire les vapeurs par un mécanisme qui sera décrit plus loin. Dans les ouvertures pratiquées aux extrémités d'un même diamètre du récipient étaient fixés deux écrous métalliques fermés vers la partie extérieure. Ces écrous portaient les tiges filetées qui constituaient le micromètre, et auxquelles on pouvait adapter les électrodes de forme voulue. Nous avons utilisé en général un disque de 7 centimètres de diamètre et

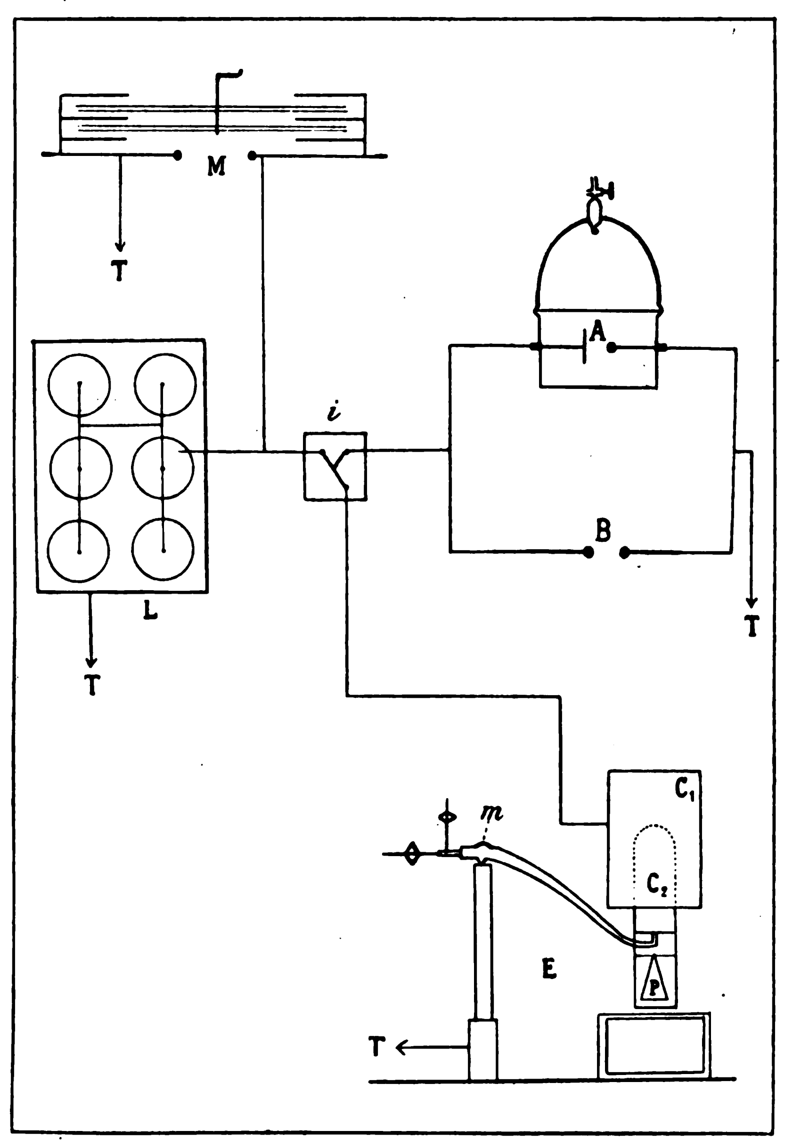


Fig. 1. — M, machine statique; L, batterie; E, électromètre; A, micromètre d'expérience; B, micromètre de comparaison; T, communication avec la terre; C_1, cylindre fixe; C_2, cylindre mobile; P, plateau de balance; *m*, miroir concave; *i*, interrupteur.

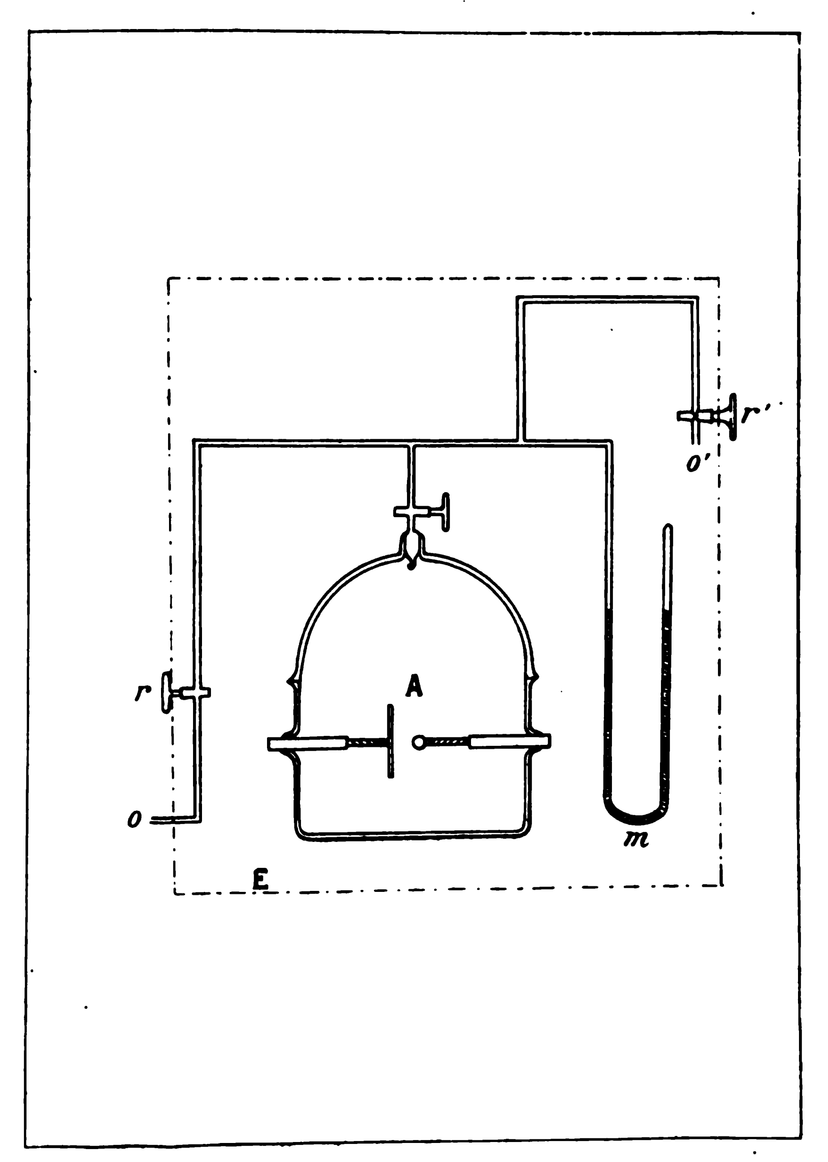


Fig. 2. — A, cloche à vide; E, étuve; *m*, manomètre; *r*, *r'* robinets; *o*, communication avec la trompe; O', communication avec le réservoir.

une sphère de 75 centimètres de rayon, en laiton bien poli. La sphère était au sol et l'électrode plane reliée à la source d'électricité. Nous n'avons pas tenu compte, en général, de la polarité de cette électrode; des essais préliminaires nous ont montré que cette polarité était indifférente dans nos conditions d'expérience, ce qui est d'ailleurs confirmé par une étude de Wesendonck (*) sur ce sujet.

Vu la difficulté qu'il y avait de placer exactement les tiges filetées suivant la direction voulue, et l'incertitude qui en résultait quant à la distance explosive, nous avons toujours contrôlé cette distance en faisant glisser à frottement doux, entre les électrodes, des plaques de verre d'épaisseur donnée. Il a été reconnu que cette façon de procéder comportait une erreur maxima de 1 millimètre; encore nous sommes-nous bien gardé de modifier pendant une série d'expériences, la distance ainsi déterminée.

La plupart des physiciens qui opèrent dans des conditions analogues disposent, autour des électrodes, une sorte de panier métallique relié au sol. Des expériences préliminaires nous ont donné des potentiels sensiblement égaux, que le micromètre fût à l'air libre ou dans le récipient de verre. Aussi, bien que nous admettions une certaine influence des parois (elle semble avoir été démontrée par Baille [**]) nous sommes amenés à conclure que, dans le cas présent, elle est négligeable, sans doute à cause des grandes dimensions du récipient, et aussi à cause des précautions pour espacer convenablement les étincelles successives.

Le micromètre B, que nous appellerons micromètre de comparaison, a été construit à l'institut du professeur Edelman, à Munich. Il est d'une précision remarquable et donne le $\frac{1}{200}$ de millimètre. Les électrodes employées étaient des sphères de laiton de 1 centimètre de rayon. Leur contact, c'est-à-dire le zéro du micromètre, se déterminait par la disparition de l'étincelle. Cette méthode comporte une précision de 0,01 millimètre. Enfin l'électromètre employé était celui de MM. Bichat et Blondlot. Nous y reviendrons à l'instant.

(*) Wesendonck, Ann. der Phys. und Chem., t. 28, p. 222.

(**) Baille, Annales de Physique et de Chimie, 5e s., t. 29, 1883, pp. 181 et suiv.

Tous ces appareils étaient placés à de grandes distances les uns des autres afin d'éviter les influences réciproques.

Nous n'avons pas, comme d'autres physiciens, cherché à diminuer le « retard » de l'étincelle à l'aide de certains agents ionisants, et par suite nos mesures ne donnent pas le potentiel de décharge, au sens défini par J. J. Thomson (*). Vouloir supprimer le retard, c'est, nous semble-t-il, n'étudier qu'une partie du phénomène de décharge, car le retard (Warburg l'a démontré [**]) fait partie du processus de la décharge; ou plutôt, c'est envisager le phénomène compliqué par l'intervention d'un agent étranger. Cette complication est d'autant plus considérable que les rayons X ont une action très différente, et d'après la dureté de l'ampoule qui les produit, et d'après le milieu sur lequel ils agissent. Ce fait a été démontré par les travaux de M. le professeur de Hemptinne sur un sujet analogue (***). Il s'agit de la luminescence provoquée par des oscillations électriques dans les gaz à basses pressions. Cette luminescence est facilitée par les rayons X et les substances radioactives, et l'action de ces agents croît avec le poids moléculaire des gaz étudiés.

Cette confirmation indirecte pourrait paraître insuffisante. Aussi, sans vouloir étudier complètement l'action des agents ionisants sur le champ électrique (cette étude serait très complexe et délicate), nous avons effectué en utilisant les rayons X et la lumière ultraviolette, quelques mesures dont voici les résultats.

1° Dans l'air, l'action des agents ionisants n'introduit guère de diminution du potentiel de décharge.

2° La diminution du potentiel de décharge, sous l'influence de l'arc électrique, est très faible dans les vapeurs de benzine et d'éther. Elle est plus forte dans la vapeur de chloroforme. Elle croît avec la pression et oscille entre 2 p. c. et 4 p. c.

3° L'action des rayons X est beaucoup plus évidente. Dans la benzine et l'éther, le potentiel de décharge subit une diminution

---

(*) J.-J. Thomson, *Spark discharge*, loc. cit., p. 347.

(**) Warburg, SITZUNGSBERICHTEN DER BERL. AKAD. XII, p. 223, 1896; ANN. DER PHYSIK 52, p. 983, 1897.

(***) de Hemptinne, ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIKALISCHE CHEMIE, 26, p. 398, 1898 et 41, p. 101, 1903.

qui augmente avec la pression et va de 3 p. c. à 5 p. c. Dans le chloroforme, elle varie de 4 p. c. à 10 p. c.

Les chiffres contenus dans les tableaux suivants sont relatifs à l'éther, à la benzine et au chloroforme : V est le potentiel disruptif quand on n'utilise pas d'agent ionisant (*); V' correspond à l'emploi de l'arc électrique, V'' à l'emploi des rayons X. La température était de 16°, et la distance explosive $d = 1$ centimètre.

Éther éthylique

p (**)	V	V''	Diminution %
20	11	10,7	3
40	14,4	14	2,85
60	18,1	17,4	3,9
80	21,5	20,6	4,18
100	24,8	23,6	5

Benzine

p	V	V''	Diminution %
20	15,7	15,2	3,2
40	20,4	19,6	4
60	25,5	24,3	4,7

Chloroforme

p	V	V'	V''	Diminution %	
20	15,1	14,8	14,5	2	4
40	25,4	24,8	23,9	2,4	5,9
60	34,9	33,9	32,7	2,9	6,1
80	44,7	43,1	42	3,5	6,1
100	54,7	52,5	49,9	3,8	8,9
120	60,6	56,3	54,5	4,3	10,1

Le poids moléculaire, la pression du gaz, la nature de l'agent ionisant interviennent donc pour compliquer le phénomène.

On remarquera que ces quelques expériences sur le retard sont très différentes de celles effectuées par M. Warburg *(loc. cit.)*. Le dispositif et la manière de procéder du savant physicien conviennent mieux pour une étude méthodique et étendue du retard ; mais en procédant comme nous l'avons fait, c'est-à-dire en étudiant, non le retard en lui-même, mais la diminution du potentiel disruptif provenant de la suppression partielle du retard, nous avons pu établir suffisamment le désavantage qu'il peut y avoir à utiliser les agents ionisants.

(*) Sauf pour la benzine, V a été déduit des tableaux de la page 56, par interpolation.

(**) *p* désigne la pression du gaz en millimètres.

II

Méthode électrométrique

Le principe de l'électromètre de MM. Bichat et Blondlot (*), dont la figure 1 reproduit les parties essentielles, est le suivant : Le cylindre fixe C_1 porté à un certain potentiel, attire le cylindre mobile C_2 avec une force exprimée par la formule bien connue :

$$F = \frac{V^2}{4 \operatorname{Log} \frac{R}{r}}$$

F s'évalue en dynes, V en unités électrostatiques de différence de potentiel (l'unité vaut 300 volts), les rayons R et r en centimètres. Dans notre appareil, les rayons des deux cylindres étaient respectivement : R = 6,14 centimètres ; r = 2,50 centimètres.

Un premier mode d'emploi de cet instrument consiste à compenser par des poids l'action électrostatique. Nous l'avons utilisé au début, et bien qu'il soit peu pratique, à cause des tâtonnements qu'il nécessite, et surtout de la difficulté de changer les poids sans déranger l'appareil, il présente néanmoins des avantages, ce qui nous porte à le décrire brièvement.

On place d'abord sur le plateau P un poids trop faible, autant que possible. Un arrêt (qui n'est pas représenté sur la figure) permet au cylindre C_2 de monter sous l'action électrostatique de C_1, mais non de descendre au-dessous de sa position d'équilibre. On donne à l'instrument la plus grande sensibilité possible, afin que le déplacement de bas en haut ait lieu dès que l'action électrostatique surpasse le poids compensateur. La réflexion d'une image lumineuse par un miroir m, solidaire de l'électromètre, sur une règle placée à distance, permet d'ailleurs de constater le moindre déplacement. Si l'étincelle éclate au moment précis où l'image lumineuse se déplace, le potentiel disruptif est exprimé en fonction du poids par la relation

$$V = \sqrt{4 \text{ P } g. \operatorname{Log} \frac{R}{r}} = 59{,}38 \left(\sqrt{P} \text{ grammes.}\right)$$

(*) Bichat et Blondlot, Journal de Physique, 2e série, t. 5, pp. 325 et 457, 1886.

Si le mouvement de l'image se produit au contraire avant l'étincelle, on interrompt aussitôt la production d'électricité (ce que nous faisions à l'aide d'un interrupteur *i* qu'on pouvait actionner à distance au moyen de poulies) et l'on met des poids plus forts.

Ce procédé évitait l'inconvénient de trop nombreuses étincelles consécutives et permettait de mesurer des potentiels faibles ou élevés. Hormis ces avantages, il s'est montré manifestement inférieur à l'emploi de la méthode optique de Poggendorf (*).

On sait que cette méthode consiste à lire sur une règle graduée la déviation de l'image lumineuse réfléchie par le miroir solidaire de la balance. Il faut, dans ce cas, graduer préalablement l'instrument afin de savoir à quel potentiel correspond une déviation déterminée.

Dans le cas de l'électromètre de Blondlot, cette graduation est facile, puisque le déplacement de l'image est très sensiblement proportionnel aux poids. Nous basant sur cette propriété, nous avons fait en sorte qu'une déviation de 100 millimètres correspondît exactement à une charge de 200 milligrammes. De cette façon, le potentiel était exprimé, en fonction de la déviation δ en millimètres par

$$V = 59,38 \sqrt{\frac{2\delta}{1000}}$$

et l'on pouvait utiliser tous les calculs déjà effectués pour la détermination des potentiels en fonction des poids compensateurs.

Cette méthode est incontestablement plus rapide que la méthode micrométrique. Remarquons pourtant qu'en pratique on ne peut se contenter d'une lecture, et que l'on doit espacer les étincelles de façon à éviter l'influence d'une trop forte ionisation du milieu, ou même d'une électrisation des parois de verre, qui, dans ce cas, pourrait n'être plus négligeable.

L'emploi de l'électromètre a d'ailleurs ses inconvénients :

1° V est proportionnel à la racine carrée de δ, ce qui fait que l'instrument est beaucoup moins précis pour les petits potentiels

(*) Il est à remarquer pourtant que cette première méthode serait sensiblement améliorée si l'on substituait, à l'usage de poids, l'emploi d'un cavalier qui se déplacerait sur le fléau de la balance à l'aide d'une vis micrométrique.

que pour les grands, alors que le contraire serait évidemment plus avantageux. Voici quelques chiffres concluants à ce sujet :

δ mm	V	
2	3,62	différence 0,95 UES
3	4,57	
20	11,87	différence 0,53 UES
21	12,41	
180	35,6	différence 0,1 UES
181	35,7	

Si l'on rend l'instrument plus sensible, l'image lumineuse dépasse les limites de la graduation. On peut, il est vrai, tourner la difficulté en plaçant un poids déterminé sur le plateau de la balance. Mais s'il fallait appliquer souvent ce moyen, auquel nous avons dû parfois recourir, la méthode perdrait son plus précieux avantage ;

2° Si l'on ne prend pas la précaution d'élever lentement le potentiel, le cylindre mobile dépasse, grâce à la vitesse acquise, la position qu'il devrait occuper lors de l'étincelle. Ajoutons que le mouvement de l'image lumineuse cause facilement une erreur de lecture d'un millimètre et plus.

III

Méthode micrométrique

Les mesures s'effectuent de la façon suivante : On place les deux micromètres en dérivation (fig. 1), le micromètre de comparaison, étant à l'air libre. Supposons que l'étincelle éclate en A. On rapproche les boules du micromètre de comparaison, jusqu'à ce que l'étincelle éclate en B pour une distance β de ce micromètre. Alors on écarte de nouveau les boules jusqu'à ce que l'étincelle éclate en A pour la distance explosive α. On considère alors la distance $\delta = \frac{\alpha + \beta}{2}$ comme étant celle pour laquelle on aurait une décharge indifféremment en B ou en A.

En réalité, cette hypothèse est erronée et l'erreur peut égaler la moitié de l'intervalle (α β). Aussi ne s'arrête-t-on pas à un premier essai, mais on poursuit l'opération jusqu'à réduire l'intervalle (α β) à 0,01 ou 0,02 de millimètre.

Cette méthode est pénible au début, mais avec un peu d'habitude et moyennant certaines précautions, on arrive promptement au résultat, surtout si, comme nous le faisions, on s'aide du contrôle de l'électromètre.

La principale précaution à prendre est d'éviter, autant que possible, que l'étincelle éclate plusieurs fois au même micromètre. Pour cela, on a soin de varier d'abord assez bien la distance explosive du micromètre de comparaison, pour diminuer ensuite graduellement ces variations. L'on doit aussi espacer convenablement les étincelles.

C'est la négligence de cette précaution qui explique le principal grief articulé contre la méthode. Ainsi, Faraday écartait les boules du micromètre de comparaison jusqu'à ce que l'étincelle passât indifféremment dans les deux micromètres. Il en résultait une succession d'étincelles qui devait nécessairement échauffer les électrodes et modifier le champ électrostatique.

La distance δ étant déterminée, on connaît le potentiel disruptif correspondant moyennant la graduation préalable du micromètre de comparaison. Voici notre graduation répétée à plusieurs semaines d'intervalle; les résultats ont été concordants, et diffèrent aussi très peu des mesures de M. Paschen pour les mêmes électrodes.

δ	V	δ	V	δ	V
0,4	7,9	1,5	22,6	5	58,4
0,5	9,5	2	28,5	5,5	62,8
0,6	11,1	2,5	34,1	6	66,9
0,7	12,5	3	38,9	6,5	70,8
0,8	13,7	3,5	44,2	7	74,5
0,9	15	4	49	7,5	78,2
1	16,2	4,5	53,9	8	81,8

Ces déterminations sont relatives à une température de 18 degrés et une pression de 760 millimètres. Il a fallu, le cas échéant, les réduire à d'autres pressions et températures. La loi de Paschen et sa généralisation auraient pu servir à ces réductions. Nous avons préféré appliquer une règle donnée par M. Heydweiller (*), suffi-

(*) Heydweiller, *Entladùngspotentiale*. ANN. DER PHYS. UND CHEM., 48, p. 213, 1893.

samment exacte dans les limites restreintes de pressions et de températures entre lesquelles nous avons opéré : on augmente le potentiel disruptif de 1 p. c. pour un accroissement de 8 millimètres de pression, ou une diminution de température de 3 degrés.

La méthode micrométrique, moins rapide que la méthode électrométrique, n'a pu être appliquée dans certains cas où, par suite de dissociations ou pour d'autres motifs, les résultats étaient fort irréguliers. Hormis ces cas, elle présente de réels avantages :

1° Sa précision ne varie guère avec la distance explosive du micromètre de comparaison. Elle comporte constamment une approximation d'environ 0,2 à 0,3 *UES*.

2° Elle permet de mesurer les potentiels, si élevés qu'ils soient, même si l'étincelle venait à éclater entre les pièces de l'électromètre.

3° Les causes d'erreurs communes aux deux micromètres sont atténuées par leur emploi simultané. Citons, par exemple, la résistance du circuit, la capacité du condensateur, etc.

4° Cette méthode peut servir, non seulement dans le cas de la machine statique, mais encore quand la source du potentiel est une bobine d'induction ou un excitateur de Tesla. Les résultats qu'elle fournit alors sont moins bons que si l'on utilise la machine statique. Cela provient surtout de ce qu'on obtient, non une étincelle, mais un flux d'étincelles qui provoquent une ionisation trop forte de l'un ou de l'autre champ, et oxydent rapidement les électrodes. Aussi faut-il redoubler ici de précautions. Nous avons remarqué que les courants de faible intensité donnaient des résultats meilleurs ; que la self induction des circuits joue ici un rôle important ; enfin, que la manière la plus avantageuse de procéder était de prendre un micromètre de sûreté dont on écartait brusquement les boules au moment de la mesure.

L'emploi de la méthode micrométrique dans ces conditions ne serait toutefois légitimé que si le potentiel de décharge statique était le même que le potentiel dynamique, puisque c'est par une méthode statique que l'on a gradué le micromètre de comparaison. Cette question a été fort débattue, et n'a pas encore reçu de solution définitive. M. Jaumann (*) soutient que la décharge disrup-

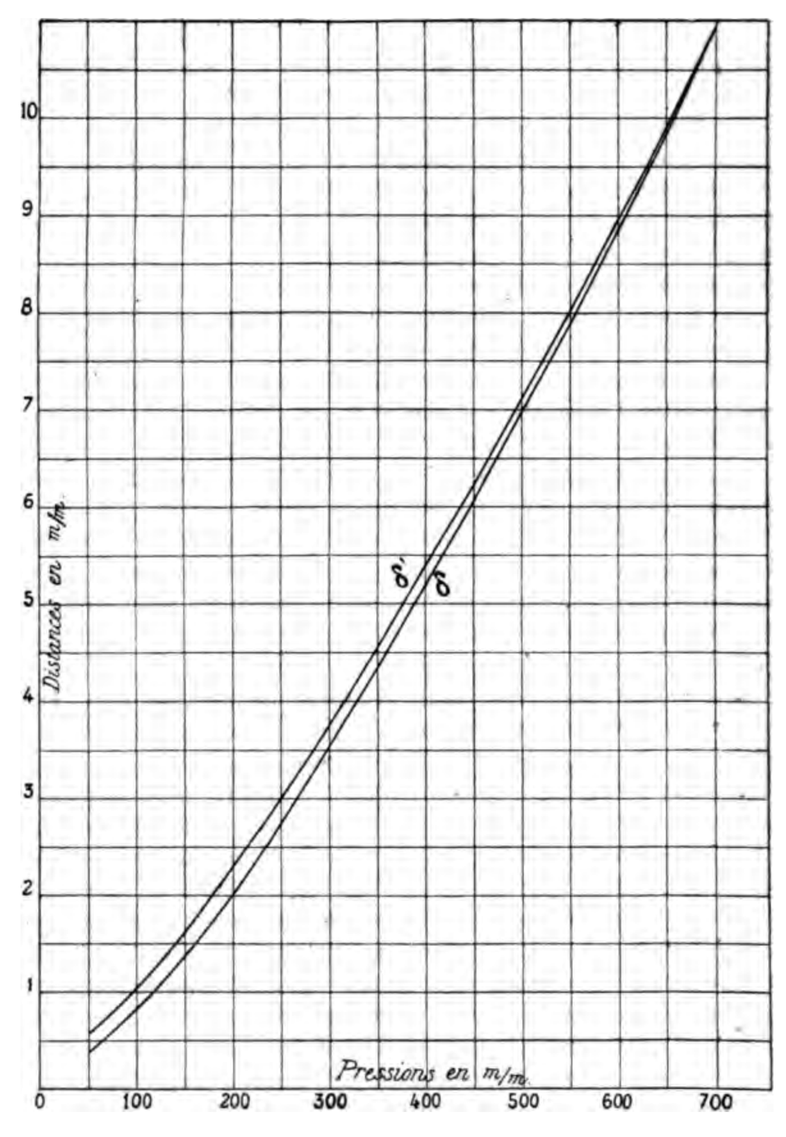
(*) Jaumann. *Inconstanz des Funkenpotentiales.* ANN. DER PHYS. UND CHEM., t. 55, p. 656, 1895.

tive dépend, non de V mais de V $\frac{dV}{dt}$. L'emploi de la méthode micrométrique nous a permis de faire à ce sujet l'expérience suivante.

Le dispositif était celui de la figure 1, sauf la suppression de l'électromètre et le remplacement de la machine statique par une bobine d'induction. Le micromètre A était placé dans l'air à des pressions variables; le micromètre B était à l'air libre, et l'on faisait varier sa distance explosive.

Cela posé, soit p la pression de l'air dans le champ du micromètre A. Soit δ la distance explosive de B lorsque le potentiel est le même pour les deux micromètres. Soit δ' cette même distance si l'on emploie la machine statique au lieu de la bobine d'induction. Portons p en abscisses, δ et δ' en ordonnées. Si les deux courbes (p, δ) et (p, δ') coïncident, on peut conclure avec une très grande probabilité que les potentiels de décharge statique et dynamique sont les mêmes, ou du moins qu'ils varient suivant la même loi en fonction de la pression et de la distance. Si ces courbes diffèrent, il faut dire que les électricités statique et dynamique agissent différemment au point de vue du potentiel explosif, à moins qu'on ne parvienne à expliquer cette différence par l'une ou l'autre cause perturbatrice.

Nous avons opéré pour deux distances du micromètre A. Les mesures n'ont guère été fort nettes. Cependant les phénomènes affectent une allure générale que représentent à peu près les courbes de la figure 3. On voit que les valeurs de δ sont plus petites que celles de δ' aux basses pressions, et tendent à se confondre avec elles quand on s'approche de la pression atmosphérique. Il semble donc que, dans le vide, l'étincelle dynamique passe mieux que l'étincelle statique. Ce fait s'explique assez bien dans l'hypothèse de l'ionisation par les chocs, car, si l'on élève brusquement le potentiel, la force vive des particules ionisées est plus considérable que si on l'accroît lentement. L'on conçoit aisément que cette influence d'une variation brusque de potentiel est d'autant plus grande que le gaz est plus raréfié, et que par suite les espaces parcourus par les ions dans l'intervalle des chocs sont plus considérables.



10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
Distances en m/m.
δ'
δ
Pressions en m/m.
0
100
200
300
400
500
600
700

Fig. 3

IV

Conclusions de cette première partie

Si la méthode électrométrique est la plus facile et la plus rapide, la méthode micrométrique ne lui cède guère en précision, du moins pour le genre spécial de mesures que nous avons entreprises. D'autre part cette dernière présente des avantages qui la rendent très utile dans certains cas.

Pratiquement, leur emploi simultané nous a été fort avantageux, car il nous a permis de contrôler l'une par l'autre et de découvrir parfois des erreurs accidentelles qui s'étaient glissées dans l'une ou l'autre mesure. Sauf pour les potentiels très bas, les divergences n'ont guère excédé 0,3 UES, et dans ce cas d'exception, nous avons accordé la préférence au micromètre, pour les motifs exposés plus haut.

Nos résultats ne mentionnent pour le potentiel qu'une seule décimale; encore ne garantissons-nous leur exactitude qu'à 0,3 UES près, c'est-à-dire en général à moins de 3 p. c., puisque presque tous les potentiels mesurés dépassent 10 UES. Nous pensons même que pour interpréter ces résultats avec justesse, il faut les considérer comme essentiellement relatifs, c'est-à-dire obtenus avec un dispositif déterminé et dans des conditions déterminées. Ce n'est que parce que ces conditions sont restées sensiblement les mêmes pendant toute la durée des expériences que l'on peut comparer les résultats et en déduire les conclusions que nous exposerons dans la seconde partie.

DEUXIÈME PARTIE

LES RÉSULTATS

I

Production, introduction dans le récipient et chauffage des vapeurs

1. *Production des gaz et des vapeurs.* — Les quelques gaz sur lesquels nous avons opéré ont été produits de la façon suivante :

L'hydrogène a été obtenu par l'action de l'acide chlorhydrique sur le zinc. Pour le purifier et le dessécher, on lui a fait traverser successivement une solution de potasse caustique, de l'eau distillée, de l'acide sulfurique et une colonne de chlorure de calcium.

Les expériences sur *l'air* ont été faites à deux reprises : d'abord, sans prendre aucune précaution spéciale pour l'épurer ; ensuite, en le débarrassant, par la potasse caustique, de l'anhydride carbonique qu'il contenait et en le desséchant ensuite. Les divergences entre les résultats n'ont guère été appréciables.

L'anhydride carbonique a été produit par l'action de l'acide chlorhydrique sur le carbonate de calcium, puis lavé dans l'eau distillée, et desséché par l'acide sulfurique concentré.

Le *gaz ammoniac* a été obtenu en faisant le vide sur une solution aqueuse de ce gaz, et desséché par l'oxyde de barium.

La préparation du *méthane* s'est faite par le procédé Grignard, c'est-à-dire par l'action de l'eau sur un bromure organo-magnésien :

$$Mg <^{CH_3}_{Br} + H_2O = Mg <^{OH}_{Br} + CH_4.$$

Le gaz produit a été lavé successivement dans l'alcool, l'eau et l'acide sulfurique, puis desséché sur le chlorure de calcium.

Les autres vapeurs ont été produites par évaporation dans le vide des substances employées. La plupart des corps étaient fournis par la maison Kahlbaum. Les corps avides d'eau ont été préalablement distillés, ainsi que ceux qui, pour une raison quelconque, n'avaient plus qu'une pureté douteuse. Enfin, nous avons évité de souiller les corps par le contact des graisses ou d'autres substances.

2. *Introduction des vapeurs dans le récipient* (voir la fig. 2). — Le récipient était relié d'une part aux appareils à faire le vide (par la partie *o* de la canalisation), d'autre part au réservoir qui contenait le liquide à réduire en vapeur (par la conduite *o'*). Les robinets *r* et *r'* permettaient de l'isoler de l'une de ces deux canalisations. On faisait en sorte d'avoir le vide dans le récipient, le robinet *r'* étant fermé ; puis on fermait *r*, on ouvrait *r'*. La vapeur s'introduisait alors dans le récipient. On arrêtait l'évaporation en fermant le robinet *r'* quand on avait atteint la pression voulue.

Nous n'avons fait un vide préalable à la pompe à mercure que lorsqu'il s'agissait de corps peu volatils à la température d'expérience. Pour les corps volatils, il était plus pratique de ne faire qu'un vide imparfait au moyen de la trompe à eau (15 à 20 millimètres de mercure) puis de remplir le récipient de vapeur, et de recommencer la même opération jusqu'à ce que le pourcentage d'air fût négligeable. Ainsi, pour un corps ayant une tension de vapeur d'environ 200 millimètres, il restait un millième d'air après avoir répété trois fois l'opération. Nous avons toujours eu soin de dépasser ce minimum, d'autant plus qu'au début de nos expériences nous avons pu nous convaincre, par plus d'un insuccès, de l'importance de cette opération (*).

Ajoutons que c'est par un procédé identique que l'on a effectué le nettoyage de la canalisation, après chaque série de mesures. On faisait trois ou quatre fois le vide, et l'on introduisait de l'air pur et sec. Quant au récipient, il a été ouvert et nettoyé autant de fois que cela était nécessaire.

3. *Chauffage des vapeurs.* — Nous avons d'abord essayé de produire une température constante en plongeant le récipient dans un bain de paraffine liquide. Le principal inconvénient de ce dispositif est que la paraffine s'introduisait dans le récipient lorsque par hasard celui-ci n'était pas hermétiquement fermé. Comme on ne pouvait guère immerger le manomètre ni le réservoir à liquide, l'introduction des vapeurs et la mesure de la pression entraînaient des difficultés considérables, à cause de la condensation des vapeurs aux parois froides.

La production de températures constantes par distillation de certaines substances n'a guère donné de meilleurs résultats, et il a fallu l'abandonner également.

Enfin, nous avons retiré les plus grands avantages de l'emploi d'une étuve bactériologique du docteur Schribaux, avec régulateur

---

(*) Il n'est pas inutile de rappeler ici les travaux de M. Bouty sur la cohésion diélectrique des mélanges (JOURNAL DE PHYSIQUE, III, p. 489, 1904; III, p. 593, 1904 et IV, p. 317, 1905). Il démontre que dans beaucoup de cas, en appelant V le volume du mélange et C sa cohésion diélectrique, $v_1, v_2, \ldots v_n$ les volumes des composants, $c_1, c_2, \ldots c_n$, leur cohésion diélectrique, on a $VC = \Sigma vc$. Pour certains mélanges pourtant, cette loi, qu'il appelle *loi des moyennes*, n'est pas applicable.

de température du docteur Roux. Le récipient d'expérience, le manomètre, et, sauf pour les liquides les plus volatils, le réservoir à liquide étaient placés dans cette étuve, dont les traits interrompus de la figure 2 indiquent les limites. Pendant les expériences, toute communication entre l'intérieur et l'extérieur de l'étuve était interrompue, de manière à éviter les inconvénients de la paroi froide.

Nous avons opéré en général à 40°; il n'y a d'exception que pour les mesures qui ont servi à déterminer l'influence de la température sur le potentiel de décharge. D'abord, un thermomètre placé dans l'étuve faisait connaître la température. Mais nous nous sommes bien vite aperçu que les indications de ce thermomètre étaient illusoires : l'intérieur du récipient s'échauffait plus lentement que l'étuve, à cause de la mauvaise conductibilité de l'épaisse enveloppe de verre; ensuite, l'évaporation rapide du liquide était une cause de refroidissement parfois assez considérable. Aussi a-t-il fallu placer un petit thermomètre dans le récipient même, et chauffer l'étuve longtemps avant les expériences.

II

Mesures préliminaires sur quelques gaz simples

Ces mesures ont été entreprises, tant pour nous assurer que nos résultats ne différaient pas trop de ceux des autres expérimentateurs, que pour avoir une base sûre de comparaison dans nos recherches ultérieures sur les corps plus complexes.

Les chiffres obtenus vérifient, comme on va le voir, les deux lois suivantes, déjà connues :

1. Le potentiel est sensiblement fonction linéaire de la pression.
2. La loi de Paschen est vérifiée avec une approximation suffisante.

Nous insistons sur ce fait, car nos électrodes ne sont pas planes; de plus, nous avons observé à des distances telles que le champ électrique ne peut plus être considéré comme homogène. Des essais préliminaires étaient donc indispensables avant de faire des recherches sur cette loi dans des composés plus complexes.

Pour ce qui est de l'influence de la température dans ces gaz, nous y reviendrons dans un chapitre ultérieur, car il nous faudra, pour éviter toute équivoque, revenir un peu plus longuement sur ce que nous avons dit à ce sujet dans l'introduction.

Air atmosphérique

Pression en mm.	Potentiel de décharge en UES Température $t = 15°$ $d = 1$ cm.	$d = 0,6$ cm.	$d = 0,3$ cm.	$t = 40°$ $d = 1$ cm.
—	—	—	—	—
20	6	4,9		5,8
30	7,5	5,8		7,3
40	9,2	6,9	4,8	8,8
50	10,6	7,7	5,4	10,2
60	12	8,5	5,9	11,7
70	13,5	9,2	6,4	13,1
100	17,6	12	7,6	17,2
150	24,9	16,2	9,7	23
200	31,8	20,3	11,9	28,8
250	39	24,7	13,9	34,5
Expression du potentiel en fonction de la pression exprimée en centimètres	$V = 3,2 + 1,44\,p$	$V = 3,3 + 0,855\,p$	$V = 3,25 + 0,43\,p$	$V = 3 + 1,34\,p$

Lorsque le potentiel s'exprime en fonction de la pression par une relation linéaire : $V = a + bp$, la loi de Paschen peut se mettre sous la forme suivante :

$$V = \alpha + \beta\, pd$$

où $\alpha = a$, $\beta = \frac{}{d}$. Les quantités α et β sont d'ailleurs indépendantes de la distance. Nos mesures faites dans l'air à 15° donnent pour ces constantes :

d en cm.	α	β
—	—	—
1	3,2	1,44
0,6	3,3	1,42
0,3	3,25	1,43
—	—	—
Moyenne	3,25	1,43

Vapeur d'eau $H - OH$
$f_{40} = 55$ mm

p	V	p	V
7	4,5	36	9,5
11	5,2	39	10,1
15	6,1	44	10,4
20	7	46	10,7
30	8,4	49	10,9

Alcools homologues

Alcool méthylique $CH_3 - OH$
$f_{40} = 243$ mm

p	V	p	V
10	6,4	96	19,6
15	7,4	114	22,4
26	9,4	136	25
36	11	165	28,4
54	14	200	31,2
68	16,1	211	31,8
90	18,8		

Alcool éthylique $C_2H_5 - OH$
$f_{40} = 143$ mm

p	V	p	V
10	7,2	65	16,9
14	8,2	78	18,6
24	10,3	100	21,4
36	12,5	123	23,8
48	14,4		

Alcool propylique $C_3H_7 - OH$
$f_{40} = 53$ mm

p	V	p	V
10	8	40	13,6
16	9,6	44	14,3
27	11,8	48	14,6

Alcool butylique $C_4H_9 - OH$
$f_{40} = 19$ mm

p	V	p	V
6	8	12	9,8
8	8,8	16	10,4
10	9,3		

Alcools isomères des précédents

Alcool isopropylique
$CH_3 - CH(OH) - CH_3$
bout à 83°

p	V
15	7,5
24	9,2
31	11
40	12,6
50	13,8
60	14,8

*Alcool butylique second*re
$CH_3 - CH(OH) - CH_2 - CH_3$
bout à 99°

p	V
5	3,2
10	5,6
16	7,9
22	9,8
29	11,3
34	12,1
38	12,5

*Alcool butylique tert*re
$(CH_3)_3 - C - OH$
bout à 83°

p	V
7	2,7
15	5,8
22	10
31	11,3
42	14
51	16
56	17
64	17,8

Le potentiel de décharge dans ces vapeurs n'est plus fonction linéaire de la pression. Les courbes ont, avec une approximation grossière, la forme de paraboles (fig. 4 et 5) qui tendent à passer

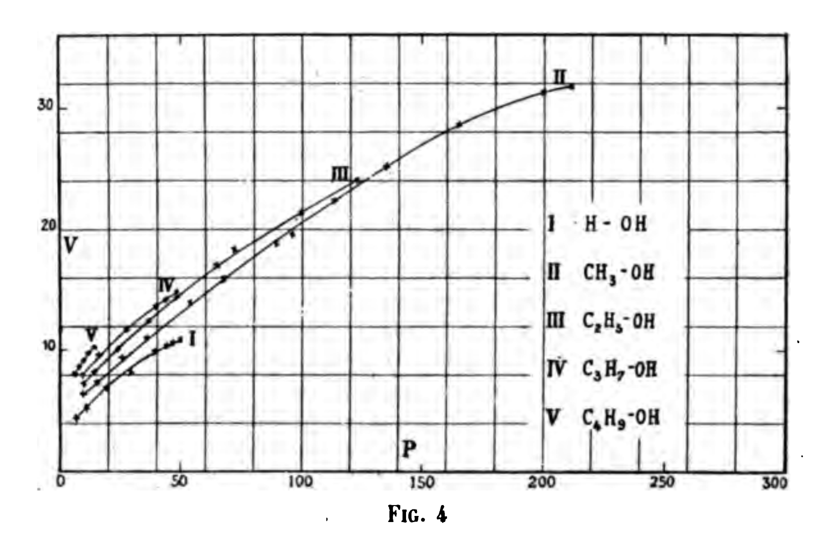


Fig. 4

par un maximum au point qui correspond à la tension de vapeur saturée. On verra qu'il en est de même pour tous les corps étudiés. En général pourtant, la partie de la courbe qui correspond aux

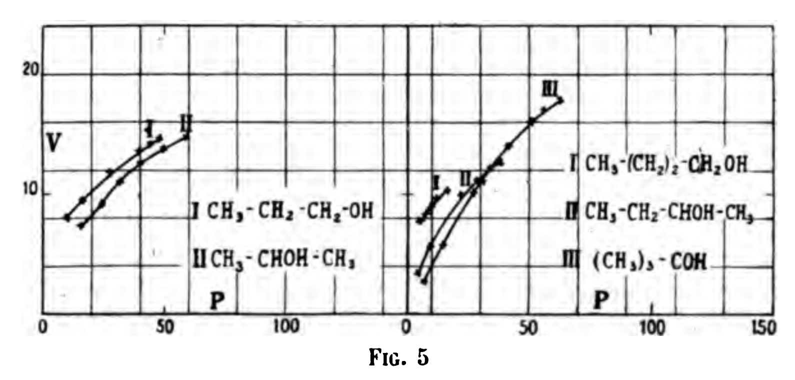


Fig. 5

basses pressions se rapproche assez bien de la ligne droite, et cela d'autant plus que le corps est plus éloigné de son point de satura-

tion, c'est-à-dire plus rapproché de l'état gazeux. Nous reviendrons à la fin du chapitre sur un essai d'interprétation théorique de ces faits. Qu'il suffise de dire une fois pour toutes que les relations linéaires par lesquelles nous traduisons nos courbes ne sont que des expressions plus ou moins approchées qui facilitent la comparaison des diverses séries de résultats. L'inspection des graphiques permettra de vérifier jusqu'à quel point elles se réalisent.

Si nous mettons sous la forme

$$V = a + bp$$

ces expressions linéaires du potentiel, voici comment nous déterminons *a* et *b* pour qu'il n'y ait pas d'arbitraire dans notre façon d'envisager les résultats : Nous assignons pour nos observations une limite d'erreur de 0,3 UES dans la détermination du potentiel, et de 1 millimètre dans l'évaluation de la pression, et nous utilisons pour calculer les constantes, tous les points relatifs aux basses pressions, qui, moyennant un déplacement inférieur à l'approximation indiquée, peuvent être fixés le long d'une droite. Les points qui présentent des écarts plus considérables, sont exceptionnels.

Les constantes *a* et *b* relatives à l'eau et aux alcools sont :

Vapeur	*a*	*b*
Eau	3,5	1,68
Alcool méthylique	4,7	1,7
Alcool éthylique	5,5	1,9
Alcool propylique	6	2,1
Alcool butylique	6,5	2,6
Alcool isopropylique	4,2	2,12
Alcool butylique secondaire	1,6	3,72
Alcool butylique tertiaire	0,8	4,16

Remarques. 1. Pour l'eau et les alcools homologues, *a* et *b* vont en croissant. Chaque fois donc que la molécule se complique par l'addition d'un chaînon CH_2 non seulement les potentiels disruptifs sont supérieurs, mais encore ils croissent plus rapidement avec la pression.

2. Les alcools isomères se comportent tout différemment. Tandis que *a* décroît, suivant que le radical hydroxyle est fixé au chaînon CH_2, CH, ou C, *b* augmente dans les mêmes proportions.

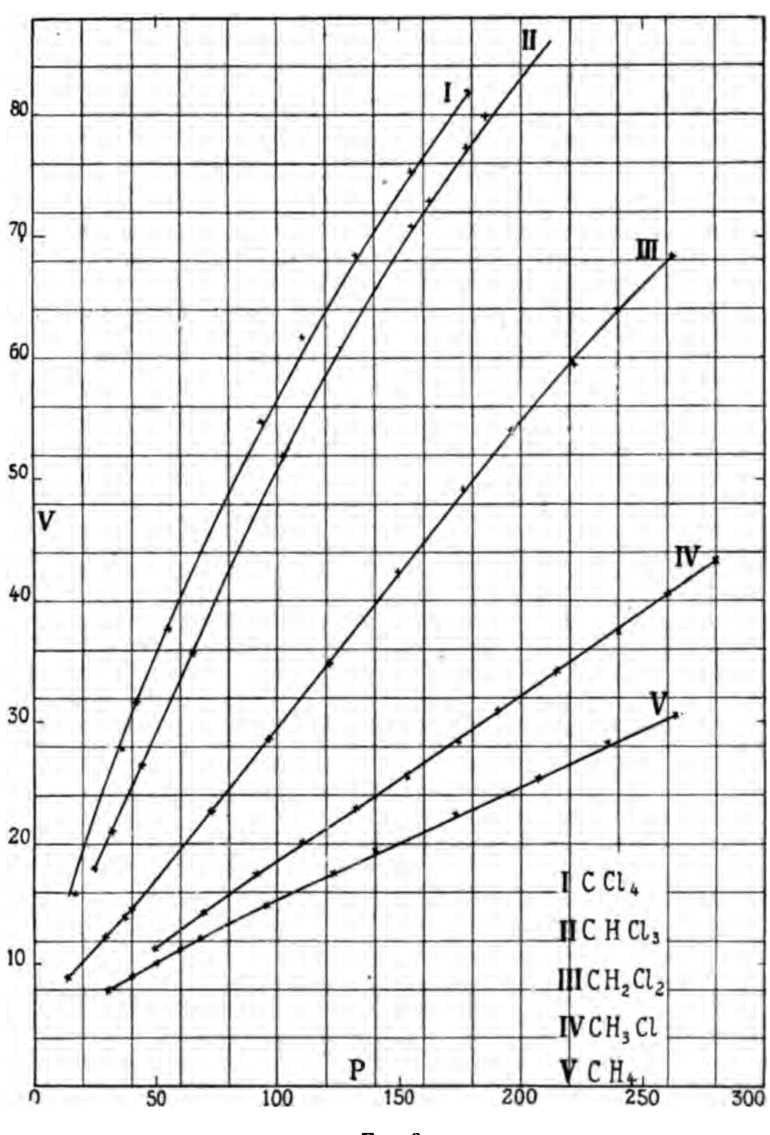

80
70
60
50
V
40
30
20
10
0
50
100
150
200
250
300
P
I
II
III
IV
V
I C Cl₄
II C H Cl₃
III C H₂ Cl₂
IV C H₃ Cl
V C H₄

Fig. 6

Dérivés chlorés du méthane (fig. 6)

Chlorure de méthyle $CH_3 — Cl$
bout à — 20°

p	V	p	V
49	11,3	190	31
70	14,5	215	34,2
91	17,6	240	37,7
110	20,2	260	40,5
132	23	280	43,4
153	25,5		
174	28,4		

Chlorure de méthylène CH_2Cl_2
f_{40} = 730 mm environ

p	V	p	V
14	9	121	34,8
29	12,2	150	42,4
36	14	177	49
40	14,8	196	54
50	17,5	222	59,4
72	22,8	240	63,7
97	28,7	262	68,4

Chloroforme $CHCl_3$
f_{40} = 369

p	V	p	V
25	18	155	70,9
32	21,1	163	73,1
44	26,5	178	77,5
65	35,8	185	80,1
102	52,1	212	86

Tétrachlorure de carbone CCl_4
f_{40} = 215

p	V	p	V
18	16,1	94	54,8
37	27,9	110	61,7
43	31,7	133	68,4
56	37,6	155	75,3
77	47,8	179	82

Les constantes *a* et *b*, déterminées comme ci-dessus, sont :

Vapeur	*a*	*b*
Méthane	5,7	0,96
Chlorure de méthyle	4,8	1,38
Chlorure de méthylène	5,4	2,43
Chloroforme	7,1	4,4
Tétrachlorure de carbone. . . .	7,4	5,5

Ces résultats montrent que chaque substitution successive d'un atome de chlore à un atome d'hydrogène augmente le potentiel explosif. On voit en effet que *a* et *b* vont en croissant. Il semble ressortir pourtant des chiffres relatifs au chloroforme que l'influence des substitutions successives sur l'augmentation du potentiel n'est pas constante.

Dérivés halogénés des hydrocarbures saturés

I. *Chlorures* (fig. 7)

Chlor. d'éthyle C_2H_5Cl bout à 12°5		*Chlor. de propyle* C_3H_7Cl f_{40} = environ 600 mm		*Chlor. de butyle* C_4H_9Cl bout à 78°		*Chlor. d'isopropyle* $CH_3 - CHCl - CH_3$ bout à 37°	
p	V	*p*	V	*p*	V	*p*	V
30	12,4	18	12	18	11,8	15	9,8
70	19	35	14	38	16,1	23	11,6
100	24,4	44	15,4	45	17,5	48	18,6
122	28,3	62	18,8	55	19,8	74	24,7
148	32,8	70	20,2	60	20,7	89	28,3
196	40,4	100	26	70	22,8	100	30,8
204	42	120	29,8	82	25,5	129	36,2
214	43,2	158	36,9	90	27,6	135	37,6
238	46,6	184	41,8	100	29,9	159	42,4
250	48,2	230	50,1	107	31,4	178	46,9
275	53,1	242	51,9	122	34	200	52,3

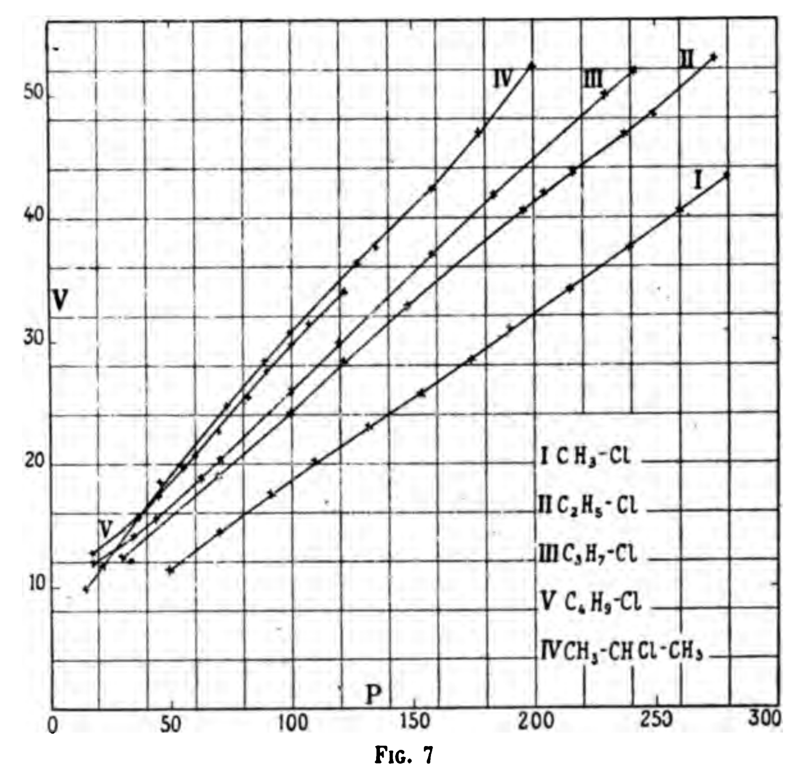


Fig. 7

II. *Bromures* (fig. 8)

Brom. de méthyle CH_3Br bout à 4°5		*Brom. d'éthyle* C_2H_5Br $f_{40} = 801$		*Brom. de propyle* C_3H_7Br bout à 71°		*Brom. d'isopropyle* $CH_3—CHBr—CH_3$ bout à 59°	
p	V	*p*	V	*p*	V	*p*	V
22	12,2	19	12	23	13,9	15	8,8
50	16,8	47	17	46	18,2	23	12,3
62	18,7	66	20,4	62	21,2	30	14,3
74	20,5	98	26,1	75	23,8	47	19,7
107	25,4	118	29,9	90	26,5	60	23,2
141	30,5	135	34,4	107	29,8	62	23,3
167	34,2	151	35,8	119	32,2	75	27,4
174	35,2	186	41,8	135	34,6	89	31,6
192	37,9	205	45,4			114	38,4
213	40,9	243	51,3			142	44,2
227	42,9					148	45,4
247	45,4					151	46,1
						160	48
						180	51,6

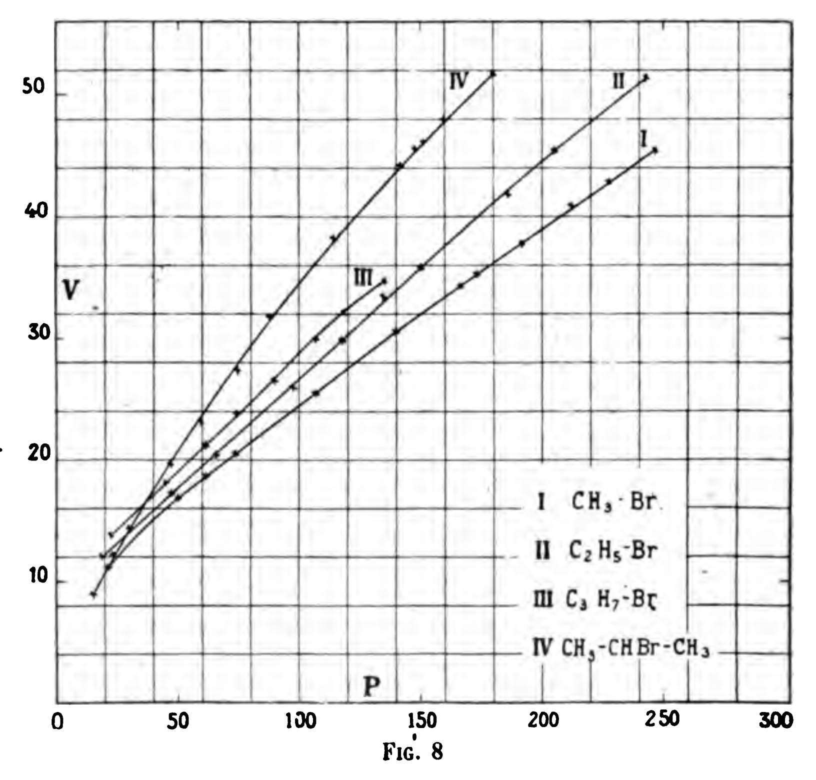


FIG. 8

III. *Iodures* (fig. 9)

Iodure de méthyle CH_3I bout à 44°		*Iodure d'éthyle* C_2H_5I $f_{40} = 251$		*Iodure de propyle* C_3H_7I bout à 102°		*Iodure d'isopropyle* $CH_3—CHI—CH_3$ bout à 90°	
p	V	*p*	V	*p*	V	*p*	V
34	13,7	25	13,4	17	13	16	11,8
51	17,5	48	17,9	25	14,8	25	16,3
61	20,5	62	20,9	30	16,6	30	18,8
86	25,9	80	25,8	35	18,4	31	19,1
100	29,8	105	32,5	42	21,2	36	24,5
111	32,4	110	33,8	49	22,8	45	27,6
152	42,8	124	38,2	51	23	52	30,8
190	50,5	159	46,6			69	34,8
		185	50,8				
		203	54,9				

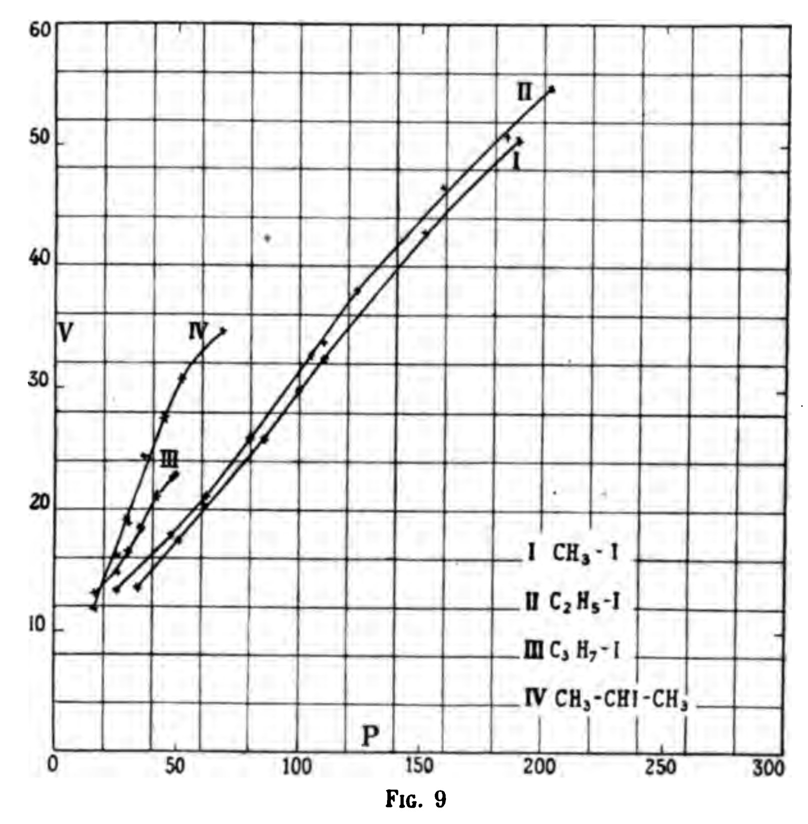


Fig. 9

Sauf pour les corps les moins volatils, les figures montrent que les courbes relatives à ces composés affectent une allure à peu près rectiligne. Nous n'attachons guère d'importance au relèvement de certaines courbes pour les petites pressions, car les erreurs possibles d'observations suffisent à les expliquer.

Les constantes *a* et *b* se trouvent réunies dans les tableaux suivants :

a	Chlorure	Bromure	Iodure
de méthyle	4,8	9,1	4,9
d'éthyle	7,4	8,6	4,6
de propyle	7,8	9,2	6,1
de butyle	7,8		
d'isopropyle	5,9	5,4	3,1

b	Chlorure	Bromure	Iodure
de méthyle	1,38	1,54	2,49
d'éthyle	1,68	1,79	2,69
de propyle	1,86	1,96	3,58
de butyle	2,2		
d'isopropyle	2,47	2,96	5,42

On remarquera que :

1° La constante *a* n'offre que peu de différences pour les composés homologues, mais que pour les isomères elle est toujours plus petite.

2° Que, sauf pour les termes les moins volatils (chlorure de butyle et iodure de propyle) la constante *b* subit à peu près le même accroissement sous l'influence de l'addition d'un chaînon CH_2.

3° Que l'allure de la courbe représentative de $V = f(p)$ est toute différente suivant que l'élément négatif est fixé à un chaînon CH_2 ou à un chaînon CH. Dans le second cas, *a* est plus petit, *b* est plus grand que dans le premier. Nous avons relevé un fait semblable en exposant les résultats relatifs aux alcools.

4° Que les potentiels sont les plus élevés pour les dérivés iodés, ensuite pour les dérivés bromés; et qu'ils sont les plus faibles pour les dérivés chlorés. Ils croissent donc avec le poids atomique de l'élément négatif, sauf cependant aux basses pressions pour les iodures.

Le parallélisme entre les poids moléculaires des composés analogues et le potentiel disruptif au delà de 20 millimètres de pression se vérifie assez bien en général. En voici un nouvel exemple pour les composés binaires du carbone.

Composés binaires du carbone (fig. 10)

Méthane (voir plus haut) — *Anhydride carbonique* (voir plus haut) — *Tétrachlorure de carbone* (voir plus haut)

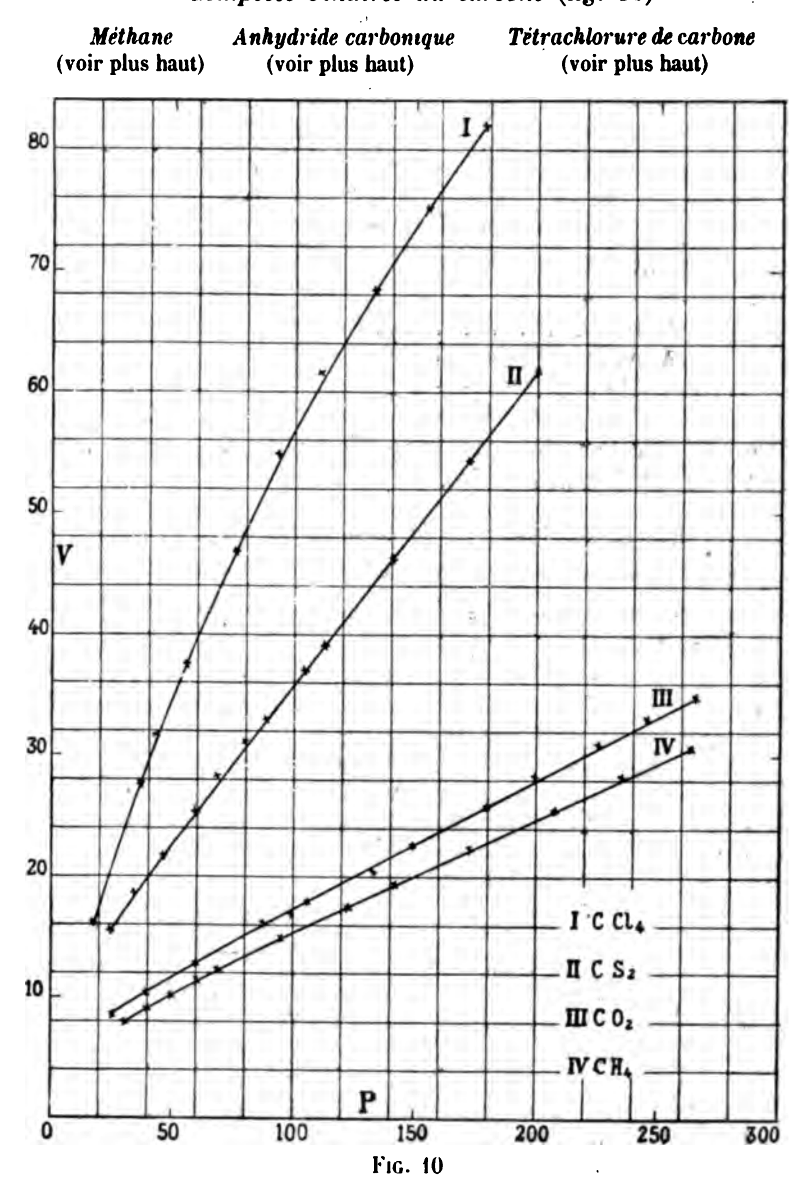


Fig. 10

Sulfure de carbone CS_2

$f_{40} = 617$ mm

p	V	p	V
25	15,5	88	33
34	18,6	104	37
46	21,7	113	38,9
60	25,2	141	46,5
68	28,5	172	54,2
80	31,1	200	61,6

Les constantes sont :

	a	b	P_m
Méthane	5,7	0,96	16
Anhydride carbonique .	6	1,11	44
Sulfure de carbone . .	9,6	2,62	76
Tétrachlorure de carbone	7,4	5,5	156

On voit que le facteur de proportionnalité de la pression (*b*) croît avec le poids moléculaire.

Éthers des acides de la série grasse (fig. 11)

Formiate de méthyle

$H - C <^{O}_{O\,CH_3}$

bout à 30°

p	V	p	V
28	10,6	160	34,7
40	13,5	195	40,4
87	22,7	236	46,4
96	24,4	241	47,1
101	25,3	260	50,4
134	31,1	289	55,8
143	32,1		

Acétate de méthyle

$CH_3 - C <^{O}_{O\,CH_3}$

$f_{40} = 400$ mm

p	V	p	V
25	12,4	145	34,9
45	16,8	147	35,1
55	18,9	170	38,2
77	21,2	205	44,4
94	26,6	223	47,1
99	27,4	225	47,3
113	29,8	245	49,8

Propionate de méthyle

$C_2H_5 - C <^{O}_{O\,CH_3}$

$f_{40} = 180$

p	V	p	V
17	12,3	97	31,4
37	16,9	104	32,5
45	19	115	35
63	23,4	137	37,7
73	25,1	144	38,5
83	28,5		

Formiate d'éthyle

$H - C <_{O\,C_2H_5}$

$f_{40} = 447$

p	V	p	V	p	V
10	7,9	84	23,3	170	37,9
27	11,9	117	29	194	41,5
40	14,5	128	30,8	213	44,1
60	18,9	145	33,8	230	47
79	22,4	157	36	248	49,1

Acétate d'éthyle

$CH_3 - C <^{O}_{O\,C_2H_5}$

$f_{40} = 186$

p	V	p	V
24	12,9	105	32,4
35	16,7	114	34
43	18	137	38,3
72	25,2	145	39,2
88	28,8	162	40,6

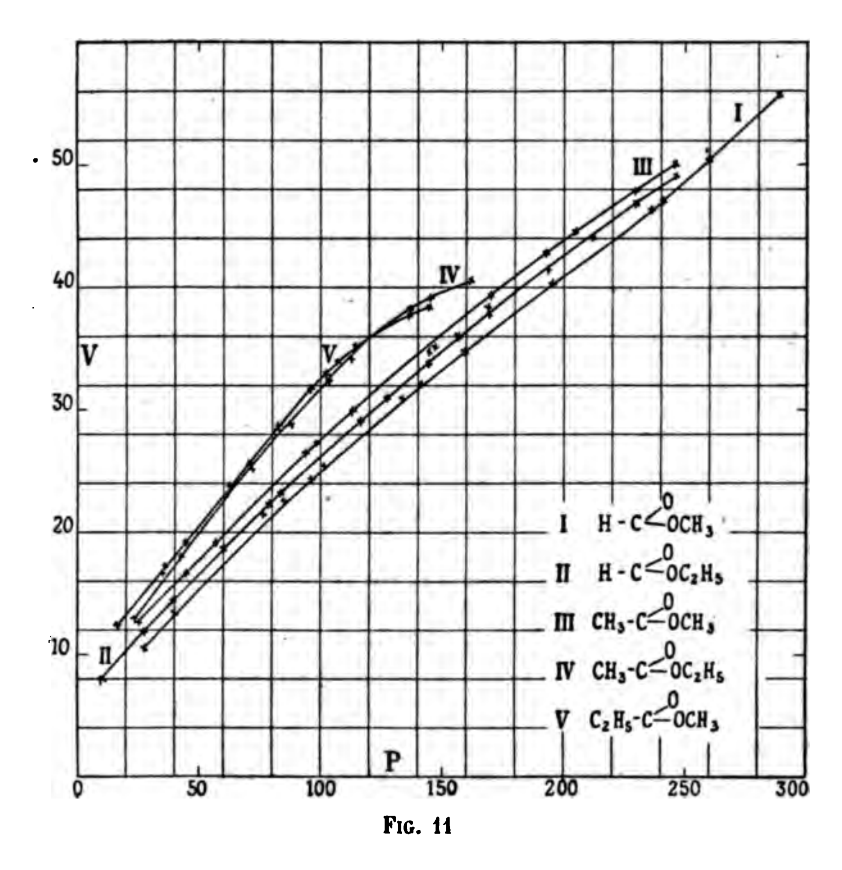


Fig. 11

Le tableau suivant renferme les constantes *a* et *b* déduites de ces résultats :

	a	*b*
Formiate de méthyle.	5,2	2
Acétate de méthyle	7,1	2,08
Propionate de méthyle	8,4	2,3
Formiate d'éthyle	6,2	2,04
Acétate d'éthyle	8,2	2,31

Ici, les potentiels de décharge dans les composés isomères diffèrent très peu, surtout pour l'acétate d'éthyle et le propionate de méthyle. Nous ferons remarquer ici (sans vouloir pourtant en tirer

aucune conclusion), que ces deux isomères, qui diffèrent le moin au point de vue du potentiel disruptif, sont précisément ceux qu diffèrent le moins quant à la volatilité. Enfin, on notera que l constante *a* est de nouveau croissante dans cette classe d composés.

Il est intéressant de constater la différence entre certains ca d'isomérie étudiés précédemment et celui-ci. Dans les premier l'isomérie introduisait une différence considérable sur la march du phénomène; ici, au contraire, son influence est à peu près null Voici deux autres cas d'isomérie différents des premiers.

Cas d'isomérie (fig. 12)

I

Acétone				*Aldéhyde propylique*				*Alcool allylique*			
$CH_3 - CO - CH_3$				$C_2H_5 - CHO$				$CH_2 = CH - CH_2OH$			
$f_{40} = 420$				bout à 49°,5				bout à 97°			
p	V	*p*	V	*p*	V	*p*	V	*p*	V	*p*	V
22	8,8	119	28,1	17 effl.	7,9	137	31,6	17 effl.	5,3	32	12,4
39	11,6	145	31,9	.. ét.	9,5	146	32,9	.. ét.	7,5	34	13,1
55	15,5	163	35,3	36	13	149	33,3	22	9,8	40	14
61	16,7	176	37	56	17,2	176	37,8	24	10,3	46	15
75	19,9	191	39	70	20	200	41,4	31	11,9		
94	23,4	220	43,2	94	24,8	228	45				
111	26,7	247	45,4	104	26	265	50,2				
				120	29,1						

Les constantes *a* et *b* sont :

	a	*b*
Acétone	4,3	2,03
Aldéhyde propylique	6	1,98
Alcool allylique	4,8	2,3

L'inspection des diagrammes montre que les potentiels disrup tifs, relatifs à ces trois corps, sont très peu différents.

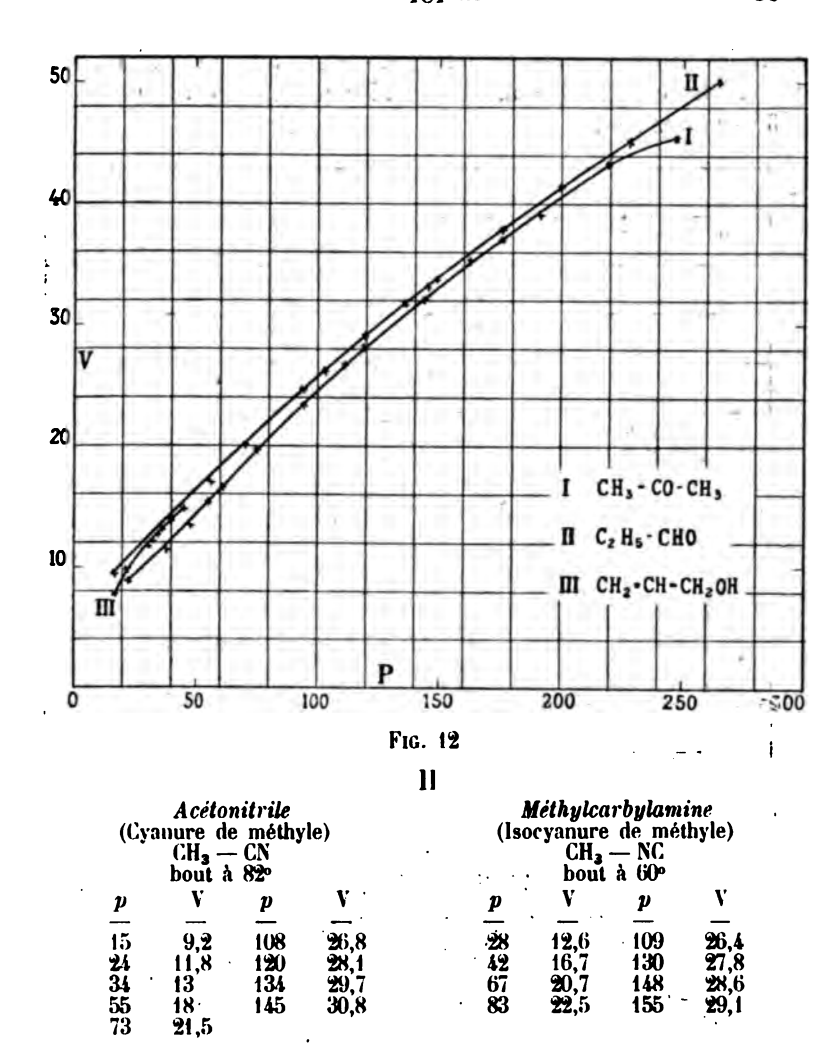


Fig. 12

II

Acétonitrile (Cyanure de méthyle) $CH_3 — CN$ bout à 82°				*Méthylcarbylamine* (Isocyanure de méthyle) $CH_3 — NC$ bout à 60°			
p	V	*p*	V	*p*	V	*p*	V
15	9,2	108	26,8	28	12,6	109	26,4
24	11,8	120	28,1	42	16,7	130	27,8
34	13	134	29,7	67	20,7	148	28,6
55	18	145	30,8	83	22,5	155	29,1
73	21,5						

Les mesures relatives au méthylcarbylamine ont été fort irrégulières, aussi a-t-il fallu se borner à l'emploi de l'électromètre. Chaque résultat est la moyenne de douze à quatorze observations. De plus, les électrodes étaient recouvertes d'un sel verdâtre à la fin de l'expérience. La courbe, que nous n'avons pas tracée, a une forte tendance vers l'horizontalité. Pour les faibles pressions, c'est-à-dire

pour les mesures faites au début, elle a une allure régulière. Les potentiels de décharge dans ces deux isomères semblent également différer assez peu.

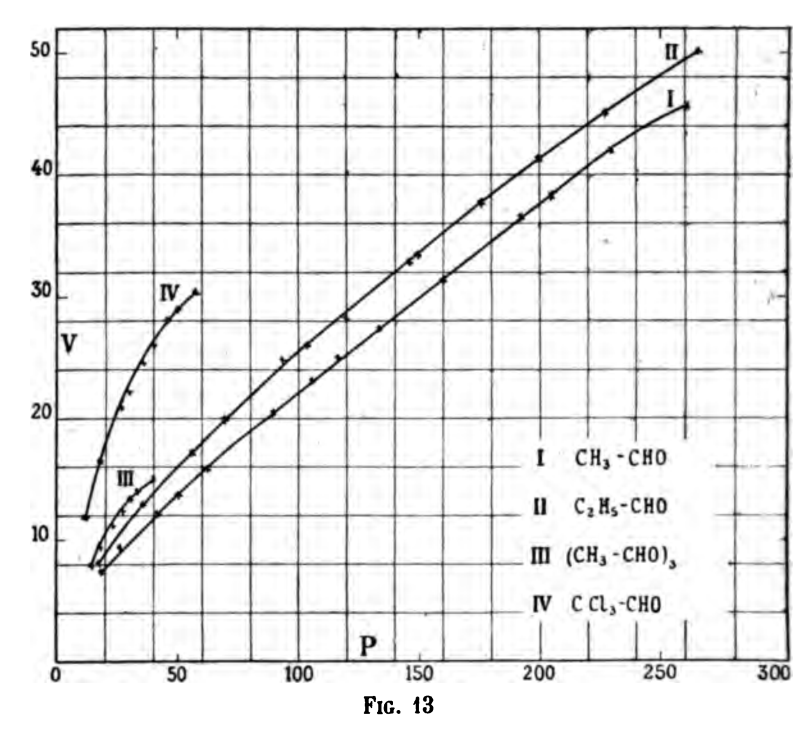


Fig. 13

Aldéhydes (fig. 13)

Aldéhyde propylique (voir plus haut)

Aldéhyde acétique

$CH_3 - CHO$
Bout à 20°

p	V	p	V
18	7,4	117	24,9
26	9,4	133	27,4
42	12,3	160	31,4
50	13,7	192	36,5
61	15,8	205	38,3
75	18,1	230	42,1
90	20,5	261	45,6
105	23,1		

Paraldéhyde

$(CH_3 - CHO)_3$
bout à 123°

p	V	p	V
15	7,8	30	13,3
18	9,4	33	14
23	11,1	41	14,9
27	12,4		

Chloral
(aldéhyde acétique trichloré)

$CCl_3 - CHO$
bout à 98°

p	V	p	V
12	11,8	36	24,6
18	16,6	40	26,1
23	19,2	46	28
27	20,9	50	29
30	22,2	58	30,4

Si l'on exprime par une équation linéaire la partie qui se rapproche le plus de la ligne droite des courbes respectives, on trouve pour constantes

	a	*b*
	—	—
Aldéhyde acétique	5	1,73
Aldéhyde propylique	6	1,98
Paraldéhyde	3,4	3,36
Chloral	7,6	4,88

Le paraldéhyde est le seul polymère sur lequel nous ayons expérimenté ; les potentiels disruptifs n'y sont pas beaucoup plus élevés que dans l'aldéhyde acétique, mais ils croissent beaucoup plus rapidement avec la pression. Les résultats relatifs au chloral montrent (comme ceux relatifs au chloroforme) l'influence considérable qu'exerce sur le potentiel disruptif la substitution de trois atomes de chlore à trois atomes d'hydrogène. Les résultats suivants, comparés à ceux qu'on a trouvés pour l'acétone (voir plus haut) font ressortir aussi l'influence d'une substitution d'un atome de chlore à un atome d'hydrogène.

Chloracétone (fig. 14)

$CH_3 — CO — CH_2Cl$

bout à 119°

p	V	*p*	V
—	—	—	—
5 effluve	5,8	18	12,4
10	8,2	20	12,8
12	10	22	13,4
16	11,2	28	14,8

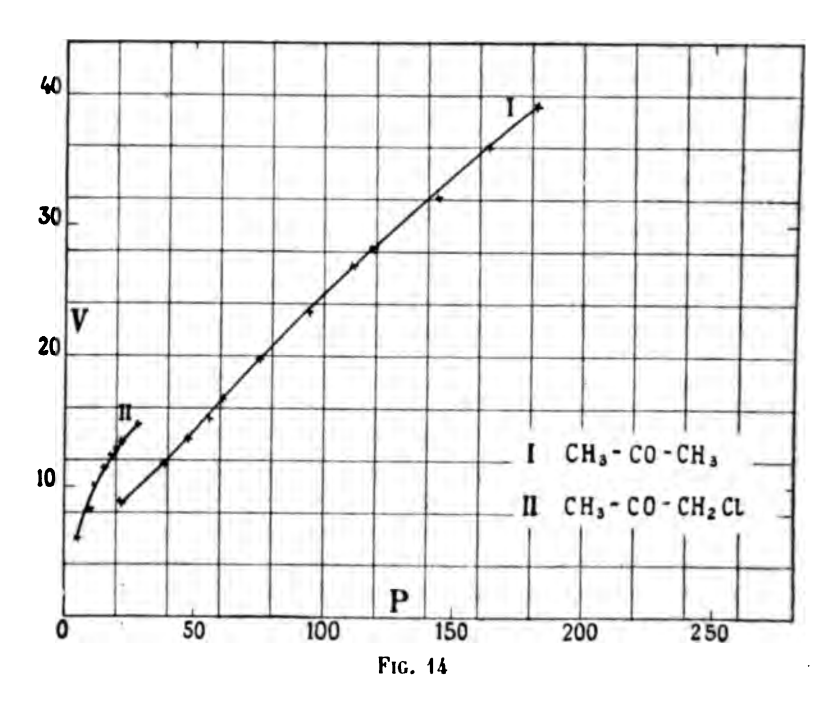


Fig. 14

Éthylamines (fig. 15)

Éthylamine $C_2H_5 - NH_2$ bout à 19°				*Diéthylamine* $(C_2H_5)_2 - NH$ bout à 57°5				*Triéthylamine* $(C_2H_5)_3 - N$ bout à 89°5			
p	V	*p*	V	*p*	V	*p*	V	*p*	V	*p*	V
33	11,2	145	27,3	30	10	128	27,5	25	10	85	22,6
65	16	199	34,6	60	15,8	145	29,7	39	13,3	129	30,5
79	18,8	233	38,8	65	16,1	194	36	50	15,6		
104	21,9	250	40,3	85	20,3			54	16,3		
130	26,5	275	44,1	108	24,3			69	20		

Pour ces corps, les mesures ont été fort irrégulières; aussi chaque résultat est-il la moyenne de dix ou douze observations. Ces composés (ainsi que l'ammoniaque) sont les seuls pour lesquels le potentiel correspondant à la première étincelle ait été constamment et sensiblement supérieur aux potentiels disruptifs des sui-

vantes. Enfin, les éthylamines ont présenté cette particularité que la pression diminuait au cours des mesures, d'abord vite, puis len-

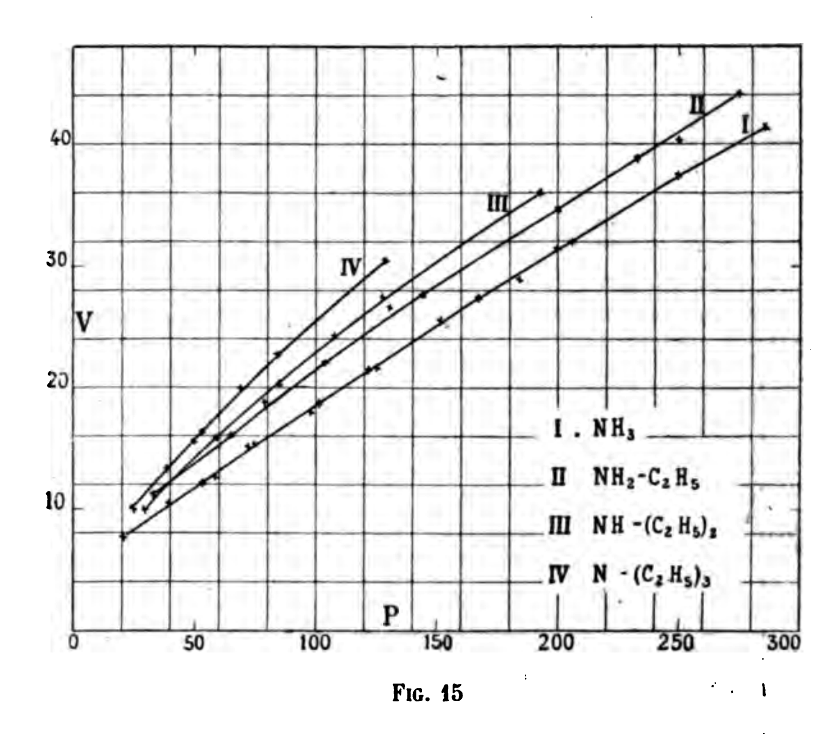


FIG. 15

tement. Ainsi, pour l'éthylamine, en faisant la lecture du manomètre à des intervalles réguliers, nous avons remarqué des variations comme celles-ci par exemple :

132, 129, 128; 256, 254, 253, 252.

Nous avons pris la moyenne des pressions pour chaque observation.

Malgré ces anomalies, les courbes représentatives de la $f(p)$ sont régulières, et la substitution successive d'un chaînon C_2H_5 à un atome d'H modifie les potentiels explosifs de façon aussi régulière comme le montre le diagramme.

Dérivés nitreux des hydrocarbures (fig. 16)

Nitrométhane $CH_3 - NO_2$ bout à 101°				Nitroéthane $C_2H_5 - NO_2$ bout à 114°	
p	V	p	V	p	V
10	11,2	34	20,9	7	12
15	14,9	37	22,8	10	14,1
18	13,4	46	25,3	13	15,8
24	18,5	56	26,5	17	17,3
28	19,5			24	18,8

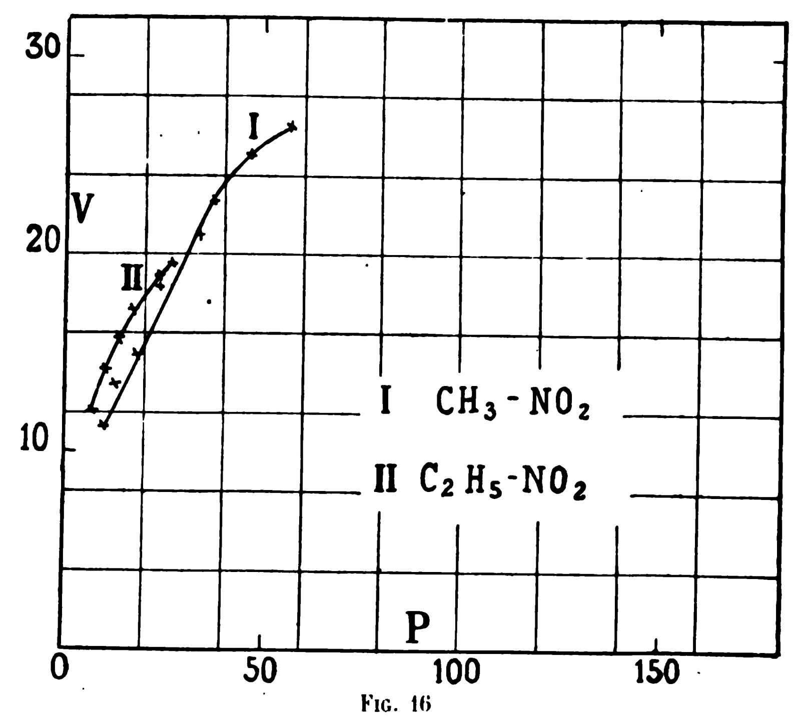


Fig. 16

La partie de ces courbes que l'on peut considérer comme linéaire est assez réduite, la détermination des constantes comporte par suite plus de latitude. On peut voir pourtant que les valeurs sui-

vantes de *a* et de *b* vérifient très bien les résultats relatifs aux faibles pressions.

	a	b
Nitrométhane	6,6	4,6
Nitroéthane	7,1	6,9

L'addition d'un chaînon CH_2 exerce ici une influence considérable sur la constante *b*. Nous avons relevé une particularité analogue pour d'autres composés peu volatils.

Composés de la série aromatique (fig. 17)

Benzine C_6H_6 $f_{40} = 180$				Benzine monochlorée C_6H_5Cl		Toluène $C_6H_5 - CH_3$ $f_{40} = 62$			
p	V	p	V	p	V	p	V	p	V
20	15	97	34	5	12	11	7,6	30	16,8
37	19,6	105	35,9	8	13,4	19	10,3	33,5	18,2
48	22,2	118	38,6	12	15,2	21,5	12,4	40	19,3
50	22,4	127	41,3	16	16,4	23	13,8	46	20,6
69	27,2	138	42,4	25	18,2	26,5	15,4	50	21,2
78	29,5	147	45						
85	31	163	47,6						
88	31,4	167	47,8						

Les constantes sont :

	a	b
Benzine	10	2,5
Benzine monochlorée . . .	9,7	4,6
Toluène	0,5	5

La benzine monochlorée se comporte normalement vis-à-vis de la benzine, mais le toluène a des potentiels disruptifs inférieurs à ceux de la benzine. Y aurait-il là une anomalie propre à la série aromatique ? Des recherches dans cette voie ne manqueraient peut-être pas d'intérêt.

Il nous reste à grouper les faits épars signalés dans ce chapitre et à en tirer les conclusions qu'ils comportent :

1. Les courbes représentatives du potentiel en fonction de la pression ne sont pas rectilignes comme dans le cas des gaz simples. En général, pourtant, pour les corps les plus volatils, comme NH_3, CS_2, CH_2, CL_2..., etc., elles sont sensiblement rectilignes loin du point de saturation. Même pour les corps peu volatils, une petite partie de la courbe s'exprime approximativement par une relation

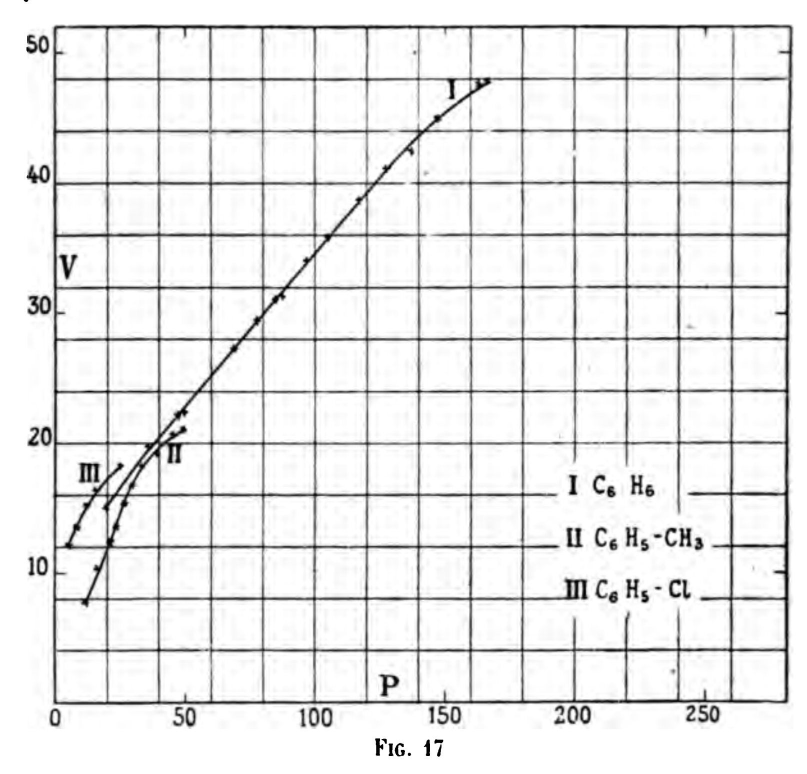


Fig. 17

linéaire. Près du point de saturation, au contraire, le potentiel croît moins rapidement; les courbes ont alors une allure parabolique et semblent avoir une tangente parallèle à l'axe des pressions au point de saturation. Ce dernier point suscite la question de savoir si l'état liquide offre une continuité avec l'état gazeux au point de vue du potentiel de décharge. La solution de ce problème nécessite un dispositif plus spécial, et nous l'entreprendrons peut-être un jour.

Comment expliquer l'allure parabolique des courbes? MM. Guye (ouvrage cité), étudiant l'oxygène, l'hydrogène et l'azote à de très fortes pressions, ont constaté pour ces corps un phénomène analogue. Ils ne l'expliquent guère, mais semblent le rattacher aux anomalies de la compressibilité au voisinage de la pression critique; c'est ainsi que pour l'azote, ils notent un léger relèvement

de la courbe à partir du maximum de compressibilité. Mais rien ne prouve que cette concomitance entre les deux phénomènes implique un lien de causalité. Bien plus, il semblerait plutôt que l'augmentation de compressibilité des vapeurs près du point de saturation dût provoquer un accroissement plus rapide du potentiel de décharge. S'il est prouvé, en effet, que le potentiel disruptif est fonction de la densité de la vapeur (et, nous l'avons dit, la loi de Paschen et les travaux de M. Bouty sur la cohésion diélectrique semblent justifier cette hypothèse), et que, de plus, cette fonction est sensiblement linéaire, il faut que le potentiel croisse plus rapidement lorsque la densité elle-même croît plus vite, ce qui est le cas quand la compressibilité augmente.

Nous sommes donc conduits à supposer que, lorsque la compressibilité augmente, il se produit un autre phénomène, qui facilite la décharge, au lieu de la rendre plus difficile. Cette cause nous paraît être la suivante : La compressibilité augmente parce que, près du point de saturation, des molécules de plus en plus nombreuses se réunissent pour former des édifices moléculaires complexes. On conçoit que ces agrégats de molécules soient peu stables et se brisent sous la moindre influence mécanique. Supposons qu'un ensemble pareil soit frappé par un ion en mouvement il va se briser, et du fait même de cette rupture il va se former plus d'ions qu'il n'y en aurait eu si l'ion primitif avait choqué une molécule isolée. L'ionisation se fera donc plus énergiquement, et par suite le potentiel de décharge sera moins élevé.

2. Il existe certaines relations entre le potentiel disruptif et la nature des corps. La complexité du phénomène ne permet pas de préciser ces relations au point de vue quantitatif, mais on peut poser avec certitude les règles suivantes :

1° Pour les corps de constitution analogue il existe un parallélisme constant entre le poids moléculaire et le potentiel disruptif, à partir de pressions de 2 centimètres de mercure environ. Toutes les séries de corps observés confirment cette assertion (*). Le Toluène et les composés isomères seuls font exception.

(*) Il faut, bien entendu, que les corps soient « comparables ». Ainsi, on peut comparer le chlorure de méthyle au chlorure d'éthyle, ou un chlorure au bromure correspondant. Mais nous n'entendons pas du tout comparer, par exemple, le chlorure de butyle au bromure de méthyle.

2° Le coefficient de la pression dans la relation linéaire qui exprime approximativement les phénomènes, est influencé d'une façon très régulière par l'addition d'un chaînon CH_2 à la molécule. Pour les termes les plus volatils des séries homologues, cette influence est petite et sensiblement constante. Pour les termes peu volatils cette influence est plus considérable, et elle l'est d'autant plus que le coefficient *b* est plus grand.

Nous allons montrer par quelques exemples la vérification de cette règle. Elle est très satisfaisante, eu égard à l'approximation nécessairement grossière avec laquelle on détermine *b*.

Alcool méthylique . . .	1,7	différence	0,20
» éthylique . . .	1,9		
» propylique . .	2,1	»	0,20
Chlorure de méthyle . .	1,38	»	0,30
» d'éthyle . . .	1,68		
» de propyle . .	1,86	»	0,18
Bromure de méthyle . .	1,54	»	0,25
» d'éthyle . . .	1,79		
» de propyle . .	1,96	»	0,17
Iodure de méthyle. . .	2,49		
» d'éthyle. . . .	2,69	»	0,20
Acétate de méthyle . .	2,08		
» d'éthyle . . .	2,31	»	0,23
Aldéhyde acétique. . .	1,73		
» propionique .	1,98	»	0,25

Voici maintenant quelques termes moins volatils :

Alcool propylique . . .	2,1	Différence	0,5
» butylique . . .	2,6		
Chlorure de propyle . .	1,86	»	0,34
» de butyle . .	2,2		
Iodure d'éthyle. . . .	2,69	»	0,89
» de propyle. . .	3,58		
Nitrométhane	4,6	»	2,3
Nitroéthane	6,9		

Les seules exceptions que nous avons rencontrées sont :

Eau	1,68	Différence	0,02
Alcool méthylique . . .	1,7		
Formiate de méthyle . .	2	»	0,04
» d'éthyle . . .	2,04		
Benzine	2,5	»	2,5
Toluène	5		

On remarquera que l'eau se comporte autrement que les autres corps pour beaucoup de phénomènes physiques, et que la benzine et le toluène appartiennent à la série aromatique, alors que tous les autres corps étudiés appartiennent à la série grasse.

3° Nos résultats mentionnent, au point de vue du potentiel disruptif, deux genres d'isomérie. Le premier n'a pas d'influence sur le potentiel de décharge; nous l'avons observé pour quelques éthers de la série grasse, pour l'acétone, l'aldéhyde propionique et l'alcool allylique, et pour le cyanure et l'isocyanure de méthyle. Le second a, au contraire, une grande influence sur l'allure des courbes représentatives; nous l'avons remarqué chaque fois qu'un élément négatif était fixé au chaînon CH_2 pour un des deux corps, au chaînon CH ou C pour l'autre;

4° Enfin, beaucoup d'autres faits déjà signalés (régularité dans la distribution des courbes relatives aux éthylamines, influence de trois atomes de Cl dans le chloroforme et le chloral, d'un atome dans la chloracétone, la benzine monochlorée..., etc.) révèlent des liens étroits entre la nature des corps et le potentiel disruptif.

Remarquons que le caractère fonctionnel du corps, aussi bien que la complexité de la molécule, joue un rôle au point de vue du potentiel disruptif. Il suffit, en effet, de comparer les diagrammes pour voir que les alcools, les éthers, les aldéhydes, les amines, les corps aromatiques se comportent tout différemment. Ceci s'explique aisément, de quelque manière que l'on interprète les phénomènes de décharge dans les gaz. En particulier, si l'on admet la théorie de l'ionisation par le choc, et la conductibilité électrique au moyen d'ions électrons, on doit admettre que la structure de l'édifice moléculaire n'est pas indifférente au point de vue de l'ionisation. Quant à savoir pourquoi une molécule bâtie de telle ou telle façon s'ionise plus facilement dans certaines conditions de pression, plus difficilement dans d'autres, c'est une question qui ne sera résolue que lorsqu'on aura mieux pénétré la nature intime de la molécule et le mécanisme de l'ionisation. Qu'il nous suffise d'avoir signalé le fait, qui, nous semble-t-il, ne manque pas d'importance.

3. Nous avons examiné la question de savoir si le potentiel de décharge est en raison inverse du chemin libre moyen des molécules, ou du moins si la quantité *b* est inversement proportionnelle

à ce chemin libre moyen. Aucune de ces deux hypothèses ne s'est trouvée vérifiée. Tout au plus peut-on dire que dans les composés analogues, le potentiel de décharge croît quand le chemin libre moyen diminue, encore cette règle souffre-t-elle bien des exceptions. Il faut tenir compte cependant de ce que le chemin libre moyen des molécules est lui-même difficile à déterminer, et que les auteurs donnent des résultats absolument différents. Nous citons, par exemple, d'après M. Landolt (*), les résultats donnés par deux physiciens au sujet des alcools à 0° :

	Winkelmann	Stendel
Alcool méthylique	361	501
» éthylique	259	416
» propylique	203	334
» butylique	164	282

On remarquera que ces chiffres sont très différents, et ne sont pas même proportionnels.

Nous ne pensons donc pas qu'on puisse tirer aucune conclusion, ni affirmative, ni négative au sujet de cette question.

IV

Influence de la distance explosive sur le potentiel disruptif

Nous avons opéré sur trois distances différentes, et trouvé que même pour les composés complexes, et près du point de saturation, à un même produit *pd* correspond un potentiel de décharge constant. Les mesures suivantes sont toutes relatives à une température de 40°.

Hexane C_6H_{14}
$f_{40} = 281$ mm

$d = 1$ cm				$d = 0,6$ cm				$d = 0,3$ cm			
p	V	*p*	V	*p*	V	*p*	V	*p*	V	*p*	V
22	11,5	92	32,4	37	11,9	182	35,6	31	6,5	200	24,7
30	14,2	105	34,7	51	14,7	200	38,9	70	11,6	215	25,8
38	16,9	131	41	73	19,2	225	41,6	81	12,9	226	26,9
44	18,9	152	45,6	95	24	244	45	108	14,9	237	27,9
57	23,8			122	28	265	47,5	151	19,2	259	28,9
79	28,8			164	33,6			187	23,7		

(*) Landolt, *Physico chemische Tabellen*, 1906.

Acétate d'Éthyle

$d = 1$ cm

p	V	p	V
24	12,9	105	32,4
35	16,7	114	34
43	18,1	137	38,3
72	25,2	145	39,2
88	28,8	162	40,6

$d = 0,6$ cm

p	V	p	V
38	12,3	106	24,4
44	13,7	126	26,6
59	16,4	161	31,2
74	18,9		
86	21		

$d = 0,3$ cm

p	V	p	V
28	6,4	120	16,5
41	7,9	132	18,1
53	9,4	141	19
62	10,7	158	20
84	13,6	167	21,4
100	14,6		

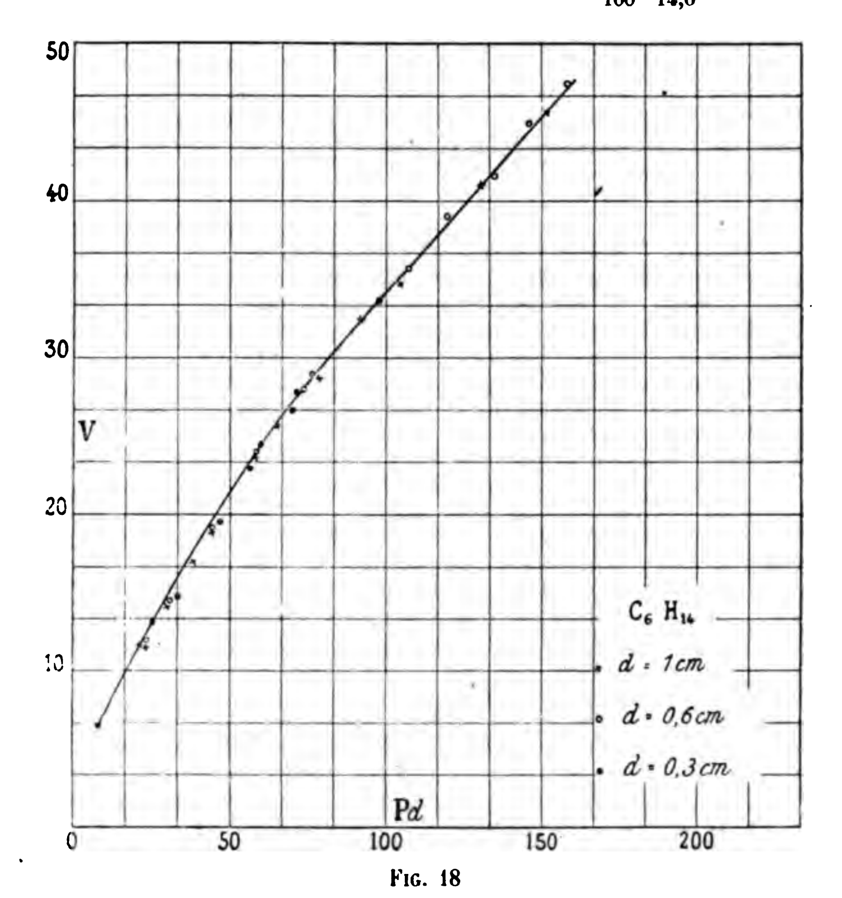


Fig. 18

Chloroforme

$d = 1$ cm				$d = 0,6$ cm				$d = 0,3$ cm			
p	V	*p*	V	*p*	V	*p*	V	*p*	V	*p*	V
25	18	163	73,1	25	13	112	36,9	28	10,8	109	20,6
32	21,1	178	77,5	36	14,3	125	38,5	52	13,1	131	22,5
43	26,5	185	80,1	38	15	145	44,2	63	13,4	166	27,8
63	35,8	208	86	46	19,2	150	46,2	70	14,4	205	33,4
100	52,1			64	22,2	167	52,3	81	15,3	240	37,5
155	70,9			80	27,2			94	19,1		

L'inspection de la figure 18, relative à l'Hexane montre que la loi de Paschen est observée. Les tableaux suivants font aussi ressortir l'égalité des potentiels disruptifs pour un même produit *pd* :

Chloroforme				*Hexane*				*Acétate d'Éthyle*			
pd	$d=1$	$d=0,6$	$d=0,3$	*pd*	$d=1$	$d=0,6$	$d=0,3$	*pd*	$d=1$	$d=0,6$	$d=0,3$
20	15	13,9	13,7	20	10,9	11,1	11	20	11,6	11,8	11,3
40	24,6	22,8	22,9	40	17,6	17,7	17,8	40	17,6	17,6	18,3
60	33,5	32,8	33,1	60	25	24,8	24,7	60	22,4	23,4	
80	42,2	42	41,9	80	29,4	29,3	29,5	80	27	27,4	
100	52,1	52	52 ?	100	33,8	33,8		100	31,3	31,5	
				120	38,5	38,9					
				140	43	43					

Ces valeurs sont obtenues par interpolation (une seule est extrapolée, aussi est-elle plus douteuse); les erreurs commises ne peuvent guère dépasser les erreurs commises sur les valeurs directement observées.

Il importe de noter que l'observation de la loi de Paschen ne saurait être rigoureuse dans le cas présent, puisque le champ électrique n'était pas homogène. Nous dirons donc pour parler plus exactement, que les écarts possibles de cette loi ne dépassent pas les limites des erreurs d'observations.

V

Influence de la température sur le potentiel de décharge

On a peu étudié jusqu'ici l'influence de la température sur le potentiel de décharge, même dans les gaz parfaits. M. Baille (*) a effectué quelques mesures sur l'air, pour déterminer cette influence. D'après lui, le potentiel disruptif serait inversement proportionnel, non à $1 + \alpha t$ mais au carré de ce binôme, par conséquent aussi au carré de la température absolue T.

Plus tard, M. Bouty (article cité) a recherché l'influence de la température sur la cohésion diélectrique. Nous avons dit que, d'après ces travaux, on peut considérer le potentiel disruptif comme fonction de $\frac{pd}{T}$. Pour qu'on saisisse bien la portée exacte de cette affirmation, il ne sera pas inutile de rappeler en quelques mots ce que M. Bouty appelle cohésion diélectrique, et comment il étudie l'influence de la température sur cette propriété des corps.

L'auteur appelle « cohésion diélectrique » une qualité du gaz mesurée par le champ (la chute de potentiel par centimètre) nécessaire pour la décharge électrique au travers du gaz. Il mesure ce champ en observant le passage de l'effluve au travers d'un ballon plat qui contient le gaz et qui est placé entre les deux armatures planes d'un condensateur. Aux pressions auxquelles a opéré M. Bouty (et qui n'excèdent pas 10 centimètres pour les gaz simples, et 2 centimètres pour les vapeurs), il trouve que cette cohésion diélectrique s'exprime très bien par

$$y = a\sqrt{p(p+b)} + \frac{c}{p} + \frac{d}{p^2}\cdot$$

Les derniers termes de cette formule disparaissent pour des pres-

(*) Baille, Annales de physique et de chimie, 5 t. 29, pp. 187 et suiv., 1883.

sions un peu élevées, et le premier représente une hyperbole dont les points tendent rapidement vers l'asymptote

$$y = A + bp.$$

b est une constante caractéristique du corps étudié (*).

En comparant ses résultats relatifs à la cohésion diélectrique aux potentiels explosifs mesurés par d'autres physiciens, l'auteur constate que la constante b diffère peu, tandis que la constante A est d'un ordre tout à fait différent. Cette conclusion (qui, remarquons-le bien, n'est vérifiée jusqu'ici que pour quelques gaz simples) nous a conduit à étendre (après MM. Guye [**]) la généralisation de la loi de Paschen aux potentiels explosifs, alors qu'en réalité elle n'a été démontrée directement que pour la cohésion diélectrique.

Voici comment M. Bouty opère pour étudier cette influence de la température : Il introduit dans son récipient un volume déterminé de gaz; il ferme alors le récipient, et en élève la température. La pression croît, mais la densité du gaz ne varie pas. Or, l'auteur constate que la cohésion diélectrique ne change guère. D'où il conclut avec raison qu'elle est en fonction de la densité du gaz, c'est-à-dire qu'elle doit varier en raison inverse de la température absolue T.

Il résulte de tout ceci que cette loi demande une confirmation directe pour les potentiels explosifs. Nous l'avons donc examinée dans les gaz simples avant d'en entreprendre la vérification dans les composés plus complexes.

Nous n'avons pas opéré sur des quantités constantes de gaz, mais le récipient étant chauffé à une température déterminée, nous avons introduit successivement une quantité de gaz, de façon à augmenter chaque fois la pression. La comparaison des séries relatives aux diverses températures nous a permis de tirer ensuite les conclusions que nous allons faire connaître.

(*) Si l'on veut se renseigner plus complètement sur cette question intéressante, on peut consulter les articles suivants de M. Bouty : COMPTES RENDUS, 131, pp. 459 et 503, 1900; — JOURNAL DE PHYSIQUE : juin 1903, p. 401 ; janvier 1904, p. 12; juillet 1904, p. 489; août 1904, p. 593; mai 1905, p. 317; avril 1906, p. 229.

(**) COMPTES RENDUS du congrès de Liége, 1905; ouvrage déjà cité.

1. Gaz simples. Pour ces corps, nous avons dit déjà que le potentiel est très sensiblement fonction linéaire de la pression

$$V = a + bp.$$

Si la loi de Paschen généralisée $V = f\frac{pd}{T}$ se réalise on aura

$$V = \alpha + \beta \frac{pd}{T}$$

où $\alpha = a$, $\beta = \frac{bT}{d}$, ces constantes étant indépendantes de la température. Comme toutes nos mesures portent sur une distance $d = 1$, il faut en définitive que bT et a soient constants, quelle que soit la température observée.

Si l'on se reporte maintenant aux constantes a et b déterminées pour l'air et l'hydrogène à 15° et à 40°, on constate qu'il en est effectivement ainsi :

	Air			*Hydrogène*	
T	a	bT	T	a	bT
288	3,2	303,2	288	3,6	204,48
313	3	319,4	313	3,4	212.84

La légère divergence entre les produits bT provient de ce qu'il faudrait à la constante b une troisième décimale, qu'on n'aurait pu déterminer avec exactitude. On peut constater que si, comme le pense M. Baille, on introduisait le facteur T^2 au lieu de T ces chiffres différeraient davantage.

2. Composés complexes. On ne peut plus rigoureusement suivre la même méthode, puisque les relations ne sont plus linéaires. Nous continuerons cependant à les considérer comme à peu près linéaires aux basses pressions. Dans ces conditions, la méthode précédente s'applique encore.

Alcool méthylique

$t = 40°$		$t = 30°$		$t = 20°$		$t = 15°$	
$f_{40} = 253$ mm		$f_{30} = 150$ mm		$f_{20} = 89$ mm		$f_{15} = 66$ mm	
p	V	p	V	p	V	p	V
10	6,4	15	8,1	16	9,4	13	8,6
15	7,4	27	10,4	22	10,8	16	9,6
26	9,4	40	13	29	12,4	18	10,2
36	11	61	17,4	33	13,3	22	11,2
54	14	65	17,9	42	15,1	34	14,8
68	16	79	20,1	53	16,9	42	16,3
90	18,8	96	23,3	57	17,6	50	17,2
96	19,6	112	25,3	63	18,5	54	17,9
114	22,4	131	27	70	19,4	64	19
136	25	142	27,8	76	20,5		
165	28,4			84	21,4		
200	31,2						
211	31,8						

Le tableau suivant donne les valeurs des constantes a, b, et du produit bT.

T	a	b	bT
313	4,7	1,7	532
303	5	2	606
293	5,2	2,48	736
288	5	2,81	809

La constante a varié peu d'après les températures, mais le produit bT offre des différences considérables. Il est à remarquer, qu'à mesure qu'on élève la température, ces différences diminuent, ce qui fait supposer que la loi de Paschen généralisée est observée à de hautes températures, pour lesquelles d'ailleurs on s'approche de l'état gazeux.

Les résultats relatifs à la vapeur d'eau et au chloroforme confirment les précédents.

Vapeur d'eau

$t = 40°$ $f_{40} = 55$				$t = 50°$ $f_{50} = 89$			
p	V	p	V	p	V	p	V
7	4,5	36	9,5	9	5,2	60	11,4
11	5,2	39	10,1	19	6,4	63	11,6
15	6,1	44	10,4	28	7,7	65	11,7
20	7	46	10,7	43	9,4	70	11,9
30	8,4	49	10,9	57	11,2	75	12,2
						80	12,4

on a pour les constantes :

T	a	b	bT
323	4,1	1,25	404
313	3,5	1,68	526

Chloroforme

$t = 40°$ $f_{40} = 359$				$t = 16°$ $f_{16} = 140$			
p	V	p	V	p	V	p	V
25	18	155	70,9	22	16,5	92	52,1
32	21,1	163	73,1	34	22,4	107	56,9
44	26,5	178	77,5	47	29	124	61,7
65	35,8	185	80,1	65	35,9		
102	52,1	212	86	74	41		

les constantes sont :

T	a	b	bT
313	7,1	4,4	1377
289	6,2	4,73	1366

Ici, la constante *a* offre une notable différence ; le produit *b*T au contraire est très sensiblement le même. On ne peut donc tirer de conclusion, d'autant plus que pour le chloroforme la détermination de la constante *b* offre assez bien de latitude, parce que les points observés sont très espacés.

Éther éthylique $(C_2H_5)_2O$ (fig. 19)

$t = 40°$				$t = 26°$ $f_{26} = 536$				$t = 16°$ $f_{16} = 376$			
p	V	p	V	p	V	p	V	p	V	p	V
13	9,4	153	33,5	16	10,1	121	27,9	22	11,2	109	26,4
22	11,1	176	38	28	12,2	139	31,2	35	13,4	120	29,1
30	12,6	197	39	32	12,9	156	34,8	47	15,8	144	34,2
35	13,6	215	41,6	52	16,4	182	37,6	52	16,9	172	37
55	17,1	229	43,7	61	17,8	205	41,8	66	19	198	40,8
75	20,9	235	44,5	74	20	231	45,8	81	21,7	240	46,6
92	23,5	245	46,1	90	23,3	269	49,7	93	23,8	279	51,4
112	26,4	260	47,8	102	25,2	285	52,8	100	24,8		
139	30,7	285	50,7								

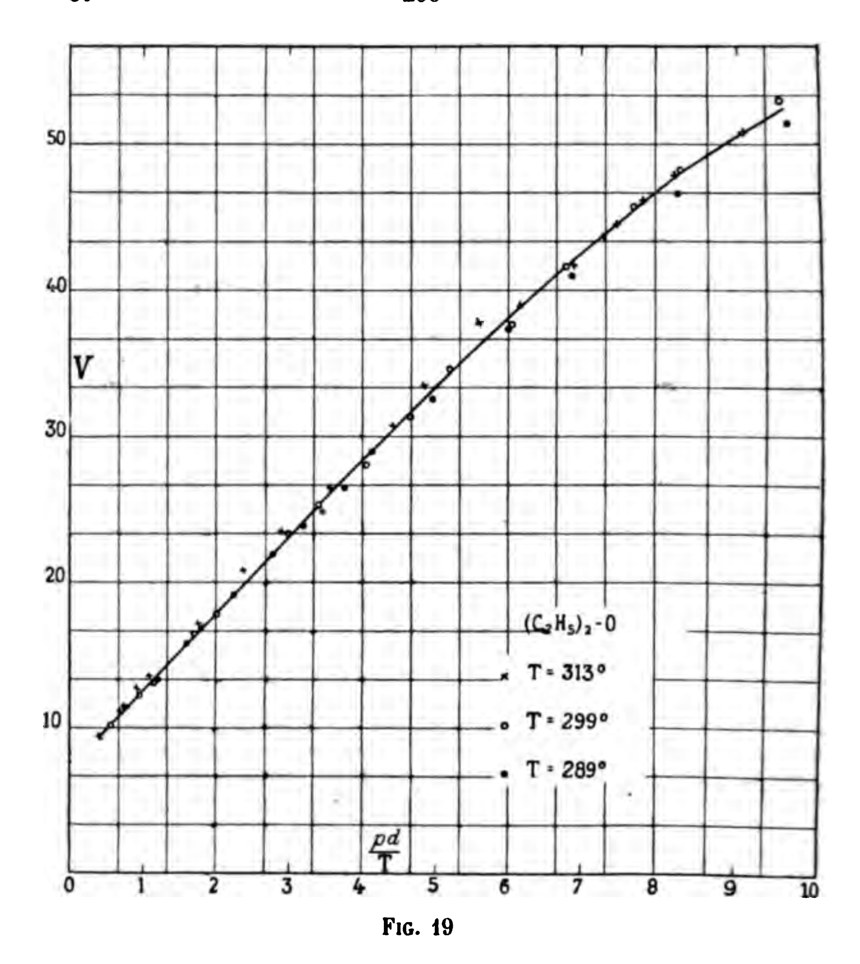


Fig. 19

Ces mesures, très nombreuses, ont permis de déterminer les constantes avec plus de précision que dans les cas précédents.

T	*a*	*b*	*b*T
313	7,4	1,7	532
299	7,25	1,75	523
289	7,2	1,78	513

On voit que dans le cas de l'éther, qui est plus volatil que les autres corps étudiés, le potentiel est très sensiblement fonction de $\frac{pd}{T}$.

Quand on s'approche du point de saturation, les relations linéaires ne s'appliquent plus du tout, et il faut recourir à d'autres moyens pour déterminer l'influence de la température. Pour l'alcool méthylique, l'eau et le chloroforme, la loi de Paschen généralisée ne s'applique pas au point de saturation puisqu'elle n'est pas même vérifiée à des pressions inférieures. Dans le cas de l'éther, on peut voir par la figure 19 que les écarts des valeurs observées vis-à-vis de cette loi deviennent plus considérables à mesure que l'on accroît la pression pour une température déterminée.

Il eût été intéressant d'examiner le mode de variation du potentiel disruptif, si en accroissant successivement la température on maintenait la saturation de la vapeur, en tenant ouvert le robinet qui fait communiquer le récipient d'expérience avec le réservoir à liquide. Nos expériences à ce sujet n'ont guère réussi, car la vapeur saturée se déposait en buée sur les parois de la cloche et les rendaient conductrices, de sorte qu'il a été impossible d'élever le potentiel des électrodes.

VI

Comparaison entre les potentiels disruptifs et la cohésion diélectrique

Nous avons déjà rappelé quelles sont, d'après M. Bouty (*), les relations entre les potentiels explosifs et la cohésion diélectrique. Il est intéressant d'examiner si les différences et les analogies constatées pour les gaz simples, se poursuivent quand il s'agit de composés plus complexes. Quelques résultats de M. Bouty relatifs à certains corps sur lesquels nous avons opéré nous-mêmes permettront de répondre à cette question.

(*) Bouty, Comptes Rendus, 131, p. 469, 1900.
Bouty, Comptes Rendus, 131, p. 503, 1900.

Le tableau suivant met en regard nos résultats et ceux de M. Bouty (le potentiel étant exprimé en volts). Pour les distinguer, nous marquons d'un accent les constantes qui se déduisent de nos mesures :

	a	a'	b	b'	$\frac{b}{b'}$
Eau	333	1050	500	504	1
Alcool méthylique.	375	1410	616	510	1,2
Alcool éthylique	364	1650	800	570	1,4
Éther.	360	2220	1000	590	1,96
Formiate de méthyle. . . .	364	1560	1020	600	1,7
Acétone	355	1290	1100	609	1,8
Formiate d'éthyle	360	1860	1110	612	1,81
Acétate de méthyle	369	2130	1250	624	2
Bisulfure de carbone. . . .	330	2880	1510	786	1,93
Benzine	377	3000	1670	750	2,20
Toluène	380	150	1610	1500	1,09

Ce tableau comparatif nous suggère les remarques suivantes :

1° Le terme indépendant de la pression *(a)* diffère très fort dans les deux séries d'expériences. M. Bouty lui-même, en comparant ses mesures à celles de M. Wolf (*) relativement à l'air hydrogène et l'anhydride carbonique, constate une divergence qui est du même ordre de grandeur. Il l'attribue à la différence des électrodes, de verre dans ses expériences, de métal dans celles de M. Wolf. M. J.-J. Thomson (**) au contraire en donne l'explication suivante : Le potentiel de décharge étant fonction linéaire de la pression, et fonction d'autre part du produit pd, s'exprime par

$$V = A + Bpd.$$

D'où, la chute de potentiel par centimètre, que mesure M. Bouty, aura pour expression

$$F = \frac{A}{d} + Bp$$

et comme d'une part, M. Wolf a opéré à 1 millimètre de distance,

(*) Ann. der Phys. und Chemie, 37, p. 306, 1889.

(**) J. J. Thomson, *ouvrage cité*, p. 373.

et que M. Bouty opère à des distances beaucoup plus grandes, il faut nécessairement que $\frac{A}{d}$ soit plus grand chez le premier que chez le second. Nous n'admettons pas cette seconde explication comme suffisante puisque nos expériences, relatives à une distance de 10 millimètres, donnent les mêmes divergences. La première explication nous paraît meilleure; il semble cependant que non seulement la nature des électrodes, mais aussi la nature des corps, exerce une influence, puisque pour la cohésion diélectrique la constante a est à peu près la même pour tous les corps, tandis que lorsqu'il s'agit du potentiel de décharge disruptive, cette constante varie avec les substances étudiées.

2° Tandis que pour les gaz parfaits (sauf pour l'anhydride carbonique), la constante b était à peu près la même, pour les deux ordres de phénomènes, dans le cas des gaz complexes, cette constante diffère notablement. Cette différence s'explique d'ailleurs très bien : D'abord, nous avons opéré à 40°, tandis que M. Bouty a opéré à des températures variant de 22° à 30°. Or, on a vu plus haut que, pour les composés complexes que nous étudions, l'influence de la température sur le coefficient b peut être très considérable. Ensuite, comme les courbes $V = f(p)$ ne sont pas en réalité des droites, mais bien des courbes d'allure parabolique, dont la concavité est tournée vers l'axe des pressions, la constante b sera d'autant plus grande que les points qui servent à la déterminer sont relatifs à des pressions plus petites. Cette circonstance est d'ailleurs aussi de nature à agir sur la constante a, et à la rapprocher des valeurs calculées par M. Bouty.

3° Malgré ces divergences on observe entre b et b', un parallélisme qui prouve que la cohésion diélectrique et le potentiel explosif offrent entre eux des liens très étroits. En effet, b et b' croissent en même temps, et le rapport $\frac{b}{b'}$ croît aussi de façon très régulière. Il n'y a d'exception bien marquée que pour l'éther et le toluène, mais on peut noter que pour ces corps, l'écart de la constante a corrige en quelque sorte celui de la constante b, parce qu'il se fait en sens inverse. De plus, il est à propos du toluène un fait digne de remarque, c'est que les potentiels de décharge dans cette vapeur sont plus petits que les potentiels de décharge dans

la benzine, aussi bien d'après les expériences de M. Bouty que d'après les nôtres. Nous avons déjà dit plus haut que ce fait constitue une anomalie, puisque le toluène a un poids moléculaire plus élevé que la benzine.

Nous croyons pouvoir conclure de tout ceci que : la cohésion diélectrique et le potentiel disruptif sont deux aspects différents d'un même phénomène, et non deux phénomènes distincts.

RÉSUMÉ

I. Dans une première partie nous avons fait connaître nos méthodes de mesures et démontré que l'emploi de l'électromètre n'est guère plus précis que celui d'un micromètre de comparaison. Ce dernier procédé est moins expéditif, mais il présente certains avantages; notamment, il nous a permis d'apporter une contribution à ce qu'on appelle « la question du potentiel statique et dynamique ».

II. La deuxième partie contient les résultats de nombreuses mesures effectuées dans les vapeurs. Ces résultats se résument comme suit :

1. Influence de la nature du corps sur le potentiel disruptif. — 1° Les courbes représentatives du potentiel ne sont plus des droites (comme dans le cas des gaz simples), mais des courbes à peu près paraboliques, concaves vers l'axe des pressions : leur allure tend à devenir rectiligne à mesure que l'on s'éloigne du point de saturation.

2° L'influence de la nature des corps ressort de plusieurs faits dont voici les principaux :

a) Pour les composés analogues il existe un parallélisme constant entre le poids moléculaire du corps et les potentiels disruptifs.

b) L'addition d'un chaînon CH_2 agit de façon très régulière sur la marche du potentiel.

c) La substitution successive d'éléments ou de radicaux négatifs aux atomes d'hydrogène dans NH_3, CH_4, etc. exerce une action aussi régulière.

d) L'isomérie des corps intervient de façon caractéristique dans les phénomènes.

e) Les composés de la série aromatique semblent se comporter différemment de ceux de la série grasse.

2. Influence de la distance explosive. — Pour les vapeurs comme pour les gaz, la loi de Paschen, qui a pour expression

$$V = f(pd)$$

est vérifiée, même près du point de saturation.

3. Influence de la température. — Tandis que dans les gaz simples, le potentiel est en fonction inverse de la température, et s'exprime par

$$V = f\left(\frac{pd}{T}\right)$$

il n'en est plus de même dans les vapeurs. Pourtant, à mesure qu'on élève la température, c'est-à-dire qu'on s'approche de l'état gazeux, cette loi se vérifie de mieux en mieux.

4. Relations entre la cohésion diélectrique et le potentiel explosif. — Les résultats sont plus divergents pour les vapeurs que pour les gaz simples. Ces divergences s'expliquent par la nature des électrodes, par les conditions différentes de pression et de température, et par la complexité même des composés. Le parallélisme qui existe néanmoins entre les deux séries de résultats prouve que le potentiel disruptif et la cohésion diélectrique sont un même phénomène envisagé sous des aspects différents.

Ces recherches ont été effectuées au laboratoire de physique de l'Université de Louvain.

Notre savant maître, M. le professeur de Hemptinne, nous a prodigué, au cours de nos recherches, ses encouragements et les conseils de son expérience, avec une bienveillance et un dévouement auxquels nous tenons à rendre hommage. Qu'il nous soit permis de lui en exprimer ici notre profonde gratitude.

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE

DES

HUILES DE FOIE DE POISSON

ÉTUDE DE CHIMIE BIOLOGIQUE (*)

PAR

le Dr M. HENSEVAL et J. HUWART

Nous avons commencé l'étude des huiles de foie de poisson il y a six ans. Différentes personnes du monde de la pêche maritime s'étaient enquises de savoir s'il serait possible de faire de l'huile avec les foies des cabillauds qui sont rapportés, en grande quantité, par les bateaux de pêche d'Ostende. Les uns vont pêcher ce poisson en Islande; ce sont des chalutiers qui restent en mer deux ou trois semaines et parfois plus. Les pêcheurs ont l'habitude de vider le poisson et de jeter les foies à la mer; parfois ils les conservent dans des tonneaux. D'autres bateaux, des chalutiers ou des chaloupes, pêchent le cabillaud dans la mer du Nord. Ils restent en mer cinq ou six jours. Les poissons qui sont pêchés pendant les premiers jours de la croisière sont éventrés et leurs entrailles, y compris le foie, sont jetées par dessus bord comme cela se fait en Islande; mais ceux qui ont été capturés la veille et le jour de la

---

(*) Mémoire présenté au concours de la Société scientifique de Bruxelles en réponse à la question : *Nouvelles recherches biologiques sur les huiles de poisson* (troisième section), et couronné par la Société.

rentrée sont conservés comme tels et c'est à leur arrivée au port qu'ils sont vidés. Il y a quelques années, les foies de cabillauds n'avaient aucune valeur à Ostende. Quelques-uns étaient vendus pour être mangés; parfois ils servaient à faire quelques litres d'huile de foie de morue; les autres étaient jetés. Aujourd'hui, il y a deux fabriques d'huile de foie de morue et les foies se vendent 15 à 20 francs les 100 kilogrammes, parfois davantage.

Lorsque nous avons entrepris cette étude, en 1900, notre intention était, non seulement d'étudier un procédé rationnel de préparation de l'huile de foie de morue, mais de faire une étude scientifique de la question sous ses différents aspects. Malheureusement, nos recherches ont été interrompues par des circonstances imprévues et nous n'avons pu exécuter notre programme dans son entier; nous avons dû nous limiter. Quoi qu'il en soit, nous avons pensé que nos premiers résultats avaient suffisamment d'intérêt pour être publiés; nous espérons que l'un de nous pourra les compléter dans la suite. Le présent travail est donc une première étude que nous publions sur les huiles de foie de poisson. Il comporte la description de la méthode rationnelle de préparation de ces huiles, la description de huit huiles dont six sont nouvelles, du moins à notre connaissance. En outre, il renferme certaines données sur l'analyse des huiles, sur le contrôle de leur préparation et sur leur valeur thérapeutique.

LA PRÉPARATION DE L'HUILE DE FOIE DE MORUE ET D'AUTRES POISSONS

Anciennement, on fabriquait l'huile de foie de morue de la façon suivante : Les foies, recueillis sans soins, étaient entassés dans des tonneaux où ils séjournaient parfois pendant plusieurs mois; ils y étaient l'objet de fermentations multiples et complexes qui les désorganisaient et mettaient l'huile en liberté. Celle-ci était ensuite séparée des détritus de foies. Ce procédé donnait un produit brun-noir infect, d'un goût nauséabond. C'est ainsi que l'on fabriquait autrefois l'huile de foie de morue à Terre-Neuve, en Norvège et en Islande. Aujourd'hui l'huile de foie de morue se fait plus rationnellement, surtout en Norvège, mais plus de la

moitié de la production actuelle est encore fabriquée par l'ancien procédé.

Il est inutile d'insister sur les inconvénients de ce mode de préparation, étant données nos connaissances actuelles. Les médecins ont contribué beaucoup à maintenir la fabrication de l'huile de foie de morue par le procédé de putréfaction; sur la foi des travaux de A. Gautier et L. Mourgues, ils attribuaient les vertus thérapeutiques de cette huile en grande partie aux alcaloïdes qu'elle renfermait et qui se formaient pendant les processus de putréfaction.

Les pêcheurs d'Ostende ont une originale façon de préparer l'huile de foie de morue. Ils découpent les foies en morceaux; ils les introduisent dans un estomac de poisson qu'ils suspendent par une extrémité. L'huile en sort peu à peu et, après huit ou quinze jours, ils la décantent. Elle a joui pendant longtemps d'une grande réputation à Ostende et dans les régions voisines du littoral belge.

Déjà, en 1850, les Danois et les Norvégiens ont amélioré considérablement la préparation de l'huile de foie de morue de façon à obtenir un produit qui n'avait plus rien de repoussant; mais cette huile était peu employée à cause des idées en cours; les médecins mettaient en doute sa valeur thérapeutique. Ce n'est guère que vers 1890 qu'elle est entrée dans la pratique. Son emploi rencontre d'ailleurs encore beaucoup d'opposition. Quoi qu'il en soit, actuellement on extrait généralement l'huile de foie de morue en soumettant les foies frais au chauffage à la vapeur. Nous exposerons plus loin le procédé qui nous a donné les meilleurs résultats.

Au début de nos recherches, nous avions cherché à décolorer l'huile de foie de morue, à lui enlever son mauvais goût et sa rancidité; nous avions obtenu certains résultats; mais, dans la suite, nous avons acquis la conviction qu'il valait mieux préparer l'huile dans les meilleures conditions que de lui faire subir toute espèce de traitements physiques et chimiques. Nous nous sommes laissés guider par les idées suivantes. L'huile de foie de morue est une substance très altérable : elle s'altère par les fermentations et par l'oxydation surtout sous l'action de la chaleur et même de la lumière; elle renferme, en effet, beaucoup de glycérides non saturés, ce qui nous est révélé par son indice d'iode élevé; en

outre, elle contient des groupements qui se modifient facilement. Il importe donc de la soustraire à ces agents.

Après de nombreuses expériences de toute nature, nous nous sommes arrêtés au procédé que nous décrivons ci-après; il n'offre rien de bien spécial et il tient toute sa valeur de sa simplicité.

Les foies de cabillauds sont débarrassés de leur vésicule biliaire et de toutes les parties étrangères, puis ils sont lavés à l'eau pour enlever les impuretés dont ils peuvent avoir été souillés, sang, bile, etc. Ils sont placés dans une cuve avec un cinquième de leur volume d'eau. On injecte dans la masse de la vapeur à basse pression (un quart d'atmosphère) en ayant soin de remuer. Sous cette action, la température s'élève progressivement pour atteindre, après quarante minutes, 70 à 75°. Les foies se désagrègent en mettant l'huile en liberté. On laisse reposer pendant une demi-heure et on enlève celle qui surnage et qui représente plus des trois quarts de la quantité totale; les foies épuisés sont pressés pour en extraire les dernières parties (*). Elle est mise ensuite dans un appareil à décanter où on la lave deux ou trois fois avec de l'eau à 50°. La décantation se fait de façon à enlever jusqu'à la dernière goutte d'eau, ce qui est facile; puis on la met dans des récipients bien remplis et hermétiquement fermés que l'on dépose au frais, de préférence dans une glacière. La stéarine (**) cristallise et se dépose. Après quelques mois, on filtre et l'huile est conservée dans des récipients remplis et étanches.

On peut préparer ainsi toutes les huiles de foie de poisson.

C'est de cette façon que l'on a obtenu les échantillons qui ont servi à cette étude.

La préparation de l'huile de foie de morue peut être réalisée industriellement par ce procédé et il est facile d'imaginer un dispositif convenable. Les deux usines d'Ostende ont été établies d'après ces données. Naturellement, dans la préparation industrielle, il faut tenir compte des contingences de la pratique.

(*) L'huile obtenue par pression est de qualité moindre ; on la traite à part.

(**) Nous employons ici le terme « stéarine » pour désigner la substance qui se dépose dans les huiles de foie de poisson par le repos au froid, sans préjuger de sa nature chimique, car il est probable que ce n'est pas de la vraie stéarine.

OBSERVATIONS
A PROPOS DES MÉTHODES D'ANALYSE DES HUILES

Les méthodes d'analyse des huiles étant très variables, il importe d'indiquer celles qui ont été suivies dans ce travail.

La *densité* a été déterminée au picnomètre et l'*indice de réfraction* à l'aide du réfractomètre d'Abbe-Zeiss.

L'*indice thermosulfurique* a été obtenu par la méthode de Tortelli (*). Le dispositif comporte un vase à double paroi dont l'intervalle est vide d'air et un thermomètre à ailettes. On verse dans le vase 20 centimètres cubes d'huile et on prend la température. On laisse tomber sur l'huile 5 centimètres cubes d'acide sulfurique de densité 1,8413. Durant ce temps, on agite avec le thermomètre aussi longtemps que la température monte; elle reste stationnaire au point maximum environ deux minutes. L'indice thermique correspond à la différence entre la température initiale et le point maximum atteint.

L'*indice d'acide* est le résultat de la titration de 5 à 6 grammes d'huile, additionnée de 50 centimètres cubes d'alcool neutre à 50°, avec une solution décinormale de KOH; il est exprimé en milligrammes de KOH pour 1 gramme d'huile.

L'*indice de saponification* a été déterminé de la façon suivante. 1 à 2 grammes d'huile sont additionnés de 25 centimètres cubes d'une solution alcoolique demi-normale de KOH et chauffés à l'ébullition au réfrigérant ascendant pendant trente minutes. On fait la même opération à blanc. On titre avec une solution décinormale de HCl en présence de phénophtaléine. La différence entre les deux titrages donne, par calcul, la quantité de KOH uni aux acides gras de l'huile.

La différence entre l'indice de saponification et l'indice d'acide donne l'*indice d'éther*.

L'*indice d'acide gras fixe* est déterminé par la méthode bien connue de Hehner (**). Les huiles de foie de poisson ne renfer-

---

(*) Tortelli, *Moniteur scientifique* du Dr Quesneville. 1905.

(**) Il est utile de noter ici que les acides gras obtenus par la méthode de Hehner renferment aussi les matières insaponifiables, ou au moins en renferment une grande partie.

ment généralement que peu d'acides gras volatils; nous n'avons trouvé qu'une exception : l'huile de *squalus borealis* en contient une quantité notable qui va jusqu'à donner *un indice Reichert-Meissl de 39,5* (méthode ordinaire). Les autres huiles ont un indice variant de 3 à 5.

Les indices d'iode, qui ont une si grande importance pour la caractérisation des huiles, ont été déterminés par la méthode de Hübl. On a mélangé la solution d'iode avec celle de bichlorure de mercure, vingt-quatre heures avant l'emploi, afin d'éviter les variations de titre. On a opéré sur 0 gr. 3 à 0 gr. 4 d'huile et on a laissé en contact pendant six heures, à la lumière diffuse, avant de titrer l'excès d'iode par la solution d'hyposulfite. On a fait de nombreuses modifications au procédé de Hübl, mais c'est cette méthode qui nous a donné les meilleurs résultats (*). On sait que ces indices ne sont comparables que pour autant qu'ils ont été obtenus par la même méthode.

Nous avons fait quelques constatations intéressantes au sujet de la détermination de l'indice d'iode dans les huiles de poisson.

De l'huile d'esprot, fraîchement préparée, nous donne un indice d'iode de 154,6; six mois plus tard, il est de 144,6 et, après un an, de 138,6. L'indice d'iode est donc un caractère très variable dans les huiles de poisson. Jorissen et Hairs (**) avaient déjà fait cette observation pour l'huile de foie de morue.

Nous avons préféré faire la détermination de l'indice d'iode sur l'huile même que sur les acides gras pour la raison suivante. Les acides gras d'une huile d'esprot, séchés dans le vide à basse température, donnent un indice d'iode de 161,9; séchés à l'étuve à 100° pendant 10 heures, ils donnent 146,8. Les acides gras des huiles de poisson subissent donc de fortes altérations pendant leur préparation. Il en résulte que seul l'indice d'iode des huiles a de la valeur.

Nous avons déterminé avec soin *les indices d'acétyle,* qui présentent, à notre avis, beaucoup d'intérêt pour l'étude des huiles de poisson. Ils indiquent leur teneur en groupes hydroxyles (OH) et par conséquent ils servent de mesure de leur teneur en oxyacides

---

(*) Leewkowitsch, *Analysis of oils, fats and waxes.* London.
(**) Jorissen et Hairs, JOURNAL DE PHARMACIE DE LIÉGE, III, 2, février 1896.

et en alcools, ainsi qu'il résulte des travaux de Benedict (*) et de Leewkowitsch.

Cette opération est basée sur l'action de l'anhydride acétique sur les groupements hydroxylés dont l'atome d'hydrogène est remplacé par le groupement acétyle (CH_3CO). Nous avons employé la méthode de Leewkowitsch. On chauffe à l'ébullition 10 grammes environ d'huile avec un égal volume d'anhydride acétique; on lave le produit acétylé à l'eau chaude jusqu'à cessation de réaction acide; on le sèche à l'étuve à 100° en le faisant passer plusieurs fois sur un filtre sec. Pour déterminer la quantité d'acide acétique fixée par l'huile, on en saponifie 2 à 4 grammes; on le met en liberté par addition d'acide sulfurique $n/10$ en léger excès et on distille par un courant de vapeur de manière à recueillir 600 à 700 centimètres cubes de distillat que l'on titre en présence de phénolphtaléine. On en déduit les acides volatils de l'huile en les déterminant de la même façon. L'indice d'acétyle exprime le nombre de milligrammes de KOH nécessaire pour neutraliser l'acide acétique fixé sur 1 gramme d'huile. Ce procédé évite la formation des anhydrides internes.

Nous avons pensé qu'il y avait un grand intérêt à étudier la teneur des huiles de foie de poisson en groupements hydroxyles, car, d'après les travaux de Leewkowitsch, les corps gras exposés à l'air ou rancis ont un indice d'acétyle plus élevé qu'à l'état frais; comme les huiles sont souvent mal préparées ou altérées, nos chiffres permettront la comparaison.

On sait que *le dosage des matières insaponifiables* de certaines huiles présente beaucoup de difficultés; cela provient, en grande partie, de ce que, dans les méthodes par extraction à l'aide de dissolvants, ceux-ci entraînent souvent des savons; de sorte que les matières insaponifiables renferment presque toujours des cendres. Nous avons cherché à éviter cet écueil et nous avons dosé ces substances par une méthode étudiée par nous. Nous saponifions 5 grammes d'huile avec 10 centimètres cubes d'une solution alcoolique à 20 p. c. de KOH, pendant trente minutes, dans un ballon surmonté d'un réfrigérant à reflux.

Cette opération étant achevée, nous neutralisons la plus grande

(*) Benedict, *Monatshefte f. chemic*, VIII, 40.

partie de l'excès de potasse avec HCL normal, sans aller jusqu'à la neutralisation complète.

La solution de savon encore chaude est transvasée dans une boule à décantation et le ballon est rincé avec 35 centimètres cubes d'eau chaude, en plusieurs fois. Nous ajoutons alors 15 centimètres cubes de glycérine pure concentrée (D = 1.26), nous mélangeons le tout en secouant légèrement la boule et nous laissons refroidir.

On extrait ce liquide à l'aide de 50 centimètres cubes d'éther; on décante la partie aqueuse et on transvase l'éther dans un ballon de 300 centimètres cubes. On traite la solution de savon par une nouvelle quantité d'éther. Les deux solutions éthérées sont réunies et distillées pour recueillir l'éther. Quand le liquide de distillation est réduit à quelques centimètres cubes, on y ajoute une goutte de phénolphtaléine et quelques gouttes d'une solution alcoolique de KOH à 3 p. c. pour alcaliniser franchement le milieu; cette opération a pour but de détruire les savons acides. On ajoute au liquide quelques grammes de verre finement broyé pour empêcher la substance de former ultérieurement une masse compacte. On achève l'évaporation au bain-marie et on sèche à l'étuve à 100° pendant deux à trois heures.

Le résidu sec et friable est traité par 40-50 centimètres cubes d'éther sulfurique *anhydre* ou une plus grande quantité d'éther de pétrole dont le point d'ébullition est inférieur à 80°. On laisse en contact pendant huit à douze heures, puis on filtre la solution éthérée sur un filtre sec et dégraissé, en ayant soin de laver plusieurs fois à l'éther. Le liquide est évaporé lentement au bain-marie dans une fiole de Soxhlet, puis il est séché à l'étuve à 100° jusqu'à poids constant, ce qui s'obtient après une heure et demie à deux heures et demie.

Ce procédé nous a donné d'excellents résultats. Nous avons fait les vérifications suivantes : l'extraction des matières insaponifiables est complète; après deux extractions de la solution savonneuse par l'éther, on ne peut plus enlever de matières insaponifiables au liquide par un nouveau traitement; l'insaponifiable obtenu est exempt de cendres, ce qui prouve qu'il ne renfermait pas de savons. On pourrait craindre que l'éther entraîne de la glycérine, mais cet inconvénient ne se produit pas en suivant le mode opératoire indiqué.

La glycérine a été dosée par oxydation avec le bichromate de K en opérant d'après Hehner.

Nous avons fait également quelques déterminations sur les acides gras des huiles préparés avec le minimum d'altérations en les desséchant dans le vide à basse température. On a pris leur acidité *à froid et à chaud (acidité* et *saponification).* On sait que la potasse alcoolique à froid ne neutralise que les acides libres, sans réagir sur les anhydrides internes; à chaud elle forme avec les lactones des sels des oxyacides correspondants. Les résultats sont exprimés en milligrammes de KOH pour un gramme d'acides gras.

Cette détermination présente de l'intérêt dans l'étude des huiles de poisson, car on sait que les lactones augmentent par le vieillissement et par l'altération; il importait de savoir quelle est la teneur des huiles de foie de poisson en ces substances quand elles ont été bien préparées.

Nous avons déterminé aussi *le point de fusion* et *de solidification* des acides gras par les méthodes habituelles.

Réactions de coloration. — Nous n'attachons guère d'importance à ces réactions, car elles sont généralement empiriques et elles n'ont aucune signification. Leur histoire a montré souvent que c'était à tort qu'on leur avait accordé de la valeur. Nous nous sommes bornés à étudier quatre réactions qui sont encore employées aujourd'hui pour les huiles de poisson : l'action de l'acide sulfurique, de l'acide nitrique, du réactif de Béchi et du réactif de Cailletet.

LES CARACTÈRES DES HUILES DE FOIE DE POISSON

1. HUILE DE FOIE DE MORUE OU PLUTÔT DE CABILLAUD (GADUS MORRHUA)

Propriétés physiques.

Couleur . . .	Blanche, légèrement jaunâtre.
Densité à 15°	0,9289
Indice de réfraction à 15°	1,4822
Indice thermosulfurique	109,2

Propriétés chimiques.

a) Huile :

Indice d'acide	4,08
» de saponification . .	188,10
» d'éther	184,02
» d'acide gras fixe. . .	93,0
» d'iode	152,5
» d'acétyle	4,0

b) Acides gras :

Acidité	164,6
Saponification	195,6
Lactones	31,0
Point de fusion	25,5
Point de solidification	21,07

c) Composants principaux de l'huile :

Glycérine	10,0	p. c.
Acides gras fixes	93,0	»
Matières insaponifiables . .	1,83	»

d) Réaction de coloration :

α) Action de l'acide sulfurique (3 gouttes sur 1 gramme d'huile). Coloration pensée, rouge pourpre puis brun-rougeâtre.

β) Action de l'acide nitrique fumant (3 gouttes et 10 à 15 grammes d'huile). Coloration rose feu qui passe au jaune, puis devient brune.

γ) Réactif de Béchi. — Absence de précipité noir.

δ) Réactif de Cailletet (5 centimètres cubes d'huile + 5 centimètres cubes de benzine + 1 centimètre cube de réactif). Coloration rouge flamboyant, puis rouge vif, rouge cerise, rouge foncé persistant.

Différences entre l'huile de foie de morue préparée par les méthodes rationnelles et l'huile de foie de morue brune obtenue par putréfaction.

Les différences entre ces huiles sont multiples et importantes.

1. L'huile brune renferme des alcaloïdes, en proportion variable, qui ont été isolés et étudiés par A. Gautier et Mourgues (*), ce sont : des bases volatiles, la butylamine, l'amylamine, l'hexylamine, la dihydrolutine; des bases fixes, l'aselline, la morrhuine, auxquelles il convient d'ajouter l'acide morrhuique, acide qui se comporte aussi comme un alcali, en présence des acides minéraux. On y trouve également de petites quantités d'acide formique, d'acide butyrique et autres. D'après ces auteurs, toutes ces substances déterminent des actions physiologiques très intenses sur l'organisme; ils leur attribuent une grande importance dans l'efficacité thérapeutique de l'huile de foie de morue. Ce n'est qu'une opinion, car ces auteurs disent d'ailleurs : « On ne saurait nier l'activité très grande de ces bases : mais il serait malaisé d'en conclure à leur efficacité dans la médicamentation par l'huile de foie de morue ». Les médecins y ont cru cependant pendant longtemps et nous n'oserions pas dire qu'ils aient tous abandonné cette idée.

2. L'huile brune, de même que l'huile blanche qui a subi des altérations, contient des substances aldéhydiques. Différents auteurs, entre autres Schmidt, ont signalé que les graisses rancies renferment des aldéhydes qu'ils croient être de l'acroléine. Nous basant sur ces données, nous avons recherché si on pouvait en déceler dans les huiles de foie de morue obtenues par putréfaction, ainsi que cela avait été fait, dans notre laboratoire, par M. Servais. Dans tous les cas, nous avons obtenu des réactions positives. Cette recherche est faite de la façon suivante : l'huile est soumise à une distillation par entraînement dans un courant de vapeur d'eau; le distillat est essayé avec une solution de nitrate d'argent ammoniacal ou avec une solution de fuchsine décolorée par l'anhydride sulfureux.

L'huile de foie de morue préparée par la méthode décrite plus haut est totalement dépourvue d'aldéhydes; on n'obtient pas de réaction même en opérant sur 75 grammes d'huile. Si on expose cette huile à l'air, il s'y forme rapidement des produits aldéhydiques et l'intensité de la réaction augmente toujours par la durée

(*) *Les Alcaloïdes de l'huile de foie de morue*, par A. Gautier et L. Mourgues. Paris, Masson, 1890.

de l'exposition à l'air; en même temps l'huile prend un goût âcre et désagréable. L'huile qui est préparée avec des foies ayant subi un commencement de putréfaction donne aussi la réaction des aldéhydes.

Il résulte de ces expériences que l'huile de foie de morue s'altère par oxydation et par fermentation ; il s'y produit des substances aldéhydiques qui contribuent probablement à lui donner son goût particulier. C'est pour cette raison que nous prenons soin, en préparant les huiles, de les priver d'eau et d'impuretés pouvant y subir des fermentations; de même, il importe de les soustraire aux agents d'oxydation.

Nous considérons la réaction des aldéhydes comme un excellent moyen de s'assurer de la qualité d'une huile de foie de morue.

3. Les huiles de foie de morue et autres poissons subissent d'autres modifications sous l'effet des fermentations et de l'oxydation. L'acidité augmente ; l'indice d'iode diminue parfois très fort; l'indice d'acétyle augmente ainsi que les lactones. Ce sont là également de bons moyens de se rendre compte du degré d'altération d'une huile de foie de poisson. Heyerdahl (*) attribue une grande valeur à l'indice d'acétyle de l'huile de foie de morue et il le considère comme un bon moyen de juger du degré de rancissement. D'après cet auteur, quand on soumet les foies frais au traitement par la vapeur dans un courant d'anhydride carbonique, l'indice d'acétyle des acides gras est nul; ils ne contiennent donc pas d'oxydriles alcooliques; c'est par l'action de l'oxygène de l'air sur les acides gras de l'huile que se formeraient les oxyacides. L'huile de foie de morue renfermerait abondamment deux glycérides d'acides gras non saturés : la térapine et la jécoléine. Nous rappelons les travaux de Heyerdahl, à cause de l'intérêt de la question, car ses idées comportent certainement des réserves.

Il résulte des données actuelles sur l'efficacité thérapeutique de l'huile de foie de morue qu'elle doit être surtout rapportée à sa valeur nutritive élevée et peut-être aussi aux lécithines et aux composés organiques phosphorés qu'elle renferme; ils y sont cependant en si petite quantité ! Aucune indication ne nous permet actuellement d'attribuer l'action de l'huile de foie de morue à un autre élément.

(*) Heyerdahl, CHEMIKER ZEITUNG, XIX, p. 375.

En tous cas, nous considérons comme un grand avantage de préparer des huiles qui ne provoquent pas de répugnance chez les malades ni de trouble dans les fonctions digestives.

2. HUILE DE FOIE DE RAIE (RAIA CLAVATA)

Propriétés physiques.

Couleur	Jaune rougeâtre.
Densité à 15°	0,9345
Indice de réfraction à 15° . .	1,4860
Indice thermosulfurique . .	130,8

Propriétés chimiques.

a) Huile :

Indice d'acide	4,86
» de saponification . .	186,10
» d'éther	181,24
» d'acide gras fixe. . .	93,4
» d'iode	178,5
» d'acétyle	11,25

b) Acides gras :

Acidité , ...	169,6
Saponification	196,7
Lactones	27,1
Point de fusion	31,0
» de solidification . . .	24,3

c) Composants principaux de l'huile :

Glycérine	12,33 p. c.
Acides gras fixes	93,40 »
Matières insaponifiables . .	1,48 »

d) Réactions de coloration :

α) Action de l'acide sulfurique (3 gouttes sur 1 gramme d'huile). Coloration rouge, rouge pourpre, puis rouge-brun et brun foncé.

β) Action de l'acide azotique (3 gouttes et 10 à 15 grammes d'huile). L'huile rougit lentement après agitation, puis brunit.

γ) Réactif de Cailletet (5 centimètres cubes d'huile + 5 centimètres cubes de benzine + 1 centimètre cube de réactif). L'huile rougit un peu, puis passe très vite au rouge brun foncé.

3. HUILE DE FOIE DE PASTENAGUE (TRIGON PASTINACA)

Propriétés physiques.

Couleur	Jaune pâle.
Densité à 15°	0,9161
Indice de réfraction à 15°	1,4752
Indice thermosulfurique	80,4

Propriétés chimiques.

a) Huile :

Indice d'acide	0,77
» de saponification	160,20
» d'éther	159,43
» d'acide gras fixe	96,0
» d'iode	105,7
» d'acétyle	7,05

b) Acides gras :

Acidité	158,1
Saponification	166,2
Lactones	18,1
Point de fusion	28,25
» de saponification	21,7

c) Principaux composants de l'huile :

Glycérine	6,82 p. c.
Acides gras fixes	96,0 »
Matières insaponifiables	12,55 »

d) Réactions de coloration :

α) Action de l'acide sulfurique. Coloration rouge, rouge-brun, rouge foncé.

β) Action de l'acide nitrique. Rougit assez lentement, jaunit, puis brunit lentement.

γ) Réactif de Cailletet. Coloration rouge-vif, rouge-vineux, puis rouge-brun.

δ) Réaction de Béchi. Absence de précipité noir.

4. HUILE DE FOIE DE LAMIE (LAMNA CORNUBICA)

Propriétés physiques.

Couleur	Jaune pâle.
Densité à 15°	—
Indice de réfraction . . .	1,4830
Indice thermosulfurique . .	107,5

Propriétés chimiques.

a) Huile :

Indice d'acide	1,64
» de saponification . .	180,00
» d'éther	178,36
» d'acide gras fixe. . .	93,4
» d'iode	152,2
» d'acétyle	8,7

b) Acides gras :

Acidité	168,9
Saponification	195,8
Lactones	26,9
Point de fusion	28,2
» de solidification . . .	22,5

c) Principaux composants de l'huile :

Glycérine	10,37 p. c.
Acides gras fixes	93,40 »
Matières insaponifiables . .	1,58 »

d) Réactions de coloration :

α) Action de l'acide sulfurique (3 gouttes sur 1 gramme d'huile). Coloration rouge-brun, puis brun.

β) Action de l'acide nitrique (3 gouttes et 10 à 15 grammes d'huile). Rougit après agitation puis brunit lentement.

γ) Réaction de Béchi. Absence de précipité noir.

δ) Réactif de Cailletet. Coloration rouge qui passe rapidement au rouge foncé puis au rouge-brun.

5. HUILE DE FOIE DE MORUE LONGUE

Propriétés physiques.

Couleur	Jaune pâle.
Densité à 15°	0,9285
Indice de réfraction à 15°	1,4804
Indice thermosulfurique	107,3

Propriétés chimiques.

a) Huile :

Indice d'acide	2,86
» de saponification	187,20
» d'éther	184,34
» d'acide gras fixe.	94,0
» d'iode	138,0
» d'acétyle	9,7

b) Acides gras :

Acidité	190,10
Saponification	197,05
Lactones	6,95
Point de fusion	29,3
» solidification	23,5

c) Composants principaux de l'huile :

Glycérine	11,20 p. c.
Acides gras fixes	94,0 »
Matières insaponifiables	1,04 »

d) Réactions de coloration :

α) Action de l'acide sulfurique. Coloration rouge-brun, violet pourpre, puis brune.

β) Action de l'acide nitrique. — L'huile rougit après agitation puis brunit.

γ) Réaction de Béchi. Absence de précipité noir.

δ) Réactif de Cailletet. La solution jaunit, puis brunit. Pas de coloration rouge.

6. HUILE DE FOIE DU SQUALUS BOREALIS

Propriétés physiques.

Couleur	Blanche, très légèrement jaunâtre.
Densité à 15°	0,9303

Indice de réfraction à 15° . . .	1,4704
Indice thermosulfurique . . .	73

Propriétés chimiques.

a) Huile :	
Indice d'acide	2,55
» de saponification . .	225,00
» d'éther	222,45
» d'acide gras fixe. . .	84,93
» d'acide gras volatil (R.-M.).	39,5
» d'iode	101,7
» d'acétyle	7,7
b) Acides gras :	
Acidité	199,7
Saponification	208,1
Lactones	8,4
Point de fusion	20,9
» solidification . . .	15,2
c) Composants principaux de l'huile :	
Glycérine	12,3 p. c.
Acides gras fixes	84,93 »
Matières insaponifiables . .	0,895 »

d) Réactions de coloration :

α) Action de l'acide sulfurique (3 gouttes sur 1 gramme d'huile). Brunit légèrement, puis se fonce fortement.

β) Action de l'acide nitrique (3 gouttes et 10 à 15 grammes d'huile). L'huile prend lentement une teinte rose après agitation.

γ) Réactif de Cailletet. La solution devient rose et après brunit.

δ) Réaction de Béchi. Absence de précipité noir.

Nous donnons maintenant quelques caractères de deux huiles que nous n'avons pu étudier plus complètement; pour l'une, notre provision a été perdue par un accident (huile de charbonnier); pour l'autre, nous n'avons pu nous procurer assez de substance pour poursuivre d'autres recherches (huile de dorée).

7. HUILE DE CHARBONNIER (GADUS CARBONARIUS)

Couleur	Jaune pâle.
Indice de saponification . . .	170,0
» d'iode	136,1
» d'acide gras fixe . . .	94,0
Matières insaponifiables . . .	0,935 p. c.

8. HUILE DE DORÉE (ZEUS FABER)

Couleur	Rouge.
Consistance. . . .	Pâteuse; liquide en été.
Indice de saponification . . .	244,2
» d'iode	58,01
» d'acétyle	26,9

Réactions de coloration :

α) Action de l'acide sulfurique (3 gouttes sur 1 gramme d'huile). Noircit rapidement au contact de l'acide et charbonne.

β) Action de l'acide azotique (3 gouttes et 10 à 15 grammes d'huile). Brunit après agitation.

γ) Réactif de Cailletet. Brunit, puis noircit complètement.

δ) Réaction de Béchi. Absence de précipité noir.

OBSERVATIONS SUR LES CARACTÈRES DES HUILES DE FOIE DE POISSON.

La comparaison des huiles qui sont étudiées dans ce travail nous permet de faire les observations suivantes :

Couleur. — Certaines huiles peuvent se différencier par leur coloration : les unes sont blanches ou jaune-pâle; les autres sont rouges ou rougeâtres.

Densité. — L'huile la plus légère est l'huile de pastenague (0,9161); la densité des autres va de 0,9285 à 0,9345.

Indice de réfraction. — Deux huiles, celle de Squalus borealis (1,4704) et celle de pastenague (1,4752) ont un indice de réfraction notablement différent de celui des autres; l'indice de celles-ci varie aussi dans une certaine mesure. Les différences sont notables et en font un bon caractère.

Indice thermosulfurique. — L'huile de raie a un indice élevé (132,3); trois huiles ont un indice voisin : l'huile de foie de morue, celle de lamie et celle de morue longue; les autres, celles de Squalus borealis et de pastenague ont un indice beaucoup moins élevé (80,4 et 73).

Indice d'acide, de saponification et d'éther. — Ces indices présentent des différences marquées dans les huiles de pastenague et de Squalus borealis.

Indice d'iode. — Il comporte des différences notables dans toutes les huiles. D'après Tortelli, cet indice varierait parallèlement avec l'indice thermosulfurique; c'est ce que l'on constate, dans une certaine mesure, pour les huiles étudiées dans ce travail.

Indice d'acétyle. — Cet indice est généralement peu élevé pour les huiles de foie de poisson, sauf pour les huiles de raie et de dorée.

Les composants principaux de l'huile (glycérine, acides gras fixes, matières insaponifiables) varient peu sauf pour l'huile de pastenague qui renferme beaucoup de matières insaponifiables, moins de glycérine que les autres et relativement peu d'acides gras fixes.

L'indice d'acide gras volatil des huiles de foie de poisson est fort peu élevé ainsi que nous avons pu le constater en déterminant les indices d'acétyle. Seule, l'huile de Squalus borealis renferme une notable proportion d'acides volatils jusqu'à donner un indice R.-M. de 39,5.

Les acides gras fixes des huiles étudiées sont différents, car leur chiffre d'acidité varie souvent notablement et ils renferment une proportion variable de lactones.

Réactions de coloration. — Il n'est guère possible d'identifier les huiles de foie de poisson de cette manière; tout au plus pourrait-on prendre en considération l'action du réactif de Cailletet pour rechercher l'huile de foie de morue longue.

Il résulte de cette étude que les huiles de foie de poisson ont une composition fort variable. Les données que nous avons établies dans ce travail pourront servir non seulement à identifier les huiles, mais aussi à vérifier leur bonne préparation et leur degré d'altération.

Nouvel Électromètre pour Charges Statiques

PAR

le P. Théod. WULF, S. J.,
Professeur de Physique au Collège Saint-Ignace, à Fauquemont

Le principe de cet appareil, auquel je donne le nom d'Électromètre bifilaire, est le suivant : deux fils conducteurs très fins — par exemple, fils de quartz argentés ou humectés, fils de platine à la Wollaston — sont suspendus verticalement très près l'un de l'autre. Ces fils sont réunis à leur extrémité inférieure et légèrement lestés (par exemple, au moyen d'un petit morceau de papier d'étain) (fig. 1). Si l'on communique à ce système une charge électrique, les fils se repoussent et s'écartent. L'écart est maximum au milieu de la longueur des fils. On mesure cet écart au moyen d'un microscope muni d'un micromètre oculaire. La grandeur de l'écart mesure la charge des fils.

Cet appareil peut avantageusement remplacer l'électroscope à feuilles d'aluminium. Et je crois être en droit d'affirmer que, non seulement l'Électromètre bifilaire échappe aux défauts de l'électroscope à feuilles, mais qu'il en possède, même à un plus haut degré, les avantages, à savoir : une très faible capacité et une grande facilité de transport.

La figure 1 représente l'appareil après enlèvement de son écran faradique et du microscope. De la base, fixée sur un trépied à vis calantes, s'élèvent deux colonnes SS qui portent un plateau. Au milieu de celui-ci est ménagée une ouverture où s'engage le bouchon en ambre auquel sont suspendus les fils.

Pour la mesure, l'appareil est recouvert d'un chapeau métallique en laiton auquel est fixé le microscope d'observation et qui forme chambre de Faraday complète, à part la petite fenêtre par

où pénètre la lumière. Pour les observations dans les milieux très humides, tels que cavernes, etc., on a prévu plusieurs chambres desséchantes au sodium.

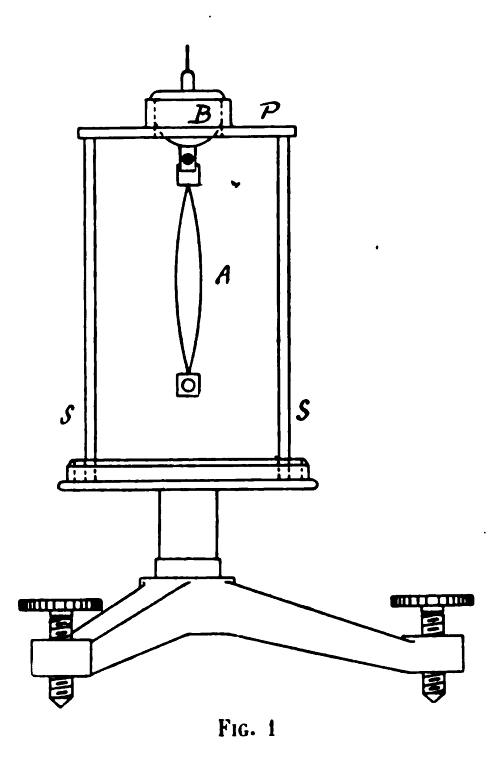


Fig. 1

Comparé avec l'électroscope à feuilles d'aluminium cet appareil jouit de propriétés nombreuses et très remarquables.

1. Les feuilles d'aluminium se croquant aisément et se raidissant par suite des plis qui s'y forment, ne conservent pas toujours la régularité de leurs mouvements; c'est là une source de fréquentes incertitudes dans les lectures. D'autre part, elles risquent souvent de venir en contact et de rester collées, au grand ennui de l'opérateur. Dans le nouvel appareil ces inconvénients ont disparu totalement avec les feuilles elles-mêmes. Par contre, les fils prennent sans la moindre hésitation, des positions nettes et pré-

cises. La position d'équilibre est également sans ambiguïté en raison de la traction opérée par le lest. C'est un plaisir de voir, dans une suite rapide de charges et de décharges, avec quelle promptitude et quelle assurance les fils se mettent en station.

2. La lecture a toute la précision désirable : les fils fins employés constituent un objet d'une excellente définition. Pas de parallaxe possible. La meilleure forme d'électroscope à feuilles est sans contredit celle de Günther et Tegetmeyer. Dans cet appareil, la portion utile de la graduation ne saurait comporter plus de 30 divisions. Avec le bifilaire nous utilisons une échelle de 150 divisions et la lecture se fait commodément à 0,1 près. Ajoutez que nous visons les milieux des fils et ces portions restant parallèles aux traits de l'échelle, même aux plus grands écarts, la lecture se fait sans ambiguïté (fig. 2). D'autre part, on relève, chaque fois, les positions des deux fils; les déplacements du zéro et le défaut de verticalité de l'appareil sont donc sans influence. Une seule observation donne ainsi une exactitude égale à celle que l'on n'obtient, dans d'autres cas, que par les observations de deux déviations de sens contraires.

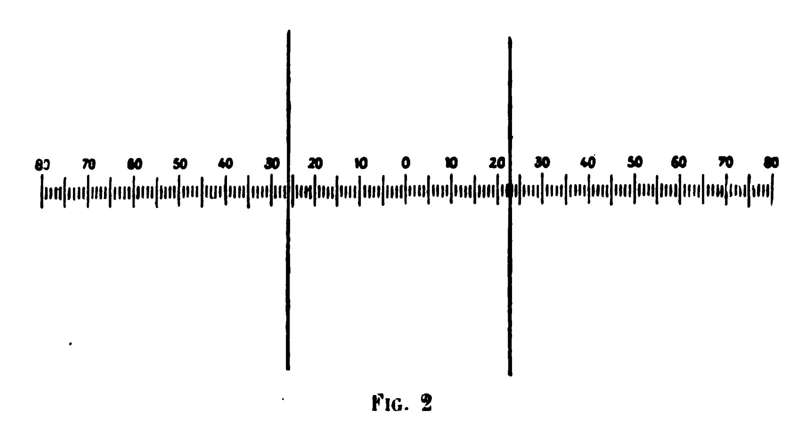


Fig. 2

3. Une circonstance particulièrement importante pour la rapidité des observations est la faible capacité de l'appareil employé. C'est en cela que consiste l'avantage capital de l'électroscope à feuilles et la raison pour laquelle, en dépit de ses défectuosités, on

l'emploie, presque exclusivement, pour les mesures de dispersion, l'étude des substances radioactives, etc. L'Électromètre bifilaire jouit, à ce point de vue également, d'une supériorité très marquée, comme les chiffres suivants en font foi :

	Électromètre à feuilles Capacité minimum	Électromètre bifilaire Capacité minimum
Sans crayon de charge	4,6	2,8
Avec crayon de charge	6,7	4,1

4. Dans l'électroscope ordinaire, les écarts des feuilles se mesurent en centimètres. Dans notre Électromètre les écarts entre les fils ne comportent que quelques millimètres. Aussi la capacité de l'Électromètre bifilaire est-elle pour ainsi dire indépendante de la charge.

5. L'appareil se prête non seulement aux lectures subjectives, mais encore à la projection et, très particulièrement, à l'enregistrement photographique. Grossis 100 fois, les fils n'ont pas même une épaisseur de 1 millimètre; la mise au point est donc des plus nettes. Il suffit évidemment de photographier un seul fil. Si l'on fait tomber sur une lentille cylindrique la partie de l'image (fig. 2) correspondant à l'échelle, la silhouette de ce fil est concentrée au foyer en un point noir. Sur une plaque ou une pellicule mobile et qui passe à ce foyer, ce point trace une courbe continue. L'importance de cette adaptation à l'enregistrement photographique ressort mieux encore de ce qui suit.

6. La rapidité avec laquelle l'appareil donne son indication dépend de la grandeur du poids tenseur des fils. Plus la tension est forte, plus est rapide l'indication; mais, en revanche, d'autant moindre la sensibilité. A l'œil il semble que l'écart se produise d'un mouvement brusque et unique. La photographie montre que ce mouvement est oscillatoire; il se produit environ 10 oscillations d'une période de 0,02 secondes. Emploie-t-on des fils plus fins, plus courts et plus fortement tendus, on arrive facilement à 1000 oscillations à la seconde. L'Électroscope bifilaire est donc spécialement apte à l'enregistrement photographique des processus électriques très rapides. En un mot, cet appareil constitue un excellent oscillographe, le premier, croyons-nous, du genre électrostatique et, par suite, dénué de capacité et de self induction.

On peut s'en servir pour relever les courbes des courants alternatifs, étudier le fonctionnement de la bobine d'induction, la forme caractéristique des ondes sonores dans le téléphone.

Prenons, par exemple, les oscillations qui se produisent dans le primaire d'une bobine de Ruhmkorff munie de son condensateur. Et d'abord, laissons ouvert le circuit secondaire. La figure 3 nous montre la forte oscillation à l'ouverture du courant primaire, et l'oscillation plus faible à la fermeture.

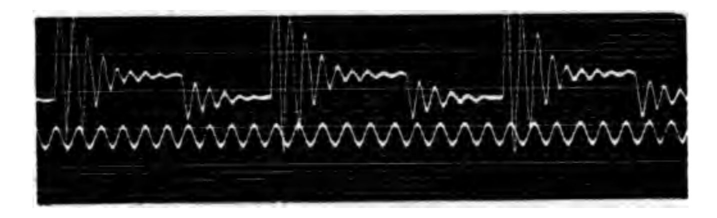


Fig. 3

Sans rien changer d'ailleurs aux conditions de l'expérience, court-circuitons le secondaire. La figure 4 révèle le fort amortissement produit par la réaction du secondaire.

On remarquera la régularité avec laquelle les mêmes processus se renouvellent à chaque interruption.

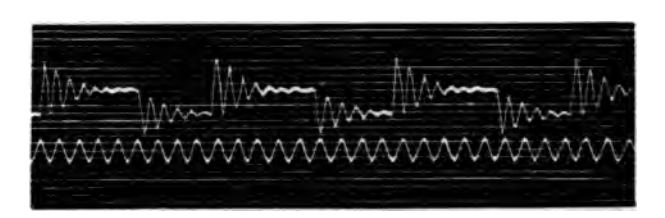


Fig. 4

Concurremment avec les phénomènes électriques, on a enregistré le temps à l'aide d'un diapason ainsi qu'on le voit dans la partie inférieure des figures.

Nous poursuivons en ce moment des recherches du genre de celles que nous venons d'indiquer.

7. Il importe en outre d'être fixé sur la relation qui relie l'écart au voltage. Cette relation est des plus simples : sur une très grande partie de l'échelle, à savoir entre les divisions 40 et 140, ce qui répond à l'intervalle de 60 à 230 volts, les écarts sont rigoureusement proportionnels aux voltages. Par suite, une division vaut 1,7 volts. On peut apprécier un dixième de division, soit 0,17 volts, dans tout l'intervalle 60-250 volts.

La courbe des écarts en fonction des voltages est donnée dans la figure 5; on y voit quels sont les écarts d'avec la ligne droite aux valeurs basses, c'est-à-dire de 10 à 60 volts. Comme point de

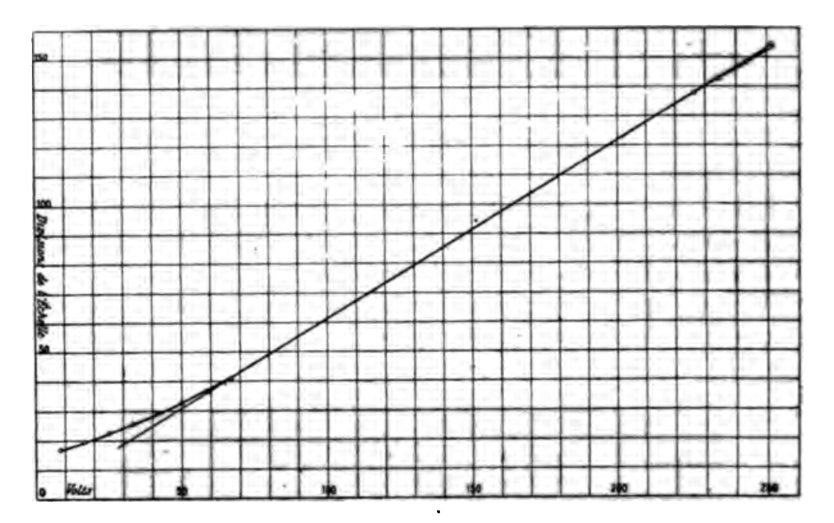


Fig. 5

comparaison notons que, sur l'électroscope à feuilles d'aluminium, de construction courante, une division de l'échelle correspond à 6 à 7 volts. Les sensibilités des deux appareils pour les mesures de voltage sont donc dans le rapport de 4 à 1.

On a souvent à mesurer une quantité d'électricité, une intensité de courant. En raison de la faible capacité de notre appareil, la

supériorité est alors plus marquée encore; car on a 1,7 × 2,8 = 4,7 et 6,7 × 4,3 = 30, les sensibilités pour les mesures de quantité sont donc 30 : 4,5 = 6,6 : 1.

L'emploi de fils plus fins améliorera encore ces résultats. Les données ci-dessus se rapportent à des fils de 0,006 millimètre

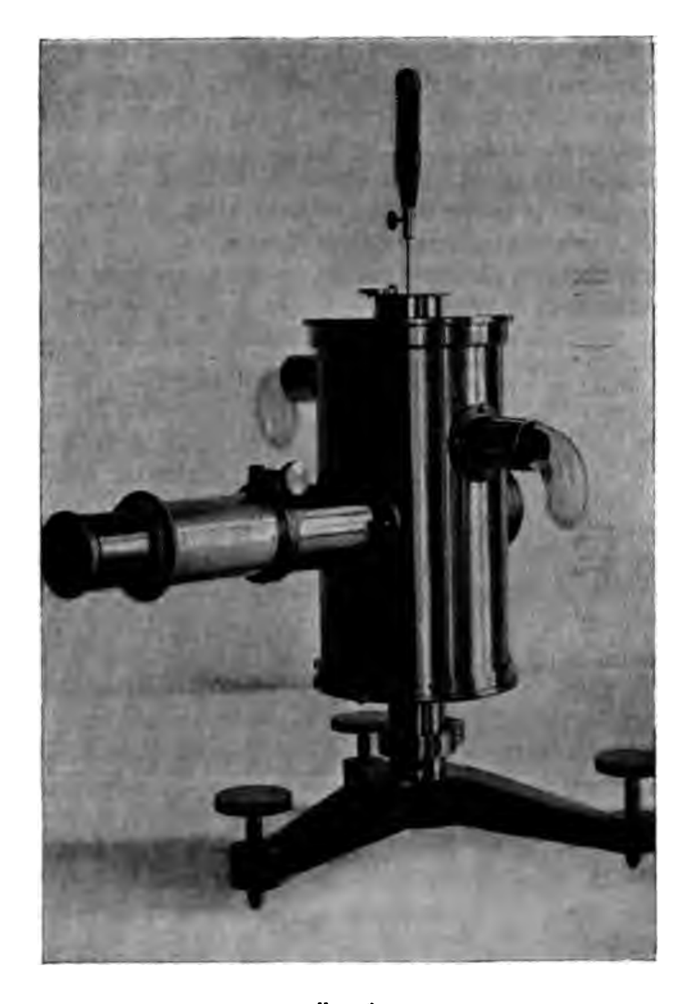


Fig. 6

d'épaisseur. Or, il n'est pas douteux que l'on ne puisse en faire de 0,003 millimètre. Dans son galvanomètre à corde, Einthoven a même employé un fil de 0,0014 millimètre de diamètre seulement.

La figure 6 représente l'appareil complet muni de sa tige de charge et du microscope. Sa construction a été confiée à la maison Günther et Tegetmeyer, de Brunswick (*), si renommée pour la précision de ses électroscopes. Cette maison a admirablement réussi à rendre l'appareil des plus commode à transporter.

Des perfectionnements ultérieurs seront apportés aux deux points de vue suivants :

1° La sensibilité peut encore être considérablement augmentée ;

2° L'appareil peut être disposé de façon à donner, comme l'électromètre à quadrants, le signe de la charge.

Nous donnerons, dans une prochaine communication, les résultats réalisés dans ce sens.

(*) Le brevet en a été déposé sous le n° D.R.P. 181284.

ÉTUDE

D'UN

SYSTÈME de SIX COUPLES de SURFACES APPLICABLES

PAR

l'Abbé de MONTCHEUIL

Un couple de surfaces applicables étant donné, on peut toujours en déduire cinq nouveaux couples, par les seules opérations de l'algèbre et de la dérivation (*). Mais, en général, les formules se compliquent rapidement et les calculs deviennent extrêmement laborieux.

Nous nous proposons d'exposer un cas, où il n'en va pas ainsi. Les formules sont toutes relativement simples. D'ailleurs les six couples qui se ramènent ici à trois, se déduisent presque immédiatement des surfaces minima. A ces titres, le système que nous allons étudier nous a paru offrir quelque intérêt.

Nous nous appliquerons d'abord à déterminer les six couples, et nous ferons ensuite l'étude du premier. Les surfaces qui le composent jouissent en effet de propriétés qui le signalent à l'attention des géomètres.

(*) Darboux, *Théorie des Surfaces*, t. IV, p. 48.

I

DÉTERMINATION DES SIX COUPLES

Détermination du premier couple. — Prenons pour point de départ, la surface minima la plus générale. Elle est définie par l'équation

$$\xi = uf_1 + u_1 f - \frac{1 + uu_1}{2}(f' + f_1')$$

u, u_1, ξ désignant les coordonnées d'O. Bonnet (*), f, f_1 deux fonctions respectives de u et de u_1, f', f_1' leurs dérivées.

Désignons par c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale, par R la valeur absolue des rayons de courbure, par α, β les paramètres des lignes de courbure. On trouve par le calcul

$$(1) \qquad R = \left(\frac{1 + uu_1}{2}\right)^2 \sqrt{f'''f_1'''},$$

$$d\alpha = \frac{\sqrt{f'''}du + \sqrt{f_1'''}du_1}{2}, \qquad d\beta = i\,\frac{\sqrt{f_1'''}du_1 - \sqrt{f'''}du}{2}.$$

Cela posé, écrivons les formules

$$(2) \qquad \begin{array}{lll} x' = c\sqrt{R}, & y' = c'\sqrt{R}, & z' = c''\sqrt{R}; \\ x'' = \alpha, & y'' = \beta, & z'' = \sqrt{R}. \end{array}$$

On vérifie que les surfaces définies par ce système forment un couple de surfaces applicables.

Tel est le premier couple qu'on déduit d'une surface minima quelconque, et que nous pouvons définir comme il suit :

Une surface minima étant donnée, menons par l'origine une parallèle à la normale en un de ses points, et sur cette droite,

---

(*) *Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes.* JOURNAL DE LIOUVILLE, 2e série, t. V, pp. 153-266, 1860.

prenons une longueur proportionnelle à la racine de la valeur absolue des rayons de courbure. Soit M *le point ainsi obtenu. Représentons ensuite sur le plan des xy, le système des lignes de courbure de la surface minima, par un système orthogonal convenablement choisi de deux familles de droites, et, à l'intersection de deux d'entre elles élevons une perpendiculaire égale au rayon vecteur du point* M. *Le point* M_1 *ainsi déterminé décrira une surface applicable sur celle que décrit le point* M.

Détermination des surfaces S, S_1, A, A_1, $\sum$, $\sum_1$. — Nous adoptons ici la notation employée par M. Darboux dans le chapitre intitulé : *Les douze surfaces* (*).

Posons

$$(3)\qquad F = \frac{\alpha + i\beta}{4}, \qquad F_1 = \frac{\alpha - i\beta}{4}.$$

Les coordonnées x, x_1... des surfaces S, S_1 se déduisent des formules (1), (2) et (3), au moyen des relations

$$x = \frac{x' + x''}{2}, \qquad x_1 = \frac{x' - x''}{2}$$

et des relations analogues relatives aux autres coordonnées.

Cette remarque faite, on obtiendra les coordonnées des six surfaces par la méthode indiquée dans le chapitre de M. Darboux mentionné tout à l'heure. Elles seront définies par le tableau suivant :

$$x=(u+u_1)\sqrt{F'F_1'}+F+F_1, \quad y=i(u_1-u)\sqrt{F'F_1'}+i(F_1-F), \quad z=2uu_1\sqrt{F'F_1'};$$

$$x_1=(u+u_1)\sqrt{F'F_1'}-F-F_1, \quad y_1=i(u_1-u)\sqrt{F'F_1'}-i(F_1-F), \quad z_1=-2\sqrt{F'F_1'};$$

$$a=i\frac{u\sqrt{F'}+u_1\sqrt{F_1'}}{\sqrt{F'}-\sqrt{F_1'}}, \quad b=\frac{u\sqrt{F'}-u_1\sqrt{F_1'}}{\sqrt{F'}-\sqrt{F_1'}}, \quad c=-i\frac{\sqrt{F'}+\sqrt{F_1'}}{\sqrt{F'}-\sqrt{F_1'}};$$

(*) *Théorie des Surfaces*, t. IV, p. 48.

$$X=2\frac{F_1\sqrt{F'}-F\sqrt{F_1'}}{\sqrt{F'}-\sqrt{F_1'}},\quad Y=2i\frac{F_1\sqrt{F'}+F\sqrt{F_1'}}{\sqrt{F'}-\sqrt{F_1'}},\quad Z=2\frac{uF_1\sqrt{F'}-u_1F\sqrt{F_1'}}{\sqrt{F'}-\sqrt{F_1'}};$$

$$a_1=i\frac{\dfrac{\partial(F_1'\sqrt{F'})}{\partial u}-\dfrac{\partial(F'\sqrt{F_1'})}{\partial u_1}}{\dfrac{\partial(uF_1'\sqrt{F'})}{\partial u}+\dfrac{\partial(u_1F'\sqrt{F_1'})}{\partial u_1}},\quad X_1=-2\frac{F^2\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{uF_1'\sqrt{F'}}{F}\right)+F_1^2\dfrac{\partial}{\partial u_1}\left(\dfrac{u_1F'\sqrt{F_1'}}{F_1}\right)}{\dfrac{\partial(uF_1'\sqrt{F'})}{\partial u}+\dfrac{\partial(u_1F'\sqrt{F_1'})}{\partial u_1}},$$

$$b_1=-\frac{\dfrac{\partial(F_1'\sqrt{F'})}{\partial u}+\dfrac{\partial(F'\sqrt{F_1'})}{\partial u_1}}{\dfrac{\partial(uF_1'\sqrt{F'})}{\partial u}+\dfrac{\partial(u_1F'\sqrt{F_1'})}{\partial u_1}},\quad Y_1=2i\frac{F^2\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{uF_1'\sqrt{F'}}{F}\right)-F_1^2\dfrac{\partial}{\partial u_1}\left(\dfrac{u_1F'\sqrt{F_1'}}{F_1}\right)}{\dfrac{\partial(uF_1'\sqrt{F'})}{\partial u}+\dfrac{\partial(u_1F'\sqrt{F_1'})}{\partial u_1}},$$

$$c_1=i\frac{\dfrac{\partial(uF_1'\sqrt{F'})}{\partial u}-\dfrac{\partial(u_1F'\sqrt{F_1'})}{\partial u_1}}{\dfrac{\partial(uF_1'\sqrt{F'})}{\partial u}+\dfrac{\partial(u_1F'\sqrt{F_1'})}{\partial u_1}};\quad Z_1=2\frac{F^2\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{F_1'\sqrt{F'}}{F}\right)+F_1^2\dfrac{\partial}{\partial u_1}\left(\dfrac{F'\sqrt{F_1'}}{F_1}\right)}{\dfrac{\partial(uF_1'\sqrt{F'})}{\partial u}+\dfrac{\partial(u_1F'\sqrt{F_1'})}{\partial u_1}}.$$

Détermination des surfaces : S_2, S_3, A_2, A_3, $\sum_2$, $\sum_3$. — Le calcul nous donne pour expressions des coordonnées des surfaces S_2, S_3 les formules suivantes :

$$x_2=\frac{(u+u_1)\sqrt{F'F_1'}-F-F_1}{4FF_1},\quad y_2=i\frac{(u_1-u)\sqrt{F'F_1'}-F_1+F}{4FF_1},\quad z_2=-\frac{\sqrt{F'F_1'}}{2FF_1};$$

$$x_3=\frac{(u+u_1)\sqrt{F'F_1'}+F+F_1}{4FF_1},\quad y_3=i\frac{(u_1-u)\sqrt{F'F_1'}+F_1-F}{4FF_1},\quad z_3=\frac{uu_1\sqrt{F'F_1'}}{2FF_1}.$$

Posons

$$v=\frac{1}{u_1},\qquad v_1=\frac{1}{u};\qquad\qquad \Phi=-\frac{1}{4F_1},\qquad \Phi_1=-\frac{1}{4F}.$$

Il vient

$$x_2 = (v + v_1)\sqrt{\Phi'\Phi'_1} + \Phi + \Phi_1,$$
$$y_2 = i\,(v_1 - v)\sqrt{\Phi'\Phi'_1} + i\,(\Phi_1 - \Phi),$$
$$z_2 = -\,2vv_1\sqrt{\Phi'\Phi'_1}\,;$$
$$x_3 = (v + v_1)\sqrt{\Phi'\Phi'_1} - \Phi - \Phi_1,$$
$$y_3 = i\,(v_1 - v)\sqrt{\Phi'\Phi'_1} - i\,(\Phi_1 - \Phi),$$
$$z_3 = 2\sqrt{\Phi'\Phi'_1}.$$

Désignons par (x_2), (x_3), etc. ce que deviennent x_2, x_3, etc. quand on remplace dans leurs expressions : v, v_1, Φ, Φ_1, Φ', Φ'_1 par u, u_1, F, F_1, F', F'_1.

Nous aurons les relations

$$(x_2) = x, \qquad (y_2) = y, \qquad (z_2) = -\,z\,;$$
$$(x_3) = x_1, \qquad (y_3) = y_1, \qquad (z_3) = -\,z_1.$$

Nous obtenons ainsi les coordonnées des surfaces symétriques des surfaces S, S_1 par rapport au plan des xy.

Si donc nous considérons comme appartenant à la même catégorie, une surface donnée et sa symétrique par rapport à un plan, nous pouvons affirmer que les surfaces S, S_2 d'une part, S_1, S_3 de l'autre, forment des catégories identiques.

On s'assure aisément que les couples A, A_2; A_1, A_3; $\sum$, $\sum_2$; $\sum_1$, $\sum_3$ représentent eux aussi des surfaces de même catégorie.

Si l'on effectue la substitution de variables et de fonctions indiquée plus haut, on obtient les relations

$$(x_2) = x, \qquad (y_2) = y, \qquad (z_2) = -\,z\,;$$
$$(x_3) = x_1, \qquad (y_3) = y_1, \qquad (z_3) = -\,z_1\,;$$
$$(a_2) = -\,a, \qquad (b_2) = -\,b, \qquad (c_2) = c\,;$$
$$(X_2) = X, \qquad (Y_2) = Y, \qquad (Z_2) = -\,Z\,;$$
$$(a_3) = -\,a_1, \qquad (b_3) = -\,b_1, \qquad (c_3) = -\,c_1\,;$$
$$(X_3) = X_1, \qquad (Y_3) = Y_1, \qquad (Z_3) = -\,Z_1.$$

Ces formules montrent que dans le cas actuel, l'étude du système des douze surfaces se réduit à celui des six catégories définies par le tableau précédent.

Relations géométriques entre les surfaces du système. — Nous savons que les surfaces S_2, S_3 se déduisent des surfaces S_1, S_2 par l'inversion composée (*). Cette inversion est ici définie par les formules

$$(4) \qquad \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{x_3}{x} = \frac{y_3}{y} = \frac{z_3}{z} = -\frac{1}{xx_1 + yy_1 + zz_1}.$$

D'ailleurs, nous venons de dire que les surfaces S, S_2 appartiennent à la même catégorie, et qu'il en est de même des surfaces S_1, S_3. Nous en tirons cette conclusion :

L'inversion composée transforme les surfaces S, S_1 en surfaces de la même catégorie.

Ces surfaces rappellent les surfaces anallagmatiques de Moutard (**), que l'inversion ordinaire transforme en surfaces identiques.

Nous avons vu qu'on passait du couple des surfaces S, S_1 qui se correspondent avec orthogonalité des éléments au couple de surfaces applicables qui en dérive, par les relations

$$x = \frac{x' + x''}{2}, \qquad x_1 = \frac{x' - x''}{2}, \text{ etc.}$$

Désignant d'une façon analogue par S'_2, S''_2 les surfaces applicables qu'on déduit des surfaces S_2, S_3 on aura

$$x_2 = \frac{x'_2 + x''_2}{2}, \qquad x_3 = \frac{x'_2 - x''_2}{2}, \text{ etc.}$$

On a d'ailleurs

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 - 4FF_1 = -\frac{x''^2 + y''^2}{4}.$$

(*) Darboux, *Théorie des Surfaces*, t. IV, l. VIII, chapitre IV, p. 73.

(**) Moutard, *Note sur la transformation par rayons recteurs réciproques*. Nouvelles Annales de Mathématiques, t. III, p. 306, 1864.

D'où, en tenant compte du système (4)

$$(5)\quad x'_2 = \frac{4x'}{x''^2 + y''^2}, \quad y'_2 = \frac{4y'}{x''^2 + y''^2}, \quad z'_2 = \frac{4z'}{x''^2 + y''^2};$$
$$x''_2 = -\frac{4x''}{x''^2 + y''^2}, \quad y''_2 = -\frac{4y''}{x''^2 + y''^2}, \quad z''_2 = -\frac{4z''}{x''^2 + y''^2}.$$

Ces formules nous permettent de déduire S''_2 de S'' par la construction suivante :

A un point quelconque M″ *de* S″ *associons sur le même rayon vecteur un point* M''_2, *tel, que les projections des points* M″, M''_2 *sur le plan des* xy *se correspondent par inversion relativement au cercle de rayon 2 tracé dans ce plan, et ayant pour centre l'origine. Le point* M''_2 *décrira la surface symétrique de* S''_2 *par rapport à cette origine.*

Nous avons

$$z''^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Cette relation associée aux trois premières relations du système (5) nous montre qu'on obtiendra la surface S'_2 au moyen de la construction suivante :

Sur le rayon vecteur d'un point donné de S′ *nous prenons une longueur égale à l'ordonnée de* S''_2; *le point ainsi obtenu décrira la surface cherchée.*

Les surfaces S'_2, S''_2 étant ainsi construites au moyen des surfaces S′, S″, nous pouvons considérer les surfaces S_2, S_3 comme construites au moyen des surfaces S, S_1.

Nous avons indiqué plus haut comment on déduit les surfaces S′, S″ de la surface minima initiale. Nous voyons maintenant, comment les quatre surfaces S, S_1, S_2, S_3 dérivent géométriquement de cette première surface. On déduira les huit dernières des précédentes par la méthode générale.

Deuxième détermination des surfaces S′, S″. — Une surface minima étant donnée, nous en avons déduit le couple des surfaces S′, S″ d'une façon en quelque sorte empirique. Avant d'en aborder l'étude, nous allons indiquer un lien plus étroit qui les rattache à ces mêmes surfaces minima.

Imaginons une surface quelconque S_0, définie par une relation entre les trois quantités ξ, u, u_1 coordonnées d'O. Bonnet.

Posons

$$(u+u_1)a_\alpha+i(u_1-u)b_\alpha+(uu_1-1)c_\alpha+i(uu_1+1)d_\alpha+\varphi_\alpha=0$$

a_α, b_α, c_α, d_α désignant des constantes, φ_α une fonction des deux variables u, u_1, définie par la relation précédente. Supposons qu'on nous donne quatre fonctions de cette nature, caractérisées par les indices 1, 2, 3, 4, et concevons les valeurs des constantes, choisies de telle sorte qu'on ait identiquement (*)

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=4}\varphi_\alpha^2=0.$$

A ces quatre fonctions φ_1, φ_2, etc. faisons correspondre quatre fonctions θ_α définies par des relations de la forme

$$\theta_\alpha=\frac{1}{2}\left(\varphi_\alpha s-\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u_1}p-\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u}q+\frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial u\,\partial u_1}\xi\right),$$

p, q, r, s, t désignant les dérivées premières et secondes de ξ.

Associons à la surface S_0 de coordonnées ξ, u, u_1 une surface S_0' de coordonnées ξ', u, u_1, au moyen de laquelle nous définirons quatre nouvelles fonctions θ'_α déterminées par des relations de la forme

$$\theta'_\alpha=\frac{1}{2}\left(\varphi_\alpha s'-\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u_1}p'-\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u}q'+\frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial u\,\partial u_1}\xi'\right).$$

Nous avons montré (**) que le système des différentielles $d\theta_\alpha$, $d\theta'_\alpha$, vérifie identiquement la relation

$$(6)\qquad \sum_{\alpha=1}^{\alpha=4}d\theta_\alpha\,d\theta'_\alpha=\frac{rt'+r't}{2}\,du\,du_1.$$

(*) Bulletin de la Société mathématique de France, t. XXXI, p. 4, 1903.
(**) Ibid.

Considérons les fonctions θ_1, θ_2, θ_3 d'une part, θ'_1, θ'_2, θ'_3 de l'autre, comme définissant les coordonnées cartésiennes de deux surfaces. Nous avons indiqué le rapport de ces surfaces avec les surfaces S_0, S'_0 de coordonnées respectives ξ, u, u_1; ξ', u, u_1. Les quantités θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 par exemple, sont quatre fonctions linéaires des coordonnées x, y, z de la développée moyenne ponctuelle de S_0 et de la demi-somme ρ de ses rayons de courbure. D'ailleurs, par un choix convenable des constantes a_α, etc., θ_1, θ_2, θ_3, $i\theta_4$ se réduisent aux quantités x, y, z, ρ. La même remarque s'applique évidemment aux fonctions θ'_1, θ'_2, θ'_3, θ'_4.

Ces préliminaires établis, proposons-nous de résoudre le problème suivant :

Déterminer toutes les surfaces définies respectivement par deux fonctions ξ, ξ' des mêmes variables u, u_1 telles que les surfaces de coordonnées respectives θ_1, θ_2, θ_3; θ'_1, θ'_2, θ'_3 se correspondent avec orthogonalité des éléments.

Dans le cas particulier où l'on aura

$$\theta_1 = x,\ \theta_2 = y,\ \theta_3 = z; \qquad \theta'_1 = x',\ \theta'_2 = y',\ \theta'_3 = z';$$

x, y, z; x', y', z' désignant les coordonnées des développées moyennes relatives aux surfaces définies par les fonctions ξ, ξ' des variables u, u_1; le problème précédent peut se préciser comme il suit :

Déterminer un couple de surfaces, telles que leurs développées moyennes ponctuelles se correspondent avec orthogonalité des éléments, et, qu'aux points associés de ces développées moyennes correspondent sur les surfaces trouvées des points à plans tangents parallèles.

Nous avons établi que, dans le cas général, les équations du problème étaient définies par le système

$$(7) \qquad d\theta_4 = 0 \qquad rt' + r't = 0.$$

Alors en effet la relation (6) prend la forme

$$d\theta_1\, d\theta'_1 + d\theta_2\, d\theta'_2 + d\theta_3\, d\theta'_3 = 0$$

qui exprime que deux surfaces se correspondent avec orthogonalité des éléments. Égalant à 0 la constante additive, la première équation nous donne

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\left(\varphi_1 s - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} p - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} q + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u \partial u_1} \xi\right) = 0.$$

Pour obtenir ξ il nous suffira de résoudre cette dernière équation qui (on le vérifie immédiatement) est une équation aux dérivées partielles de Laplace, à invariants égaux. Intégrant, il vient

$$(8) \qquad \xi = \varphi_1 (U' + U_1') - 2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} U - 2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} U_1,$$

U, U_1 désignant deux fonctions arbitraires, l'une de u l'autre de u_1; U', U_1' les dérivées de ces fonctions.

Tenant compte de cette valeur de ξ, la seconde équation du système (7) prend la forme

$$(9) \qquad U_1''' \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u^2} + U''' \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u_1^2} = 0$$

équation qui se ramène aisément à l'équation harmonique la plus générale (*). Or nous savons que cette équation définit l'ensemble des surfaces correspondant aux surfaces minima avec orthogonalité des éléments.

Nous voyons par là que le problème proposé se ramène à celui de la déformation infiniment petite des surfaces minima.

L'équation (9) admet des solutions de la forme

$$\xi' = CC_1$$

C, C_1 désignant deux fonctions respectives de u et de u_1 qu'on obtient en résolvant les équations suivantes

$$\frac{C''}{C} = U''', \qquad \frac{C_1''}{C_1} = U_1'''$$

U, U_1 étant supposés donnés.

(*) Darboux, *Théorie des Surfaces*, t. II, p. 193.

Remarquons que l'équation (8) définit comme cas particulier la classe des surfaces minima. Il suffit en effet de déterminer convenablement les constantes qui figurent dans l'expression de φ_4, pour que l'équation en question prenne la forme de l'équation des surfaces minima que nous avons donnée au début. D'ailleurs une surface minima ayant ses rayons de courbure égaux et de signe contraire se confond avec sa développée moyenne. Il suit de là que les quantités θ_1, θ_2, θ_3, coordonnées de cette développée, déterminent, en coordonnées cartésiennes, la même surface minima que définit l'équation (8), en coordonnées d'O. Bonnet. De là, nous déduisons cette proposition :

Une surface minima étant donnée, il existe une surface définie par une équation de la forme

$$\xi' = CC_1$$

dont la développée moyenne ponctuelle correspond à la surface minima avec orthogonalité des éléments.

Au lieu de prendre la surface minima pour point de départ nous allons procéder d'une façon inverse. Donnons-nous à priori une surface définie par l'équation

$$\xi' = 2FF_1$$

F, F_1 désignant deux fonctions respectives de u et de u_1 et cherchons la surface minima correspondante, ainsi que la développée moyenne de la première surface.

On trouve pour coordonnées de la surface minima

$$x = \int \frac{1-u^2}{2}\frac{F''}{F}\,du - \int \frac{1-u_1^2}{2}\frac{F_1''}{F_1}\,du_1,$$

$$y = i\int \frac{1+u^2}{2}\frac{F''}{F}\,du + i\int \frac{1+u_1^2}{2}\frac{F_1''}{F_1}\,du_1,$$

$$z = \int u\frac{F''}{F}\,du - \int u_1\frac{F_1''}{F_1}\,du_1;$$

et pour coordonnées de la surface correspondante avec orthogonalité des éléments

$$(10)\qquad \begin{aligned} x' &= F_1(uF' - F) + F'(u_1F_1' - F_1),\\ y' &= iF_1(F - uF') + iF'(u_1F_1' - F_1),\\ z' &= (u_1F_1' - F_1)(uF' - F) - F'F_1'. \end{aligned}$$

Cette dernière surface n'est autre que la surface S' précédemment définie (*).

Nous voyons par là, que les surfaces S' font partie de celles qui correspondent aux surfaces minima avec orthogonalité des éléments.

Troisième détermination des surfaces S', S''. — Le problème de la déformation des surfaces minima vient de nous conduire à la détermination de la surface S'. Nous allons montrer comment par une autre voie, ce même problème donne simultanément les surfaces S' et S'' applicables l'une sur l'autre.

Soit donné le système

$$(11)\qquad \begin{aligned} x &= i\int \frac{V^2-1}{V'}\,dv - i\int \frac{V_1^2-1}{V_1'}\,dv_1,\\ y &= \int \frac{V^2+1}{V'}\,dv + \int \frac{V_1^2+1}{V_1'}\,dv_1,\\ z &= 2i\int \frac{V}{V'}\,dv - 2i\int \frac{V_1}{V_1'}\,dv_1. \end{aligned}$$

qui définit une surface minima quelconque.

L'équation harmonique qui sert à déterminer les surfaces correspondant à la surface minima avec orthogonalité des éléments peut s'écrire (**)

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v_1^2} = \theta\left[\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{V'}}\right)''}{\frac{1}{\sqrt{V'}}} - \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{V_1'}}\right)''}{\frac{1}{\sqrt{V_1'}}}\right]$$

(*) BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE, t. XXXI, p. 22, 1903.
(**) Darboux, *Théorie des Surfaces*, t. IV, l. VIII, chapitre V, p. 92.

Cette équation admet les quatre solutions

$$(12)\quad \theta_1 = \frac{V+V_1}{\sqrt{V'V'_1}}, \quad \theta_2 = i\frac{V_1 - V}{\sqrt{V'V'_1}}, \quad \theta_3 = \frac{1 - VV_1}{\sqrt{V'V'_1}}, \quad \theta_4 = \frac{1+VV_1}{\sqrt{V'V'_1}}.$$

Or, si l'on désigne par c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale à la surface minima définie par le système (11), par R la valeur absolue de ses rayons de courbure il vient

$$\theta_1 = c\sqrt{R}, \qquad \theta_2 = c'\sqrt{R}, \qquad \theta_3 = c''\sqrt{R}.$$

On retrouve donc les trois premières formules du système (2) qui définissent les coordonnées de la surface S'.

Considérons maintenant la dernière formule du système (12). Nous allons voir comment on en déduit immédiatement la surface S'' définie par les trois dernières équations du système (2).

En effet, des systèmes (1) et (2) on tire (en supprimant les accents)

$$z = \frac{1 + uu_1}{2\sqrt{\dfrac{du}{d(x+iy)}\dfrac{du_1}{d(x-iy)}}}$$

équation qui définit S'' en coordonnées cartésiennes, lorsqu'on donne u et u_1 en fonction de $x+iy$ et de $x-iy$. Or, cette dernière équation s'identifie avec l'équation

$$\theta_4 = \frac{1+VV_1}{\sqrt{V'V'_1}}$$

lorqu'on pose

$$V = u, \quad V_1 = u_1; \qquad x = v + v_1, \quad y = i(v_1 - v), \quad z = \theta_4.$$

Notre proposition est ainsi démontrée.

En terminant ce paragraphe, rappelons une autre méthode de détermination des surfaces S', S'' que nous avons exposée ailleurs (*).

(*) Bulletin de la Société mathématique de France, t. XXXI, p. 16, 1903.

L'identité (6) a lieu évidemment, quand ξ' se confondant avec ξ, ces deux fonctions définissent les mêmes surfaces. Mais alors on a

$$d\theta_1^2 + d\theta_2^2 + d\theta_3^2 + d\theta_4^2 = rt\, du\, du_1.$$

Or, si l'on détermine convenablement les constantes qui figurent dans cette formule, il vient

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + rt\, du\, du_1,$$

x, y, z désignant les coordonnées de la développée moyenne de la surface définie en coordonnées d'O. Bonnet par la fonction ξ de u, u_1; ρ représentant la demi-somme des rayons de courbure de celle-ci.

Considérons le cas particulier où ξ satisfait à l'équation

$$rt = 4U'U'_1$$

U', U'_1 désignant les dérivées respectives des deux fonctions U, U_1.

Il vient alors

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = [d(U + U_1)]^2 + [d(i(U_1 - U))]^2 + d\rho^2.$$

Les surfaces de coordonnées respectives x, y, z; $U + U_1$, $i(U_1 - U)$, ρ sont évidemment applicables. Or, on vérifie que ces surfaces ne sont autres que les surfaces S', S''.

II

Surfaces S', S''.

Propriétés générales des surfaces S'. — Les coordonnées de ces surfaces ont été définies par les trois premières équations du système (1), ou encore par celles du système (10). Nous avons indiqué quelques-unes de leurs propriétés dans un travail précé-

dent (*). Nous allons les rappeler brièvement et les compléter.

La surface S′ peut être définie : *le lieu du centre d'une sphère variable passant par un point fixe, dont l'enveloppe admet cette surface pour développée moyenne ponctuelle.*

En effet, si l'on cherche la développée moyenne de la surface S_0 définie par l'équation

$$\xi = 2FF_1,$$

on obtient le système (10) qui définit les surfaces S′. On vérifie d'ailleurs que la sphère, dont le centre décrit S′ et qui a pour enveloppe S_0, passe constamment par l'origine. On constate encore que toutes les surfaces jouissant de la propriété indiquée font partie de la catégorie des surfaces S′.

D'après un théorème connu : si par chaque point d'une surface correspondant avec orthogonalité des éléments à une surface minima, on mène une parallèle à la normale de cette dernière surface; les développables de la congruence ainsi obtenue découpent sur la développée moyenne de cette congruence un système conjugué (**). Mais ici S′ correspond avec orthogonalité des éléments à une surface minima. D'ailleurs elle est la développée moyenne de la surface S_0 dont les cosinus directeurs de la normale sont définis au moyen des mêmes quantités u, u_1 que ceux de la surface minima. Nous pouvons en déduire cette conséquence : *Les développables de* S_0 *découpent la surface minima correspondante suivant un système conjugué.*

L'équation de ce système conjugué n'est autre que l'équation des lignes de courbure de S_0 c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} du^2 - \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} du_1^2 = 0$$

qui devient ici

$$F_1 F'' du^2 - FF_1'' du_1^2 = 0$$

équation qui s'intègre par des quadratures.

(*) Bulletin de la Société mathématique, t. XXXII, p. 178, 1904.

(**) Nous supposons ici S′ défini par le système (10).

Les formules (1) nous montrent encore que la surface S' est le lieu des points pris sur une parallèle à la normale d'une surface minima, menée par l'origine, à une distance proportionnelle à la racine de la valeur absolue des rayons de courbure de cette surface minima.

La surface S' étant le lieu du centre de la sphère variable qui admet S_0 pour enveloppe et passe d'ailleurs par un point fixe, donne la solution complète du problème suivant :

Trouver toutes les surfaces, développées moyennes ponctuelles des surfaces dont les normales se réfléchissent sur celle-là suivant des directions convergentes.

La congruence de droites formée par les rayons convergents après réflexion sur S', est définie par le système (1)

$$\frac{X - x}{v + v_1} = \frac{Y - y}{i(v_1 - v)} = \frac{Z - z}{vv_1 - 1}$$

x, y, z désignant les coordonnées de la surface dirimante S' et v, v_1 étant deux variables définies par les relations

$$v = \frac{F_1'}{F_1 - u_1 F_1'}, \qquad v_1 = \frac{F'}{F - u F'}.$$

D'autre part, la congruence des normales à la surface S_0 est donnée par le système

$$\frac{X - x}{u + u_1} = \frac{Y - y}{i(u_1 - u)} = \frac{Z - z}{uu_1 - 1}.$$

Le rapprochement des équations qui définissent ces deux congruences, nous montre que nous avons ici un système de rayons incidents et réfléchis analytiquement séparable.

Nous supposons ξ exprimé rationnellement en u et u_1.

Du reste cette proposition est susceptible d'être généralisée. Nous avons établi en effet (*), que toute congruence de rayons normales à une surface, se réfléchit sur sa développée moyenne

(*) Bulletin de la Société mathématique de France, t. XXXII, p. 173, 1904.

ponctuelle, suivant une congruence de droites analytiquement séparable de la précédente. On démontre également, que la surface et l'anticaustique sont analytiquement séparables.

Considérons un rayon incident émanant de l'origine et rencontrant la surface S′ en un point donné. On obtiendra le rayon réfléchi par la construction suivante. Menons les deux plans isotropes qui passent par le rayon incident. Ils coupent la surface suivant deux courbes planes, tangentes respectivement en leur point de rencontre à deux plans isotropes, distincts de ceux qui les contiennent. *L'intersection de ces deux plans donnera la direction du rayon réfléchi normale à la surface* S_0 (*).

Le système de rayons incidents et réfléchis que nous venons de considérer, nous amène à définir un couple de surface S′ qui jouit de quelques propriétés intéressantes.

Surfaces S′ associées. — Nous allons établir cette proposition : *Soient données deux sphères variables passant par l'origine, et assujetties, à varier de telle sorte que les rayons vecteurs correspondants des centres de chacune d'elles soient parallèles aux normales de l'enveloppe de l'autre ; quand le centre de l'une décrira la développée moyenne de son enveloppe, il en sera de même du centre de l'autre sphère.*

Désignons par F, F_1 deux fonctions respectives des variables u, u_1, par φ, φ_1 deux fonctions des variables v, v_1 et associons deux surfaces définies en coordonnées d'O. Bonnet par les équations

$$\xi = 2FF_1 \qquad \zeta = 2\varphi\varphi_1.$$

Nous avons vu que ces surfaces admettent pour développées moyennes les surfaces S′.

Supposons les fonctions et les variables précédentes, liées par les relations

$$(13)\quad v=\frac{F_1'}{F_1-u_1F_1'},\quad v_1=\frac{F'}{F-uF'};\quad \varphi=\frac{1}{F_1-u_1F_1'},\quad \varphi_1=\frac{1}{F-uF'}.$$

Le calcul donne alors pour expressions des coordonnées des centres, et pour rayons des sphères, les relations

(*) Ibid, p. 166.

$$(14)\quad x=-\frac{v+v_1}{\varphi\varphi_1},\quad y=-i\frac{v_1-v}{\varphi\varphi_1},\quad z=-\frac{vv_1-1}{\varphi\varphi_1},\quad \rho=\frac{vv_1+1}{\varphi\varphi_1};$$

$$x_1=-\frac{u+u_1}{FF_1},\quad y_1=-i\frac{u_1-u}{FF_1},\quad z_1=-\frac{uu_1-1}{FF_1},\quad \rho_1=\frac{uu_1+1}{FF_1}.$$

Ces deux sphères réalisent les conditions imposées. D'ailleurs, leurs deux centres décrivent deux surfaces S'. Il suffit pour s'en convaincre de remarquer que ces formules s'identifient avec celles du système (12). Comme d'autre part, à une sphère donnée ne correspondent qu'une sphère et sa symétrique, nous pouvons considérer la proposition comme démontrée.

Nous obtenons ainsi deux surfaces S' *qui réfléchissent deux à deux les rayons émanants d'un même foyer normalement à deux surfaces dont elles sont les développées moyennes ponctuelles, et de telle sorte, que les rayons incidents relatifs à chacune d'elles, soient parallèles aux rayons réfléchis par la seconde.*

Tels sont les couples de surfaces que nous voulions définir. La correspondance de leurs points est déterminée par les systèmes (13) et (14) et par celui que l'on obtient en permutant dans le système (13) les quantités u, u_1, F, F_1, F', F'_1 avec les quantités v, v_1, φ, φ_1, φ', φ'_1.

On trouve les relations

$$(15)\qquad \frac{\dfrac{\partial x}{\partial u}}{\dfrac{\partial x_1}{\partial v}}=\frac{\dfrac{\partial y}{\partial u}}{\dfrac{\partial y_1}{\partial v}}=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial u}}{\dfrac{\partial z_1}{\partial v}},\qquad \frac{\dfrac{\partial x}{\partial u_1}}{\dfrac{\partial x_1}{\partial v_1}}=\frac{\dfrac{\partial y}{\partial u_1}}{\dfrac{\partial y_1}{\partial v_1}}=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial u_1}}{\dfrac{\partial z_1}{\partial v_1}}.$$

Ces relations montrent d'abord (ce que d'ailleurs on pouvait prévoir) qu'aux points correspondants, les deux surfaces ont leurs plans isotropes parallèles.

Elles prouvent en outre, qu'aux points correspondants, les tangentes aux intersections des deux surfaces par les plans isotropes passant par ces points et l'origine, sont parallèles deux à deux. En effet, les relations précédentes indiquent que les tangentes des courbes de paramètres u, u_1 de la première surface sont parallèles aux tangentes des courbes de paramètres v, v_1 de la seconde. Or, nous avons établi, dans les articles précédemment cités, que les

paramètres u, u_1 ou, ce qui revient au même, les paramètres v_1, v sont ceux des intersections dont nous venons de parler.

Surfaces S′ *réelles*. — Posons

$$u = e^{\alpha + i\beta}, \qquad u_1 = e^{\alpha - i\beta}.$$

La condition nécessaire et suffisante, pour que les équations (2) qui définissent une surface quelconque S′, déterminent une surface réelle, est que les fonctions F^1, F_1^1 représentent des fonctions imaginaires conjuguées, quand on y considère α et β comme variables réelles.

Nous pouvons écrire

$$x = 2\cos\beta\sqrt{P^2+Q^2},\ y = 2\sin\beta\sqrt{P^2+Q^2},\ z = (e^{\alpha} - e^{-\alpha})\sqrt{P^2+Q^2};$$

P et Q désignant deux fonctions réelles de α, β vérifiant les relations

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = \frac{\partial Q}{\partial \beta}, \qquad \frac{\partial P}{\partial \beta} = -\frac{\partial Q}{\partial \alpha}.$$

Des équations précédentes nous déduisons les relations

$$y = x \operatorname{tang} \beta, \qquad z = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Nous concluons de là, que les courbes de paramètre β sont situées dans des plans passant par l'axe des z; tandis que les courbes de paramètre α sont tracées sur des cônes de révolution ayant pour axe cette même droite. A chaque valeur particulière de α correspond l'un de ces cônes. Quand on donne à α deux valeurs égales et de signes contraires, on obtient les deux nappes d'un même cône. α variant de $\pm\infty$ à 0, les nappes d'abord confondues avec l'axe des z, s'en écartent pour se rabattre et se confondre sur le plan des xy.

On ne peut guère pousser plus loin l'étude de la surface, tant qu'on ne fait pas d'hypothèses particulières sur la nature des fonctions P et Q. Sans les particulariser complètement, supposons qu'elles représentent des polynomes entiers en α et β.

Pour une valeur donnée de α la quantité

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{P^2 + Q^2}$$

passera par une série de maximum et de minimum correspondant à une série de valeurs β_1, β_2, β_3, etc. de β. Coupons les cônes par des cylindres de révolution correspondant à ces maximum et minimum. La courbe de paramètre α tournera autour de l'axe des x, oscillant d'abord entre les cercles, intersections des cylindres et du cône; puis, à partir d'une valeur donnée de β, s'éloignera constamment de l'origine en s'enroulant sur le cône.

Les courbes de paramètre β sont, nous l'avons vu, des courbes planes. Lorsque β augmente de 2π on obtient une nouvelle branche de la courbe située dans le même plan, et l'on se rend compte aisément que ces branches en nombre infini dans chaque plan rencontrent toutes le plan des xy, aux points définis par la relation $\alpha = 0$.

Pour chaque système de valeurs réelles de α, β vérifiant simultanément les équations

$$P = 0 \qquad Q = 0$$

on aura

$$x = y = z = 0.$$

La surface passe donc par l'origine. On a d'ailleurs en ce point

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Nous obtenons ainsi une série de nappes partant de l'origine, tangentiellement à autant de droites autour desquelles elles sont enroulées au voisinage du point de départ. Parmi ces nappes, les unes se dilatent d'abord, pour se replier ensuite et demeurer dans une région limitée; les autres au contraire se dilatent jusqu'à l'infini.

Surfaces S''. — Des systèmes (1), (2) et (3), on tire

$$x'' = 2(F + F_1), \quad y'' = 2i(F_1 - F), \quad z'' = 2(1 + uu_1)\sqrt{F'' F_1''}.$$

Si nous supprimons les accents, et désignons par φ, φ_1 deux fonctions arbitraires l'une de $x + iy$, l'autre de $x - iy$, nous pouvons remplacer le système précédent par l'équation unique

$$z = \frac{1 + \varphi\varphi_1}{2\sqrt{\varphi'\varphi_1'}}$$

qui donne la surface en coordonnées cartésiennes.

Nous avons été amenés à considérer la surface S', comme le lieu des centres d'une sphère passant par un point fixe. La relation

$$z''^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

nous engage à considérer S'' comme le lieu des centres d'une sphère variable tangente à un plan fixe et de même rayon que S' aux points correspondants. Dès lors, ces deux surfaces se présentent à nous, comme les deux cas extrêmes d'une famille de surfaces, lieux des centres d'une sphère variable tangente à une sphère de rayon γ variant de 0 à ∞, S', S'' correspondant à ces valeurs extrêmes. L'espace nous manque pour développer ces considérations.

Puisque pour S'' comme pour S', les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes de l'enveloppe de la sphère variable, les développables de cette enveloppe découperont S'' suivant un système de courbes conjuguées. Or, nous savons que l'équation aux dérivées partielles définissant ce système doit admettre les cinq solutions (*)

$$x, \quad y, \quad z, \quad x^2 + y^2 + z^2 - R^2, \quad R;$$

x, y, z désignant les coordonnées de la surface, R le rayon de la sphère variable.

Or on a ici $R = z$.

L'équation doit donc admettre les quatre solutions

$$x, \quad y, \quad z, \quad x^2 + y^2;$$

(*) Darboux, *Théorie des Surfaces*, t. II, l. IV, chapitre XV, p. 333.

Si l'on tient compte des relations

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 = 0, \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_1}\right)^2 = 0$$

équations qu'on vérifie immédiatement, il vient

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} \end{vmatrix} du^2 - \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u_1^2} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} \end{vmatrix} du_1^2 = 0.$$

D'où l'on tire

$$\frac{d^2}{du^2}\left(\frac{1}{\sqrt{F'F'_1}}\right) du^2 - \frac{d^2}{du_1^2}\left(\frac{1}{\sqrt{F'F'_1}}\right) du_1^2 = 0.$$

Cette équation qui définit le système cherché, définit par le fait même les lignes de courbure de l'enveloppe de la sphère dont le centre décrit S'' (*). On voit par là, que les lignes de courbure de cette enveloppe, aussi bien que celles de l'enveloppe relative à S' s'obtiennent par des quadratures.

Nous avons déjà signalé une des propriétés de ces surfaces. Si, à un point donné M pris sur une droite passant par l'origine, on associe sur la même droite un second point M_1, de telle sorte que les projections de ces points sur le plan des xy se correspondent par inversion, relativement à un cercle ayant un centre à l'origine, lorsque le point M décrira une surface S'', il en sera de même du point décrit par M_1.

Surfaces S'' *réelles*. — Posons comme précédemment

$$u = e^{\alpha + i\beta}, \qquad u_1 = e^{\alpha - i\beta}.$$

(*) Il est toujours question de la sphère tangente à un plan fixe, ici le plan des xy.

Les surfaces S″ réelles s'obtiendront en prenant pour F, F_1 des fonctions conjuguées, et par conséquent pour x, y des fonctions harmoniques réelles de α, β.

On aura donc, en supprimant les accents,

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{\partial y}{\partial \beta}, \qquad \frac{\partial x}{\partial \beta} = -\frac{\partial y}{\partial \alpha}$$

et l'équation de S″ pourra s'écrire en coordonnées cartésiennes

$$z = \frac{\cos i\alpha}{2\sqrt{\frac{\partial(\alpha\beta)}{\partial(xy)}}}.$$

Il suffira de prendre pour α et β deux fonctions harmoniques réelles d'x et d'y.

Remarquons tout de suite les formules

$$\frac{\partial(xy)}{\partial(\alpha\beta)} = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2;$$

$$dx^2 + dy^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2\right](d\alpha^2 + d\beta^2);$$

$$z = \cos i\alpha\sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{d\alpha^2 + d\beta^2}} = \cos i\alpha\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2}.$$

Cette dernière formule montre que z ne s'annulera que pour les systèmes de valeurs de α, β vérifiant simultanément les équations

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = 0.$$

On aura alors

$$dx^2 + dy^2 = 0.$$

D'où

$$dx = 0, \qquad dy = 0.$$

La surface ne rencontrera donc le plan des xy qu'en des points isolés, d'où partiront autant de nappes tangentes à autant de droites perpendiculaires à ce plan. Ces droites perpendiculaires à un même plan correspondent aux droites concourantes que nous avons rencontrées, lorsque nous étudiions les surfaces S' réelles.

On peut considérer la surface comme engendrée par les courbes de paramètre α.

On a alors

$$z = \cos i\alpha \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{d\beta}.$$

Supposons le plan de la courbe, tournant avec une vitesse uniforme autour de l'axe des z. La vitesse de déplacement du point décrivant la courbe de paramètre α peut alors s'exprimer par la formule

$$v = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{d\beta}.$$

D'où

$$z = v \cos i\alpha.$$

Ici d'ailleurs α a une valeur constante. On voit que la vitesse de déplacement du point décrivant, sur le cône de révolution de paramètre α est proportionnelle à sa hauteur au-dessus du plan des xy.

Relations entre les surfaces S', S''. — Nous pouvons, dans les formules qui déterminent les coordonnées de ces surfaces remplacer les fonctions F, F_1 par les fonctions log F, log F_1.

Dès lors on aura le système

$$x' = (u + u_1)\sqrt{\frac{F'F'_1}{FF_1}}, \quad y' = i(u_1 - u)\sqrt{\frac{F'F'_1}{FF_1}}, \quad z' = (uu_1 - 1)\sqrt{\frac{F'F'_1}{FF_1}};$$

$$x'' = \log FF_1, \qquad y'' = i \log \frac{F_1}{F}, \qquad z'' = (uu_1 + 1)\sqrt{\frac{F'F'_1}{FF_1}}.$$

Supposons maintenant qu'on prenne pour F, F_1 des fonctions algébriques de u, u_1, les quantités x', y', z', z'' seront algébriques, tandis que les quantités x'', y'' seront transcendantes.

Les formules précédentes nous permettent donc de déterminer des surfaces algébriques applicables sur des surfaces transcendantes.

A chaque point de S′ correspond une infinité de points de S″, tous de même hauteur, au-dessus du plan des xy. On pourra donc considérer S′ comme roulant sur une sorte de terrain ondulé.

Si l'on veut établir un lien étroit entre les surfaces S′, S″ il faut les considérer comme donnant deux solutions particulières du problème suivant :

Soit donnée une sphère variable tangente à une sphère fixe de centre F *et de rayon* γ, *tangente elle-même au plan des xy à l'origine. On demande de déterminer la sphère variable de telle sorte que la surface décrite par son centre se déforme en restant applicable sur elle-même quand* γ *prend la série des valeurs qui vont de* 0 *à l'infini.*

On se rend compte aisément que la congruence des rayons émanants de F se réfléchit sur cette surface, normalement à l'enveloppe de la sphère variable. Le problème revient donc à étudier un système de rayons incidents et réfléchis dont l'une des congruences converge en un point qui tend vers l'infini.

Supposons le problème résolu ; et soient x, y, z les coordonnées de la surface dirimante, ρ le rayon de la sphère variable. Ces quantités seront fonctions des deux variables u, u_1 de γ rayon de la sphère fixe et d'un certain nombre de fonctions arbitraires de ces quantités. Si dans les formules qui donnent x, y, z nous faisons successivement $\gamma = 0$ $\gamma = \infty$ nous obtiendrons les coordonnées d'un ensemble de couples de surfaces applicables dont S′, S″ feront nécessairement partie. Pour obtenir ces surfaces, il suffira donc de déterminer convenablement les valeurs des fonctions arbitraires quand on y fait $\gamma = 0$ $\gamma = \infty$.

Or, nous pourrons les déterminer par les conditions suivantes : Nous exigerons, qu'aux points correspondants, le rayon de la sphère variable soit le même pour $\gamma = 0$ et pour $\gamma = \infty$. Nous demanderons encore que pour $\gamma = 0$ la surface dirimante soit la développée moyenne ponctuelle de l'anticaustique du foyer F. Nous avons montré ailleurs que cette dernière condition équivaut à demander que le système des rayons incidents et réfléchis soit analytiquement séparable.

On vérifie que le couple des surfaces S', S'' réalise seul ces hypothèses. Il donne donc un commencement de solution du problème posé plus haut, problème que nous nous permettons de signaler à l'attention des géomètres.

Dans un prochain article, nous ferons l'application des résultats que nous venons d'exposer à un système particulier de surfaces.

SURFACE ALGÉBRIQUE

applicable sur une surface transcendante

PAR

M. de MONTCHEUIL

Dans le travail précédent, nous avons établi un système de formules qui définit les coordonnées d'un couple de surfaces applicables, dont l'une est algébrique, l'autre transcendante.

Nous nous proposons d'étudier un couple de surfaces réelles comprises dans cet ensemble.

Le premier des six couples de surfaces que nous avons déterminés peut être défini par le système

$$x = (u + u_1)\sqrt{\frac{(uF' - a)(u_1F'_1 - a_1)}{uu_1}},$$

$$y = i(u_1 - u)\sqrt{\frac{(uF' - a)(u_1F'_1 - a_1)}{uu_1}},$$

$$z = (uu_1 - 1)\sqrt{\frac{(uF' - a)(u_1F'_1 - a_1)}{uu_1}};$$

$$x_1 = F + F_1 - a\log u - a_1 \log u_1,$$

$$y_1 = i(F_1 - F + a\log u - a_1\log u_1),$$

$$z_1 = (uu_1 + 1)\sqrt{\frac{(uF' - a)(u_1F'_1 - a_1)}{uu_1}};$$

F, F_1 désignant deux fonctions respectives de u et de u_1, F', F'_1 les dérivées premières de ces fonctions, a, a_1 deux constantes quelconques. Il suffit de remplacer les quantités $F - a \log u$, $F_1 - a_1 \log u_1$ par les quantités F, F_1, pour retrouver les formules que nous avons établies, dans l'étude à laquelle nous faisons allusion.

Posons :

$$2a = 2a_1 = R, \qquad 2F = Ru, \qquad 2F_1 = Ru_1,$$
$$u = e^{\alpha - i\beta}, \qquad u_1 = e^{\alpha - i\beta},$$

et introduisons ces valeurs des variables, des fonctions et de leurs dérivées dans le premier système. Il vient

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= R \cos\beta \sqrt{(e^{\alpha} - \cos\beta)^2 + \sin^2\beta}, \\ y &= R \sin\beta \sqrt{(e^{\alpha} - \cos\beta)^2 + \sin^2\beta}, \\ z &= -iR \sin i\alpha \sqrt{(e^{\alpha} - \cos\beta)^2 + \sin^2\beta}; \\ x_1 &= R(\cos\beta e^{\alpha} - \alpha), \\ y_1 &= R(\sin\beta e^{\alpha} - \beta), \\ z_1 &= R \cos i\alpha \sqrt{(e^{\alpha} - \cos\beta)^2 + \sin^2\beta}; \end{aligned}$$

Nous allons étudier ce couple de surfaces que nous appellerons surfaces S et surfaces S_1, supprimant d'ailleurs les indices des coordonnées quand nous considérerons isolément S_1.

Si nous désignons par ρ le rayon vecteur de S on vérifie que l'élément linéaire commun aux deux surfaces s'exprime par la double relation

$$(2) \qquad ds^2 = \frac{\rho^2(d\alpha^2 + d\beta^2)}{\cos^2 i\alpha} + d\rho^2 = \frac{z_1^2(d\alpha^2 + d\beta^2)}{\cos^2 i\alpha} + dz_1^2.$$

I

Surface S_1

Le relation (2) montre que le réseau des courbes de paramètre α et β tracé sur la surface se projette sur le plan des xy, suivant un réseau isotherme. Nous allons le considérer tout d'abord.

Réseau plan isotherme. — Les courbes qui le composent sont définies par le système

$$(3) \qquad x = R(\cos \beta e^{\alpha} - \alpha), \qquad y = R(\sin \beta e^{\alpha} - \beta).$$

Posons :

$$x_0 = R(1 - \alpha), \qquad d = R(e^{\alpha} - 1).$$

En tenant compte de ces relations, on peut remplacer le système (3) par le suivant

$$(4) \qquad x = (R + d) \cos \beta - R + x_0, \qquad y = (R + d) \sin \beta - R\beta.$$

Ces relations nous révèlent immédiatement la nature des courbes de paramètre α.

Soit donné un cercle de rayon R tangent à la droite déterminée par la relation

$$x = x_0 = R(1 - \alpha),$$

et ayant son centre sur l'axe des x. Considérons sur cet axe un point lié au cercle et distant de son centre de la quantité $R + d$; quand le cercle roulera sur la droite, le point considéré décrira une courbe de la famille de paramètre α.

Les courbes de paramètre α du système isotherme forment donc une famille de cycloïdes allongées et de cycloïdes raccourcies, décrites par un point lié invariablement au cercle et situé à la distance $R + d$ de son centre.

Lorsque α varie, le rayon du cercle ne change pas, mais la droite sur laquelle il roule se déplace perpendiculairement à l'axe des x et va de $+\infty$ à $-\infty$, tandis que α varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Pour $\alpha = 0$, on a : $x_0 = R$, $d = 0$,

et le point décrivant parcourt une cycloïde.

Les courbes de paramètre β vérifient l'équation

$$x = (y + R\beta) \operatorname{cotg} \beta - R \log \frac{y + R\beta}{R \sin \beta}.$$

D'où

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(y + R\beta) \operatorname{cotg} \beta - R}{y + R\beta}.$$

Posons :

$$X = x - (y + R\beta) \operatorname{cotg} \beta, \qquad Y = \frac{y + R\beta}{\sin \beta};$$

transformation qui revient à faire descendre l'origine de la quantité $R\beta$, le long de l'axe des y, puis à mener par ce point une parallèle à l'axe des x et une droite inclinée sur celle-ci de l'angle β (*).

Nous obtenons alors pour équation de la courbe en coordonnées obliques

$$Y = R l^{-\frac{X}{R}}.$$

On vérifie que la projection, dans le système d'axes obliques, de la portion de tangente comprise entre le point de contact et l'axe des x a une valeur constante R.

Nous supposons, bien entendu, la projection effectuée parallèlement à l'axe des y. Cette courbe admet pour asymptote le nouvel axe des x d'ailleurs parallèle à l'ancien.

Si l'on revient aux axes primitifs, on constate que pour β

(*) Cette transformation tombe en défaut quand on a $\beta = 2k\pi$, k désignant un nombre entier.

compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, la courbe tangente à son asymptote au point $x = +\infty$ monte d'un mouvement continu de $y = -R\beta$ à $y = +\infty$, en s'avançant d'abord vers la région des x négatifs, pour rebrousser chemin à un moment donné, vers celle des infinis positifs de x et de y.

Dans le cas où β est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, la courbe suit d'abord la même direction que précédemment, mais au lieu de revenir en arrière, elle va d'un mouvement continu vers la région des infinis négatifs de x et positifs de y.

Lorsque β varie de π à 2π, on trouve deux branches de formes identiques aux précédentes ayant des asymptotes de même direction; mais ces courbes sont les symétriques des précédentes par rapport à des axes parallèles à leurs asymptotes. Ces courbes n'ont d'ailleurs aucun point d'inflexion.

Si on déplace ces courbes de façon que leurs asymptotes se confondent, elles forment une gerbe composée de deux sortes de tiges. Les unes, d'abord sensiblement confondues avec l'axe central de la gerbe, s'en écartent graduellement en montant toujours vers le haut; les autres, après s'être élevées avec les premières, retombent en formant panache. Ce sont ces courbes qui, replacées dans leur position primitive, coupent orthogonalement la famille des cycloïdes allongées et raccourcies; et le réseau isotherme formé des deux familles figure assez bien le parquet d'un édifice reposant sur une série de colonnes et dont (nous le verrons dans la suite) la surface S_1 nous présente l'aspect.

Courbes de paramètre α tracées sur la surface. — Nous savons déjà que ces courbes se projettent sur le plan des xy suivant une série de cycloïdes allongées et raccourcies.

Eliminons β entre les deux équations du système (1) qui déterminent les coordonnées x, z de la surface S_1. Nous obtenons l'équation

$$z^2 + R\cos^2 i\alpha\,[2x - R(e^{2\alpha} + 1 - 2\alpha)] = 0,$$

qui est celle d'une parabole, ayant pour axe celui des x et s'ouvrant vers les x négatifs. D'ailleurs les relations

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} = -\mathrm{R} \sin \beta e^{\alpha}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{\mathrm{R} \sin \beta \cos i\alpha\, e^{\alpha}}{\sqrt{(e^{\alpha} - \cos \beta)^2 + \sin^2 \beta}},$$

montrent que x a un maximum et z un minimum pour $\beta = 2\kappa\pi$, tandis que x a un minimum et z un maximum pour $\beta = (2\kappa + 1)\pi$.

D'ailleurs on se rend compte que pour deux valeurs égales et de signes contraires de β, x et z ont les mêmes valeurs.

De l'ensemble de ces constatations nous pouvons conclure que les courbes de paramètre α se projettent sur le plan des xz, suivant des arcs de paraboles ayant leur concavité tournée vers la région des x négatifs. Le point décrivant va et vient sur le même arc limité aux points de coordonnées respectives

$$(5) \qquad \begin{array}{ll} x = \mathrm{R}(e^{\alpha} - \alpha), & x = -\mathrm{R}(e^{\alpha} + \alpha), \\ z = \pm \mathrm{R} \cos i\alpha (e^{\alpha} - 1); & z = \mathrm{R} \cos i\alpha (e^{\alpha} + 1). \end{array}$$

Quand β croît à partir de 0, le point décrivant part de l'extrémité de l'arc de parabole défini par le premier système, et atteint l'extrémité définie par le second, lorsqu'on a $\beta = \pi$; β continuant à croître jusqu'à 2π, le point décrit le même arc en sens inverse.

z étant supposé toujours positif, on prendra le signe $+$ ou le signe $-$ dans la relation du premier système, qui détermine sa valeur, selon qu'on aura α supérieur ou inférieur à 0.

Il nous reste à étudier le déplacement du point décrivant par rapport au plan des yz.

La relation

$$\frac{\partial y}{\partial \beta} = \mathrm{R}(\cos \beta e^{\alpha} - 1)$$

montre que y aura un maximum et un minimum, ou au contraire croîtra d'une façon continue, selon que l'on aura α supérieur ou inférieur à 0.

Considérons le premier cas. On obtiendra alors la valeur maximum de y pour une valeur β_0 de β vérifiant la relation $\cos \beta_0 = e^{-\alpha}$, et d'ailleurs comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. On aura le minimum pour la valeur de β

$$\beta_1 = 2\pi - \beta_0.$$

Les valeurs correspondantes de y sont données par les relations

$$y_0 = R(\text{tang}\,\beta_0 - \beta_0),$$
$$y_1 = R(\text{tang}\,\beta_1 - \beta_1) = R(\beta_0 - 2\pi - \text{tang}\,\beta_0).$$

Elles montrent que les points qu'elles définissent sont situés de part et d'autre du plan des $x\,z$.

Nous pouvons maintenant nous rendre compte de la forme de la courbe. Quand β varie de 0 à 2π, elle part normalement au plan des $x\,z$ dans le sens des y positifs, s'avance jusqu'à la distance y_0, puis revient en arrière, traverse le plan des $x\,z$, s'en éloigne jusqu'à la distance y_1, puis revient vers le plan $y = -2\pi R$ qu'elle rencontre normalement. Le point de départ et le point d'arrivée ont pour projection sur le plan des $x\,z$ la même extrémité de l'arc de parabole dont nous avons précédemment parlé. Cette courbe admet pour plan de symétrie le plan $y = -\pi R$. Quand β varie de 2π à 4π la courbe déjà décrite se reproduit, déplacée de la quantité $2\pi R$ perpendiculairement au plan des $x\,z$.

Les courbes que nous venons de décrire sont celles dont les projections sur le plan des $x\,z$ sont tracées par un point extérieur au cercle de rayon R. On obtient les courbes correspondant au cas où le point est intérieur au cercle en prenant α négatif.

Étudions en particulier la courbe du paramètre α qu'on obtient en posant $\alpha = 0$, et qui se projette sur le plan des $x\,z$ suivant une cycloïde.

Les coordonnées de la courbe sont données par les formules

$$x = R\cos\beta, \qquad y = R(\sin\beta - \beta), \qquad z = 2R\sin\frac{\beta}{2}.$$

A l'aide de ces formules, on vérifie sans peine les résultats suivants : Quand β croît de 0 à π la courbe part d'un point de l'axe des x distant de la quantité R de l'origine. D'abord normale au plan des $x\,y$, elle s'élève en inclinant vers la région des x et des y négatifs. Pour $\beta = \pi$ elle atteint le point de coordonnées

$$x = R, \qquad y = -R\pi, \qquad z = 2R.$$

C'est un point de hauteur maximum au-dessus du plan des $x\,y$ et pour lequel x atteint sa valeur minimum. Le plan $y = -\pi R$ étant un plan de symétrie pour la courbe, quand β croîtra de π à 2π on obtiendra la portion symétrique de celle que nous venons de décrire.

Nous pouvons nous représenter la courbe tout entière comme formée d'une série indéfinie d'arceaux identiques, dont les points de rencontre avec le plan des $x\,y$ sont situés à une distance $2\pi R$ les uns des autres, sur une perpendiculaire à l'axe des x éloignée de l'origine de la quantité R. Chacun de ces arceaux se projette sur le plan des $x\,y$ suivant une cycloïde, et sur le plan des $x\,z$ suivant un arc de parabole qui a pour équation

$$z^2 + 2Rx - 2R^2 = 0.$$

L'arc est limité aux points de coordonnées

$$x = R, \quad z = 0; \qquad\qquad x = -R, \quad z = 2R.$$

Courbes de paramètre β. — Nous avons les trois relations

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = R(\cos\beta e^{\alpha} - 1), \qquad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = R \sin\beta e^{\alpha},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = R\,\frac{(2e^{3\alpha} - \cos\beta e^{2\alpha} + \cos\beta)(e^{\alpha} - \cos\beta) + \sin^2\beta\,(e^{2\alpha} - 1)}{2\sqrt{(e^{\alpha} - \cos\beta)^2 + \sin^2\beta}}\,e^{-\alpha}.$$

Considérons d'abord quelques courbes particulières.

Pour $\beta = 0$ on a les relations suivantes :

$$x = R(e^{\alpha} - \alpha), \qquad y = 0, \qquad z = \pm R \cos i\alpha (e^{\alpha} - 1);$$

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = R(e^{\alpha} - 1), \qquad \frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{R(2e^{3\alpha} - e^{2\alpha} + 1)}{2e^{\alpha}}.$$

Nous supposons toujours z positif.

La quantité $\frac{\partial z}{\partial \alpha}$ ne s'annule pour aucune valeur positive de e^{α}, les seules auxquelles correspondent des points réels de la courbe.

Ces remarques faites, il est aisé de se rendre compte de la forme de la courbe. α variant de 0 à $+\infty$ la courbe située tout entière dans le plan des xz part d'un point de l'axe des x situé à une distance R de l'origine, perpendiculairement à cet axe, et s'éloigne indéfiniment dans la direction des x et des z positifs, sans passer par aucun maximum ni minimum des valeurs de ses coordonnées. La tangente d'abord perpendiculaire au plan des xy tend à reprendre cette direction après avoir passé par un point d'inflexion.

Quand α varie de 0 à $-\infty$ on trouve une courbe présentant les mêmes caractères que la précédente. Il faut prendre alors le signe $-$ devant l'expression de z. A mesure que cette dernière courbe s'éloigne de l'axe des x elle tend à se confondre avec la chaînette de coordonnées

$$x = -R\alpha, \qquad z = R(\cos i\alpha - 1),$$

quantités qui vérifient l'équation

$$z = \frac{R}{2}\left(e^{\frac{x}{R}} + e^{-\frac{x}{R}}\right) - \frac{R}{2}. \tag{6}$$

Faisons maintenant $\beta = \pi$.

Cette courbe est définie par le système

$$x = -R(e^{\alpha} + \alpha), \qquad y = -\pi R, \qquad z = R\cos i\alpha\,(e^{\alpha} + 1).$$

On trouve d'ailleurs

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = -R(e^{\alpha} + 1), \qquad \frac{\partial z}{\partial \alpha} = R\,\frac{2e^{3\alpha} + e^{2\alpha} - 1}{2}\,e^{-\alpha}.$$

Nous avons encore ici une courbe plane située dans un plan parallèle à celui des xz. Nous devons remarquer que la quantité $\frac{\partial z}{\partial \alpha}$ ne s'annule que pour une seule valeur de α, réelle d'ailleurs et négative.

Quand α croît de $-\infty$ à $+\infty$, x décroît constamment de $+\infty$ à $-\infty$, z décroît de $+\infty$ jusqu'à une valeur minimum, à partir de

laquelle il croît pour atteindre le sommet de l'arceau situé dans le plan de la courbe, puis il continue à croître jusqu'à l'infini. Cette courbe elle aussi tend à se confondre avec une chaînette située dans son plan et dont l'équation est donnée par la relation (6) où l'on change le signe devant le terme $\frac{R}{2}$.

Si l'on pose $\beta = \frac{\pi}{2}$, on aura

$$x = -R\alpha, \qquad y = Re^{\alpha} - \frac{\pi R}{2}, \qquad z = R \cos i\alpha \sqrt{e^{2\alpha} + 1}.$$

Pour cette courbe comme pour la précédente, quand α croîtra de $-\infty$ à $+\infty$, x variera de $+\infty$ à $-\infty$, tandis que z partira de $+\infty$, passera par un minimum pour $e^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, et croîtra de nouveau jusqu'à l'infini.

Pendant ce temps y croîtra constamment de la valeur $-\frac{\pi R}{2}$ jusqu'à l'infini.

Pour $\beta = \frac{3\pi}{2}$ on trouve une courbe symétrique de la précédente par rapport au plan $y = -\pi R$, c'est-à-dire au plan qui contient le sommet d'un des arceaux de la surface.

Ces courbes particulières nous renseignent suffisamment sur la nature des autres courbes de paramètre β. Dans le voisinage des valeurs de β que nous venons de considérer, les courbes déterminées par ces valeurs se comporteront comme les courbes particulières étudiées tout à l'heure. Il faut toutefois remarquer que les courbes de paramètre $\beta = 2k\pi$ jouissent d'un caractère qui leur est propre. Ce sont les seules qui atteignent le plan des xy et le touchent en des points de rebroussement.

Génération de la surface S_1. — Le caractère saillant de cette surface est de posséder une série indéfinie de points singuliers, où elle rencontre normalement le plan des xy à des intervalles égaux situés sur une même droite.

La relation

$$z = R \cos i\alpha \sqrt{(e^{\alpha} - \cos \beta)^2 + \sin^2 \beta},$$

montre en effet que z ne s'annule qu'en des points isolés définis par le système $\beta = 2\kappa\pi$, $e^{\alpha} = 1$.

On a d'ailleurs en ces points $\frac{dz}{ds} = 1$, relation qui montre que toutes les courbes tracées sur la surface et rencontrant le plan des $x\,y$ sont normales à ce plan.

Ces points sont les extrémités des arceaux dont nous avons parlé précédemment.

Avec ces données nous pouvons tracer un canevas qui nous permettra de nous faire une idée sommaire de la surface. Afin de faciliter cette représentation nous supposerons que la surface S_1 a tourné de 90° autour de l'axe des z.

Considérons maintenant la famille de chaînettes définies par l'équation

$$z = \frac{R}{2}\left(e^{\frac{y}{R}} + e^{-\frac{y}{R}}\right) - \frac{R \cos \beta}{2}.$$

Ces courbes, que nous supposons tracées dans un plan quelconque parallèle à celui des $y\,z$ sont de forme identique. Elles ont toutes pour axe une parallèle à l'axe des z tracée dans le plan des $y\,z$, et ne différant que par la distance de leur sommet au plan des $x\,y$. Or, on vérifie que les courbes de paramètre β de la surface S_1 tendent toutes à se confondre avec une des chaînettes que nous venons de déterminer, lorsque z et y tendent vers l'infini.

Cette remarque faite, sur une droite tracée dans le plan des $x\,y$ parallèlement à l'axe des x et en avant, élevons une série d'arceaux identiques se projetant suivant des cycloïdes, sur le plan des $x\,y$, et suivant des arcs de parabole sur le plan des $y\,z$.

Du pied de ces arceaux, et dans des plans parallèles à celui des $y\,z$, traçons des courbes s'élevant normalement au plan des $x\,y$, se dirigeant vers la région des infinis négatifs de y, passant par un point d'inflexion, puis se redressant pour se rapprocher indéfiniment de la chaînette correspondante.

Cette courbe, remarquons-le, est le lieu d'une des extrémités des arcs de parabole, points dont les coordonnées sont définies par le système (5), où l'on devra tenir compte du changement d'axes coordonnées. Elle est en même temps le lieu des points qui ont

pour projections sur le plan des $x\,y$ les sommets des boucles des cycloïdes allongées.

Du même pied de l'arceau, nous devons faire partir encore une seconde branche, continuation de la première courbe, correspondant aux valeurs négatives de α. Cette courbe aura une forme assez semblable à la première. Elle est le lieu des minimum de hauteur au-dessus du plan des $x\,y$, des courbes qui se projettent sur le plan des $x\,y$ suivant des cycloïdes raccourcies de rayon R.

Nous pouvons compléter ce réseau en traçant les courbes planes passant par les sommets des arceaux et qui, partant de $y = \infty$, $z = -\infty$ tangentiellement à la chaînette correspondante, descendent en s'avançant vers l'arceau, pour se diriger ensuite vers la région des infinis positifs de y et de z. Nous avons vu qu'avant d'atteindre le sommet de l'arceau elles ont dû passer par un minimum de hauteur.

Ce canevas ainsi tracé, imaginons un tissu fixé à une très grande hauteur le long de la surface, lieu des chaînettes de paramètre β. Si nous le supposons appliqué sur les courbes que nous venons de construire, la surface S_1 nous apparaîtra comme une sorte d'édifice formé de galeries parallèles en nombre illimité.

Pour s'en faire une idée plus précise il faudrait tenir compte des bourrelets engendrés par la déformation des boucles des courbes de paramètre α, mais une étude plus détaillée nous entraînerait trop loin.

II

Surface S

Cette surface est définie par le système

$$\frac{x}{\cos\beta} = \frac{y}{\sin\beta} = \frac{z}{-i\sin i\alpha} = \mathrm{R}\sqrt{(e^{\alpha} - \cos\beta)^2 + \sin^2\beta}.$$

Il est facile de déterminer son équation en coordonnées polaires. Posons

$$x = \rho\cos\beta\sin\theta, \qquad y = \rho\sin\beta\sin\theta, \qquad z = \rho\cos\theta,$$
$$\rho = \mathrm{R}\cos i\alpha\sqrt{(e^{\alpha} - \cos\beta)^2 + \sin^2\beta}.$$

Ce système combiné avec le système précédent nous donne

$$e^{\alpha} = \operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}, \qquad \rho = \mathrm{R}\,\frac{1+\operatorname{cotg}^2\frac{\theta}{2}}{2\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}}\sqrt{\left(\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}-\cos\beta\right)^2+\sin^2\beta}:$$

Telle est l'équation cherchée. D'ailleurs α étant fonction de θ définira la même famille de courbes, et, dès lors, on pourra considérer comme définissant la surface en coordonnées polaires, la relation

$$(7) \qquad \rho = \mathrm{R}\cos i\alpha\sqrt{(e^{\alpha}-\cos\beta)^2+\sin^2\beta},$$

relation qui fait partie du système (1) et définit le z de la surface S_1.

Pour une raison identique la relation

$$(8) \qquad r = \mathrm{R}\sqrt{(e^{\alpha}-\cos\beta)^2+\sin^2\beta}$$

nous donnera en coordonnées polaires les projections des points de la surface sur le plan des $x\,y$.

Nous allons étudier d'abord les courbes de paramètre α.

Courbes de paramètre α. — L'équation (7) nous permet d'affirmer immédiatement que ces courbes sont des courbes fermées, symétriques par rapport au plan des $x\,y$, et tracées sur des cônes de révolution ayant pour sommet l'origine et pour axe celui des z. Elles rencontrent ce plan normalement en deux points qui sont ceux des distances maximum et minimum à l'origine. Ces courbes sont donc comprises entre les deux sphères concentriques de rayons

$$\rho = \pm\,\mathrm{R}\cos i\alpha\,(e^{\alpha}-1), \qquad \rho = \mathrm{R}\cos i\alpha\,(e^{\alpha}+1).$$

L'équation (8) montre que les courbes de projection sur le plan des $x\,y$ sont des courbes fermées admettant l'axe des x pour axe de symétrie. Elles ont sur cet axe leur maximum et leur minimum de

distance à l'origine et sont comprises entre les deux cercles concentriques

$$r = \pm R(e^{\alpha} - 1), \qquad r = R(e^{\alpha} + 1).$$

On prendra le signe + ou le signe — dans la première équation, selon que l'on aura α plus grand ou plus petit que 0. Dans le premier cas, la différence des rayons des cercles sera constante et égale à 2R. Quand α croîtra indéfiniment la courbe comprise entre ces deux cercles tendra à prendre la forme d'un cercle concentrique aux deux autres.

Pour $\alpha < 0$ la somme des rayons est constante et égale à 2R. On voit qu'alors la longueur de l'axe de symétrie des courbes est constante. Il se déplace et l'une de ses extrémités atteint l'origine pour $\alpha = 0$.

La courbe satisfait à l'équation

$$x = R \cos\beta \sqrt{(e^{\alpha} - \cos\beta)^2 + \sin^2\beta},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} = - R \sin\beta \frac{e^{2\alpha} - 3\cos\beta e^{\alpha} + 1}{\sqrt{(e^{\alpha} - \cos\beta)^2 + \sin^2\beta}}.$$

Quand e^{α} satisfait aux inégalités $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < e^{\alpha} < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, il y a une valeur de $\cos\beta$ satisfaisant à la relation $\cos\beta = \frac{2}{3}\cos i\alpha$ et donnant par suite $\frac{\partial x}{\partial \beta} = 0$.

Il y aura donc un point de chaque côté de l'axe des x pour lequel x atteindra une valeur maximum.

Nous pouvons nous représenter les courbes de paramètre α tracées sur le plan des xy, comme des ovales ayant pour grand axe celui des x. Seulement celles dont les paramètres satisfont aux inégalités précédentes offrent cette particularité, qu'elles subissent une dépression à l'un des sommets de leur axe, dépression qui a pour effet de rapprocher cette extrémité de l'origine.

On peut réaliser ces courbes au moyen de la construction suivante : A partir de l'origine, prenons une longueur représentée par Re^{α} dans la direction des x négatifs ; puis, sur une droite partant de la même origine et faisant un angle β avec la direction des x positifs, prenons une longueur R au-dessus de l'axe des x. Ces deux droites déterminent un parallélogramme. Prenons maintenant sur la seconde droite, prolongée s'il le faut, et toujours dans la même direction, une longueur égale à la diagonale du parallélogramme passant par l'origine, l'extrémité de ce segment décrira la courbe plane de paramètre α.

On a z, supérieur, inférieur ou égal à 0, en même temps que α. D'où l'on conclut que chaque courbe de paramètre α est tout entière d'un même côté par rapport au plan des xy.

Considérons en particulier la courbe définie par la relation $\alpha = 0$. On a pour cette courbe $z = 0$.

C'est donc la courbe d'intersection de la surface avec le plan des xy. Elle a pour équation $r = 2R \sin\frac{\beta}{2}$.

Une particularité la distingue des autres courbes planes de paramètre α. Pour cette courbe la dépression dont nous avons parlé s'est transformée en un point singulier situé à l'origine.

Courbes de paramètre β. — Ce sont des courbes planes passant par l'axe des z et définies en coordonnées cartésiennes par le système

$$r = \pm R\sqrt{(e^{\alpha} - \cos\beta)^2 + \sin^2\beta},$$
$$z = \pm iR \sin i\alpha \sqrt{(e^{\alpha} - \cos\beta)^2 + \sin^2\beta}.$$

En associant de toutes les façons possibles les signes qui précèdent les expressions de r et de z, nous aurons quatre branches de courbes qui sont symétriques les unes aux autres par rapport aux deux axes ou par rapport à l'origine. Il nous suffit donc d'étudier une des déterminations de ces signes. Nous allons prendre le signe + devant chaque radical.

Nous pouvons remarquer que si dans les formules précédentes on change e^{α} en $e^{-\alpha}$ et $\cos\beta$ en $-\cos\beta$, r gardera la même valeur et z change seulement de signe. D'où nous tirons cette conclusion,

qu'une courbe de paramètre β étant déterminée, celle de paramètre $\beta + \pi$ (évidemment située dans le même plan) sera la symétrique de la précédente par rapport à l'origine. La portion de celle-ci qui correspond aux valeurs de e^α supérieures à 0, a pour symétrique la portion de celle-là déterminée par les valeurs de e^α inférieures à 0 et réciproquement.

D'ailleurs r et z ne changent pas de valeur quand on change β en $-\beta$. On voit qu'il nous suffit d'étudier les courbes pour lesquelles on a $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Nous avons les relations

$$\frac{\partial r}{\partial \alpha} = R \frac{(e^\alpha - \cos\beta)\, e^\alpha}{\sqrt{(e^\alpha - \cos\beta)^2 + \sin^2\beta}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = -\frac{R}{2} \frac{(2e^{2\alpha} + e^\alpha + 1)(e^\alpha - 1)^2 + (1 - \cos\beta)\, e^\alpha (3e^{2\alpha} + 1)}{e^\alpha \sqrt{(e^\alpha - \cos\beta)^2 + \sin^2\beta}}.$$

Cette dernière formule montre que, sauf pour la valeur spéciale $\beta = 0$, $\frac{\partial z}{\partial \alpha}$ ne s'annule pour aucune valeur finie de e^α. On en conclut que pour les courbes de paramètre β différent de 0, z n'a ni maximum ni minimum. Cela posé, étudions la marche de la courbe.

Prenons d'abord le signe $+$ devant le radical qui figure dans l'expression de r et le signe $-$ devant celui qui figure dans l'expression de z. Nous avons le système

$$r = R\sqrt{e^{2\alpha} - 2\cos\beta e^\alpha + 1}, \quad z = R\,\frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}\sqrt{e^{2\alpha} - 2\cos\beta e^\alpha + 1},$$

$$\frac{dz}{dr} = \frac{(2e^{2\alpha} + e^\alpha + 1)(e^\alpha - 1)^2 + (1 - \cos\beta)\, e^\alpha (3e^{2\alpha} + 1)}{e^{2\alpha}(e^\alpha - \cos\beta)}.$$

Nous pouvons remarquer d'abord qu'à toute valeur réelle de e^α, correspond un point réel de la courbe. On peut donc faire varier e^α de $-\infty$ à $+\infty$.

Cela posé, considérons les valeurs du paramètre β comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. On vérifie que lorsque e^α croît de $-\infty$ à 0, la courbe monte de la région des infinis positifs de r et négatifs de z, la concavité tournée vers l'axe des z, passe par un point d'inflexion, et continue à se rapprocher de la droite $r = R$ qu'elle va rencontrer au point $z = +\infty$,

Quand e^α varie de 0 à $+\infty$, la courbe part tangentiellement à la même droite au point $z = -\infty$, monte en se rapprochant de l'axe des z jusqu'à la distance minimum $r = R \sin \beta$, s'éloigne de cet axe, traverse son asymptote, et, après être passée par un point d'inflexion, se rend vers la région des infinis positifs de r et de z, tandis que sa tangente tend à devenir parallèle à l'axe des z.

Ce sont les deux seules branches que possèdent les courbes de paramètre β. Nous remarquons, en effet, que par le changement simultané de e^α en $e^{-\alpha}$ et de β en $\pi + \beta$, on obtient deux branches symétriques des précédentes par rapport à l'axe des r. On voit donc que les courbes de paramètre β, pour lesquelles la valeur de ce paramètre est comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, sont de même forme que les précédentes. D'autre part, le changement de signe, simultané ou successif, devant les radicaux des expressions de r et de z, n'aura évidemment d'autre effet que de changer les courbes en leurs symétriques, soit par rapport à l'origine, soit par rapport à l'axe des r ou des z.

Si maintenant nous voulons nous borner à la portion de surface S applicable sur la surface S_1, nous devons éliminer toutes les portions correspondantes aux valeurs négatives de e^α. Ces valeurs, en effet, supposent α imaginaire, et, dès lors, définissent des points imaginaires de la surface transcendante S_1. Nous voyons par là que si nous prenons devant les radicaux le même signe que précédemment, pour β compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ nous devons prendre seulement la branche qui traverse son asymptote ; et pour β compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ nous prendrons seulement la branche qui ne la traverse pas.

Ces deux branches correspondant à des valeurs de β différentes

de π, sont évidemment dans le même plan. Pour déterminer la figure qu'elles forment, nous n'avons qu'à tracer de part et d'autre de l'axe des z, une parallèle à cet axe qui en soit distante de R. La première branche sera située à la droite de l'axe des z et rencontrera un asymptote au point $z = +\infty$. La seconde sera située à gauche de l'axe des z et de son asymptote qu'elle rencontrera, elle aussi, au point $z = +\infty$.

Ces deux branches d'aspect si différent se transforment l'une dans l'autre quand β passe par la valeur $\beta = \frac{\pi}{2}$. C'est ce qui ressort immédiatement de l'étude des courbes $\beta = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$.

Pour $\beta = 0$ il vient

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial \alpha}}{\frac{\partial r}{\partial \alpha}} = \frac{2e^{2\alpha} + e^{\alpha} + 1}{2e^{2\alpha}} (e^{\alpha} - 1),$$

valeur qui s'annule pour $\alpha = 0$.

Au point correspondant la tangente est confondue avec l'axe des r et la courbe atteint l'origine. Le sommet du renflement correspondant à la valeur minimum de r, s'est transformé en un point de rebroussement. En dehors de cette particularité la courbe de paramètre $\beta = 0$ se comporte comme les courbes voisines.

Quand β au contraire devient égal à $\frac{\pi}{2}$, le sommet du renflement qui s'est élevé par degré jusqu'à l'infini le long de l'asymptote en s'aplatissant sur cette droite a finalement disparu. La courbe est sortie tout entière de la bande comprise entre l'axe des z et l'asymptote, et s'est ainsi transformée en une nouvelle branche, celle-là même que nous avons associée à la première.

Génération de la surface. — Le point de la surface défini par les relations $\beta = 0$ $\alpha = 0$ est situé à l'origine. On vérifie que c'est un point de rebroussement des courbes de paramètre β.

Afin de nous rendre compte de la génération de la surface, construisons d'abord un cylindre de révolution de rayon R ayant pour axe celui des z. Traçons ensuite sur le plan des x y la courbe

de paramètre $\alpha = 0$ que nous avons considérée plus haut et qui a un point singulier à l'origine.

Cela posé, considérons la courbe de paramètre $\beta = 0$ tracée par conséquent dans le plan des xz à droite de l'axe des z. Nous venons de décrire cette courbe. Elle a pour asymptote la génératrice du cylindre tracée dans un plan. Elle descend de l'infini en s'écartant graduellement de cette génératrice à l'intérieur du cylindre et arrive à l'origine tangentiellement à l'axe des x. Elle repart de ce point, toujours tangentiellement à cet axe, et se dirige vers la région de l'infini positif des x et de l'infini négatif des z, la concavité tournée vers le bas.

Imaginons maintenant que β commence à croître. Le point singulier situé à l'origine se transformera en une boucle, d'abord très effilée, en même temps que son sommet s'écartera de l'origine et du plan des xy, le reste de la courbe conservant le même aspect que précédemment. β croissant jusqu'à $\frac{\pi}{2}$, la boucle s'élargit graduellement en s'aplatissant de plus en plus sur la génératrice du cylindre. En se déplaçant et se déformant à la fois, elle formera une sorte de bourrelet en spirale qui montera jusqu'à l'infini, tandis que β tendra vers $\frac{\pi}{2}$. Ce bourrelet formera donc une pointe à l'origine, puis s'aplatira graduellement sur la face interne du cylindre avec laquelle il finira par se confondre.

L'ascension en spirale de la boucle a eu pour effet d'élever graduellement le point où la courbe traverse le cylindre, pour s'en éloigner en montant vers l'infini. Ainsi quand nous arrivons au plan passant par l'axe des z de paramètre $\beta = \frac{\pi}{2}$, le point de sortie de la courbe a été rejeté à l'infini et elle se trouve tout entière en dehors du cylindre. D'ailleurs en même temps que ce point est allé à l'infini, la direction de la tangente à la courbe en ce point s'est rapprochée de celle de la génératrice du cylindre et a fini par lui devenir parallèle. Par suite cette génératrice continue à jouer le rôle d'asymptote pour la courbe sortie tout entière du cylindre. On voit par là, comment par un mouvement continu, la première branche décrite au début s'est transformée en la seconde.

Quand β variera de $\frac{\pi}{2}$ à π cette branche conservera le même caractère.

Quand β croîtra de π à 2π, on obtiendra la portion symétrique de la surface par rapport au plan des xz.

III

Roulement des surfaces S, S_1

Nous nous bornerons à considérer le roulement des courbes de paramètre α. Pour nous les mieux représenter aux yeux, après avoir fait tourner déjà la surface S_1 de 90° autour de l'axe des z, faisons la tourner encore du même angle autour de l'axe des x, les sommets des arceaux tournent d'arrière en avant. Après cette rotation, les courbes de paramètre α se projettent sur le plan des xz suivant des cycloïdes allongées et raccourcies. Leurs concavités sont tournées vers le haut, et les points de hauteur maximum correspondant aux cycloïdes seront situés sur une même horizontale.

Nous pouvons nous représenter la surface S_1 comme le terrain d'un champ de course, sur lequel les courbes de paramètre α figureront des pistes parcourues par les courbes fermées de paramètre α de la surface S. Ce roulement de courbes, supposées pour un moment indépendantes les unes des autres, et en contact simultané avec leur piste respective, nous offrira assez bien le coup d'œil d'un train de cyclistes parcourant ces mêmes courbes.

Les courbes qui correspondent aux valeurs de α inférieures à 0 nous offriront l'aspect de lignes, légèrement ondulées d'abord, puis accusant des saillies de plus en plus prononcées à mesure que α approche de 0. Pour cette valeur, les saillies se sont transformées en pointes; ce sont les points de rebroussement des cycloïdes qui constituent cette piste particulière. α croissant à partir de 0, les points de rebroussement se transformeront en boucles qui se dilateront graduellement au delà de toute limite, lorsque α tendra vers l'infini. A partir de cet instant, les courbes roulantes

nous donneront l'impression d'une roue de bicyclette montée par un cycliste qui se livrerait à l'exercice du *Looping the loop.*

Nous avons assimilé au mouvement d'une roue parcourant une piste, celui d'une courbe de paramètre α de S roulant sur la courbe correspondante de S_1. Établissons une propriété qui rapproche ces courbes des roues à forme circulaire. Quand un cercle roule sans glisser sur une droite, la vitesse de déplacement du centre instantané est à chaque instant égale en valeur absolue à la vitesse de rotation du point de contact de la roue autour de son axe. Or, nous pouvons montrer qu'il existe une droite liée à la courbe mobile de paramètre α, qui jouit d'une propriété analogue.

De la relation (2) nous déduisons

$$dx_1^2 + dy_1^2 = \left(\frac{z_1}{\cos i\alpha}\right)^2 (d\alpha^2 + d\beta^2).$$

Désignons par r la distance du point de contact de la courbe roulante à l'axe du cylindre de révolution, lieu des asymptotes aux courbes de paramètre β, et par dt la différentielle du temps. On a au point de contact $z_1 = r \cos i\alpha$, d'où l'on déduit :

$$\frac{dx_1^2 + dy_1^2}{dt^2} = r^2 \frac{d\alpha^2 + d\beta^2}{dt^2}.$$

Dès lors on aura pour les courbes de paramètre α,

$$\frac{\sqrt{dx_1^2 + dy_1^2}}{dt} = r \frac{d\beta}{dt}.$$

Le premier membre représente la vitesse de la projection du centre instantané sur le plan des $x\,y$; le second nous donne la vitesse de rotation du point de contact autour de l'axe du cylindre, que nous pouvons considérer comme l'axe de la courbe.

Nous voyons donc que la vitesse de la projection du centre instantané sur le plan des $x\,y$ est égale à chaque instant, en valeur absolue, à la vitesse de rotation du point de contact de la courbe mobile autour de son axe.

M. Bourlet (*), et après lui M. Lecornu (**) ont publié des résultats intéressants sur le problème du *bouclage de la boucle*. Le roulement des courbes, que nous venons de considérer, sur les pistes correspondantes pourrait peut-être suggérer des questions analogues de quelque intérêt scientifique. Ici les deux courbes sont données, mais on pourrait chercher, par exemple, la nature de la force qu'il faudrait appliquer en un point donné de l'axe de la courbe mobile, pour qu'elle demeure en équilibre sur la courbe fixe.

(*) Bulletin de la Société math. de France, t. 27, p. 47 et 76.
(**) Bulletin de la Société math. de France, t. 32, p. 54, 1904.

MÉMOIRE

SUR

L'ATTRACTION DU PARALLÉLIPIPÈDE ELLIPSOÏDAL

PAR

M. le Vte de SALVERT

Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille.

CHAPITRE II *(suite)* (*)

Calcul effectif des deux quadratures successives auxquelles a été ramenée la détermination de l'intégrale double proposée. — Toute la question se trouve donc réduite actuellement au calcul successif des deux quadratures qui figurent dans l'une des deux expressions (47) ou (49) : intégrations dont la première s'effectuera encore en invoquant simplement un résultat classique, du moment que la quantité sous le radical est un polynôme du second degré, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, par rapport aux deux variables, en sorte que la seconde intégration seule exigera l'intervention de procédés nouveaux.

Adoptant donc dans ce but la première formule (47), dans laquelle la première intégration est effectuée par rapport à ψ, et qui représente, par hypothèse, une autre forme plus détaillée de l'expression (38) de $I^{(\varpi)}$, nous rappellerons la valeur (31) de ρ_{ϖ}^2, puis faisant, pour simplifier les écritures,

---

(*) Voir Annales, t. XXXI, 2e partie, pp. 69-118.

(50) $\Phi = (\varphi - Y_0)^2 + \Pi$, d'où $\rho_\varpi^2 = (\psi - Z_0)^2 + \Phi$,

ce qui permettra d'écrire la dite expression (38) sous la forme

$$I^{(\varpi)} = i\int\left(\int\frac{d\psi}{\rho_\varpi}\right)d\varphi = i\int\left(\int\frac{d(\psi - Z_0)}{\sqrt{(\psi - Z_0)^2 + \Phi}}\right)d\varphi,$$

en sous-entendant, pour un instant, comme limites pour chaque variable, celles qui figurent dans la formule en question (47), alors une formule classique d'usage courant donnera, quant à la première quadrature indéfinie,

$$\int\frac{d(\psi - Z_0)}{\sqrt{(\psi - Z_0)^2 + \Phi}} = \log f(\psi, \varphi) + \text{const.},$$

en faisant de nouveau :

(51) $$f(\psi, \varphi) = \psi - Z_0 + \sqrt{(\psi - Z_0)^2 + \Phi}.$$

Nous aurons donc, en y introduisant les limites 0 et ψ_ϵ (43), pour celle qui figure dans la formule proposée (47),

$$\int_0^{\psi_\epsilon}\frac{d(\psi - Z_0)}{\sqrt{(\psi - Z_0)^2 + \Phi}} = \log f(\psi_\epsilon, \varphi) - \log f(0, \varphi),$$

et par conséquent, si nous convenons de faire encore une fois, pour abréger,

(52) $$\varphi^{(1)} = \frac{1}{m}\sqrt{(l^2 - \epsilon)(l^2 - \eta_1)}, \qquad \varphi^{(2)} = \frac{1}{m}\sqrt{(l^2 - \epsilon)(l^2 - \eta_2)},$$

la quantité que nous avons désignée par le symbole (ϵ) (46), dans le paragraphe précédent, aura littéralement pour expression :

(53) $$\left\{\begin{aligned}(\epsilon) &= i\int_{\varphi^{(1)}}^{\varphi^{(2)}}\left[\log f(\psi_\epsilon, \varphi) - \log f(0, \varphi)\right]d\varphi \\ &= i\left[\int \log f(\psi_\epsilon, \varphi)\,d\varphi - \int \log f(0, \varphi)\,d\varphi\right]_{\varphi^{(1)}}^{\varphi^{(2)}}.\end{aligned}\right.$$

Mais quand il s'agira de former la somme $\sum_{\epsilon} \pm (\epsilon) = I^{(\varpi)}$, le second de ces deux termes dans les crochets pourra être négligé en vertu du Théorème des pages 60-61 de notre Chapitre I, attendu que, d'une part, l'intégrale indéfinie $\int \log f(0, \varphi)\, d\varphi$ ne contenant ni ϵ ni η, et, d'autre part, le type des deux limites de φ (abstraction faite des indices de η) étant l'expression

$$(54) \qquad \varphi = \frac{1}{m} \sqrt{(l^2 - \epsilon)(l^2 - \eta)}$$

qui est symétrique en ϵ et η, il est donc clair que le résultat de la substitution de cette dernière valeur à la place de φ dans la dite intégrale indéfinie sera lui-même une fonction symétrique de ϵ et de η. C'est pourquoi, au point de vue spécial du but que nous poursuivons, nous pouvons donc prendre pour la quantité (ϵ), au lieu de l'expression précédente, simplement celle-ci :

$$(55) \qquad (\epsilon) = i \int_{\varphi^{(1)}}^{\varphi^{(2)}} \log f(\psi_\epsilon, \varphi)\, d\varphi.$$

Cela posé, pour calculer cette dernière quadrature, de même encore que dans le Chapitre I, l'intégration par parties donnant ici, comme alors,

$$\int \log f(\psi_\epsilon, \varphi)\, d\varphi = \varphi \log f(\psi_\epsilon, \varphi) d\varphi - \int \varphi \frac{d}{d\varphi} \log f(\psi_\epsilon, \varphi)\, d\varphi,$$

il est facile de voir que, lorsqu'on se sera servi de cette expression pour former la somme $\sum_{\epsilon} \pm (\epsilon) = I^{(\varpi)}$, le premier terme ou terme intégré de ladite expression pourra encore être négligé en vertu du même Théorème que tout à l'heure, attendu que ce terme sera de nouveau, pour la valeur (54) de φ, une fonction symétrique de ϵ et de η.

Le fait étant déjà manifeste à l'égard de la quantité φ, qui y

figure à la fois comme premier facteur et comme élément de la fonction $\log f(\psi_\epsilon, \varphi)$, il suffit donc de le faire ressortir à l'égard de la seule quantité ψ_ϵ (43). Or, sans qu'on soit obligé d'en faire le calcul, cette propriété résulte immédiatement *à priori* de la définition même de la quantité en question.

En effet, pour plus de clarté, représentons par le symbole (ψ_ϵ) ce que devient la quantité ψ_ϵ pour la valeur de φ (54). Or, par définition, la quantité ψ_ϵ (43) représente la valeur de ψ fournie par l'équation résultant de l'élimination de η entre les deux équations (41). Dès lors, remettre dans cette valeur ainsi obtenue, à la place de φ, la valeur (54) que donnerait la résolution de l'équation de gauche précitée, c'est éliminer de nouveau φ entre l'équation résultante que nous venons de dire et cette même équation de gauche qui avait servi à la former : c'est donc retomber simplement sur l'autre équation de droite, et par conséquent la valeur de ψ_ϵ après la dite substitution sera la valeur positive :

$$(\psi_\epsilon) = \frac{i}{m}\sqrt{(n^2+\epsilon)(n^2+\eta)}.$$

C'est au reste, ce qu'on peut vérifier très aisément en effectuant le calcul, car par la substitution précitée le carré de la quantité ψ_ϵ (43) deviendra le carré de celle en question, savoir :

$$(\psi_\epsilon)^2 = \frac{n^2+\epsilon}{l^2-\epsilon}\left(\frac{1}{m^2}(l^2-\epsilon)(l^2-\eta)+(l^2-\epsilon)\right) = (n^2+\epsilon)\left(\frac{l^2-\eta}{m^2}+1\right)$$

$$= (n^2+\epsilon)\frac{l^2+m^2-\eta}{m^2} = (n^2+\epsilon)\frac{-n^2-\eta}{m^2} = \frac{-1}{m^2}(n^2+\epsilon)(n^2+\eta),$$

en sorte que la quantité (ψ_ϵ) elle-même aura bien pour valeur, ainsi que nous l'avions démontré par un raisonnement *à priori :*

$$(56) \qquad (\psi_\epsilon) = \frac{i}{m}\sqrt{(n^2+\epsilon)(n^2+\eta)}.$$

En tenant compte de cette remarque, en même temps que de la valeur (54) de φ et du Théorème ci-dessus rappelé, nous pourrons

donc de nouveau prendre pour la quantité (ε) qui nous intéresse, à la place de l'expression (55) elle-même, la nouvelle quantité

$$(57) \qquad (\epsilon) = -i \int_{\varphi^{(1)}}^{\varphi^{(2)}} \varphi \frac{d}{d\varphi} \log f(\psi_\epsilon, \varphi)\, d\varphi,$$

intégrale définie que nous allons indiquer le moyen de calculer.

Pour cela, remarquons tout d'abord que lorsqu'on aura remplacé le symbole ψ_ϵ par sa signification convenue (43), la fonction soumise au signe logarithme renfermera toujours, d'après la définition (51), des radicaux superposés, car cette quantité ψ_ϵ ne devient un carré parfait qu'en supposant $l^2 - \epsilon = 0$ ou $\epsilon = l^2$, hypothèse qu'il faut exclure, attendu que dans ce cas la quantité (ε) (et par conséquent aussi celle $\mathrm{I}^{(\varpi)}$) que nous nous proposons de calculer serait indéterminée, en vertu de sa définition même (*). La première chose à faire sera donc de faire disparaître le radical que représente ψ_ϵ, à l'aide du procédé classique employé dans un but semblable pour l'intégration des radicaux du second degré.

A cet effet, convenant de désigner par $+\lambda$ et $-\lambda$ les deux racines de l'équation $\psi_\epsilon^2 = 0$, c'est-à-dire faisant pour abréger

$$(58) \qquad l^2 - \epsilon = -\lambda^2 \qquad \text{ou} \qquad \lambda = i\sqrt{l^2 - \epsilon},$$

quantité qui ne sera jamais nulle d'après ce que nous venons de dire à l'instant, nous prendrons à la place de φ la variable θ définie par l'équation

(*) En effet, la limite de la première quadrature, en ψ, étant alors ∞, cette intégrale $\int_0^\infty \frac{d\psi}{\rho_\varpi}$ sera donc dans cette hypothèse infinie ou indéterminée, du moment que le coefficient différentiel $\frac{1}{\rho_\varpi}$ représente pour $\psi = \infty$ un infiniment petit d'ordre égal à l'unité ; et lors même qu'elle serait infinie, l'intégrale double (ε) elle-même (46) se présenterait alors sous la forme $\int_0^0 \infty\, d\varphi$, c'est-à-dire encore sous celle de l'indétermination.

(59) $$\frac{\varphi-\lambda}{\varphi+\lambda}=\theta^2,$$

laquelle donnera successivement

$$\begin{aligned}
&\varphi-\lambda=(\varphi+\lambda)\,\theta^2, \qquad \varphi(1-\theta^2)=\lambda(1+\theta^2), \qquad \varphi=\lambda\frac{1+\theta^2}{1-\theta^2},\\
&\varphi-\lambda=\lambda\frac{1+\theta^2}{1-\theta^2}-\lambda=\lambda\frac{(1+\theta^2)-(1-\theta^2)}{1-\theta^2}=\frac{2\lambda\theta^2}{1-\theta^2},\\
&\varphi+\lambda=\lambda\frac{1+\theta^2}{1-\theta^2}+\lambda=\lambda\frac{(1+\theta^2)+(1-\theta^2)}{1-\theta^2}=\frac{2\lambda}{1-\theta^2},\\
&\varphi^2-\lambda^2=\frac{4\lambda^2\theta^2}{(1-\theta^2)^2}, \qquad d\varphi=\lambda\frac{(1-\theta^2)+(1+\theta^2)}{(1-\theta^2)^2}\,2\theta d\theta=\frac{4\lambda\theta d\theta}{(1-\theta^2)^2},
\end{aligned}$$

et par conséquent, pour la quantité envisagée ψ_ϵ (43), la valeur rationnelle en θ :

1) $$\psi_\epsilon=\sqrt{\frac{n^2+\epsilon}{l^2-\epsilon}}\sqrt{\varphi^2+(l^2-\epsilon)}=\frac{\sqrt{n^2+\epsilon}}{i\lambda}\sqrt{\varphi^2-\lambda^2}=\frac{\sqrt{n^2+\epsilon}}{i\lambda}\,\frac{2\lambda\theta}{1-\theta^2}$$
$$=-2i\sqrt{n^2+\epsilon}\,\frac{\theta}{1-\theta^2}.$$

Avant d'aller plus loin, il importe de voir de suite quelles seront les limites de cette nouvelle variable θ correspondant aux limites $\varphi^{(1)}$ et $\varphi^{(2)}$ (52) de φ, ou plus simplement quel sera le type (abstraction faite de l'indice de η) de ces limites de θ correspondant au type (54) des dites limites de φ.

Or, il résulte immédiatement de la définition (59) de θ^2 que les carrés de ces limites auront semblablement pour type l'expression

$$\theta^2=\frac{\frac{1}{m}\sqrt{(l^2-\epsilon)(l^2-\eta)}-i\sqrt{l^2-\epsilon}}{\frac{1}{m}\sqrt{(l^2-\epsilon)(l^2-\eta)}+i\sqrt{l^2-\epsilon}}=\frac{\sqrt{l^2-\eta}-im}{\sqrt{l^2-\eta}+im}=\frac{(\sqrt{l^2-\eta}-im)^2}{(l^2-\eta)+m^2}$$
$$=\frac{(\sqrt{l^2-\eta}-im)^2}{-n^2-\eta},$$

d'où il suit que les limites en question auront elles-mêmes pour type

$$(62)\qquad \theta = \frac{i(\sqrt{l^2-\eta}-im)}{\sqrt{n^2+\eta}} = \frac{i\sqrt{l^2-\eta}+m}{\sqrt{n^2+\eta}},$$

c'est-à-dire qu'elles auront définitivement pour valeurs

$$(63)\qquad \theta^{(1)} = \frac{i\sqrt{l^2-\eta_1}+m}{\sqrt{n^2+\eta_1}}, \qquad \theta^{(2)} = \frac{i\sqrt{l^2-\eta_2}+m}{\sqrt{n^2+\eta_2}},$$

ϵ désignant toujours par hypothèse l'une des variables s ou t et η l'autre. Nous examinerons un peu plus loin en détail ce que représentent alors ces valeurs pour chacune des quatre déterminations successives de ϵ, savoir s_1, s_2, t_1 et t_2.

Cette remarque faite, nous aurons avec cette nouvelle variable θ, eu égard à la valeur (61) de ψ_ϵ,

$$(64)\qquad \psi_\epsilon - Z_0 = -2i\sqrt{n^2+\epsilon}\,\frac{\theta}{1-\theta^2} - Z_0 = \frac{f_2(\theta)}{1-\theta^2},$$

en faisant

$$(65)\qquad f_2(\theta) = Z_0\theta^2 - 2i\sqrt{n^2+\epsilon}\,.\,\theta - Z_0,$$

puis, en vertu de la définition (50) de Φ,

$$\left\{\begin{aligned} \Phi &= (\varphi - Y_0)^2 + \Pi = \left(\lambda\frac{1+\theta^2}{1-\theta^2} - Y_0\right)^2 + \Pi \\ &= \frac{1}{(1-\theta^2)^2}\Big([\lambda(1+\theta^2) - Y_0(1-\theta^2)]^2 + \Pi(1-\theta^2)^2\Big) = \frac{F_2(\theta^2)}{(1-\theta^2)^2}, \end{aligned}\right.$$

en faisant de même

$$(67)\qquad \left\{\begin{aligned} F_2(\theta^2) &= [\lambda(1+\theta^2) - Y_0(1-\theta^2)]^2 + \Pi(1-\theta^2)^2 \\ &= [(\lambda+Y_0)\theta^2 + (\lambda - Y_0)]^2 + \Pi(1-\theta^2)^2 \\ &= [(\lambda+Y_0)^2\theta^4 + 2(\lambda^2 - Y_0^2)\theta^2 + (\lambda - Y_0)^2] + \Pi(1 - 2\theta^2 + \theta^4) \\ &= \{(\lambda+Y_0)^2 + \Pi\}\theta^4 + 2(\lambda^2 - Y_0^2 - \Pi)\theta^2 + \{(\lambda - Y_0)^2 + \Pi\}, \end{aligned}\right.$$

l'indice des symboles f_2 et F_2 marquant ainsi le degré de ces polynômes respectivement en θ et θ^2. Et alors, la fonction $f(\psi_\epsilon, \varphi)$ devenant elle-même, d'après la définition (51), en tenant compte des valeurs précédentes (64) et (66),

$$f(\psi_\epsilon,\varphi)=\frac{f_2(\theta)}{1-\theta^2}+\sqrt{\left(\frac{f_2(\theta)}{1-\theta^2}\right)^2+\frac{F_2(\theta^2)}{(1-\theta^2)^2}}=\frac{f_2(\theta)+\sqrt{f_2(\theta)^2+F_2(\theta^2)}}{1-\theta^2}$$

on aura donc pour son logarithme

$$\log f(\psi_\epsilon, \varphi) = \log\left[f_2(\theta)+\sqrt{f_2(\theta)^2+F_2(\theta^2)}\right] - \log(1-\theta^2),$$

et par suite, pour la différentielle de ce logarithme,

$$(68)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{d\varphi}\log f(\psi_\epsilon,\varphi)\,d\varphi = \dfrac{d}{d\theta}\log f(\psi_\epsilon,\varphi)\,d\theta \\ = \left(\dfrac{d}{d\theta}\log\left[f_2(\theta)+\sqrt{f_2(\theta)^2+F_2(\theta^2)}\right] - \dfrac{d}{d\theta}\log(1-\theta^2)\right)d\theta. \end{cases}$$

Or, quant au premier des deux termes dans la parenthèse, on trouvera aisément

$$(69)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{d\theta}\log\left[f_2(\theta)+\sqrt{f_2(\theta)^2+F_2(\theta^2)}\right] = \dfrac{f_2'(\theta)+\dfrac{f_2(\theta)f_2'(\theta)+\theta F_2'(\theta^2)}{\sqrt{f_2(\theta)^2+F_2(\theta^2)}}}{f_2(\theta)+\sqrt{f_2(\theta)^2+F_2(\theta^2)}} \\ = \dfrac{f_2-\sqrt{f_2^2+F_2}}{f_2-\sqrt{f_2^2+F_2}}\,\dfrac{(f_2f_2'+\theta F_2')+f_2'\sqrt{f_2^2+F_2}}{(f_2+\sqrt{f_2^2+F_2})\sqrt{f_2^2+F_2}} \\ = \dfrac{[f_2(f_2f_2'+\theta F_2')-f_2'(f_2^2+F_2)]+[f_2f_2'-(f_2f_2'+\theta F_2')]\sqrt{f_2^2+F_2}}{[f_2^2-(f_2^2+F_2)]\sqrt{f_2^2+F_2}} \\ = \dfrac{(f_2.\,\theta F_2'-f_2'F_2)-\theta F_2'\sqrt{f_2^2+F_2}}{-F_2\sqrt{f_2^2+F_2}} = \dfrac{f_2.\,\theta F_2'-f_2'F_2}{-F_2\sqrt{f_2^2+F_2}}+\dfrac{\theta F_2'}{F_2} \\ = \dfrac{f_4(\theta)}{-F_2(\theta^2)\sqrt{F_4(\theta)}}+\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{d\theta}\log F(\theta^2), \end{cases}$$

en faisant de nouveau, toujours avec la même signification des indices (*) :

$$(70) \qquad F_4(\theta) = f_2(\theta)^2 + F_2(\theta^2), \qquad f_4(\theta) = f_2 . \theta F_2' - f_2' F_2 .$$

Maintenant, pour calculer commodément ces deux derniers polynômes, nous écrirons le polynôme $F_2(\theta^2)$ (67) sous la forme

$$(71) \qquad F_2(\theta^2) = A\theta^4 + 2B\theta^2 + C,$$

les coefficients A, B, C étant par conséquent

$$(72) \qquad A = (\lambda + Y_0)^2 + \Pi, \qquad B = \lambda^2 - Y_0^2 - \Pi, \qquad C = (\lambda - Y_0)^2 + \Pi;$$

et alors l'expression du premier polynôme $F_4(\theta)$ sera, en tenant compte de celle (65) du trinôme $f_2(\theta)$,

$$(73) \left\{ \begin{aligned} F_4(\theta) &= (Z_0\theta^2 - 2i\sqrt{n^2+\epsilon}\,.\,\theta - Z_0)^2 + (A\theta^4 + 2B\theta^2 + C) \\ &= [Z_0^2\theta^4 - 4i\sqrt{n^2+\epsilon}\,.\,Z_0\theta^3 - 2\,\{ Z_0^2 + 2(n^2+\epsilon) \}\,\theta^2 + 4i\sqrt{n^2+\epsilon}\,.\,Z_0\theta + Z_0^2] \\ &\qquad + (A\theta^4 + 2B\theta^2 + C), \\ &= \mathcal{A}\theta^4 + 4\mathcal{B}\theta^3 + 2\mathcal{C}\theta^2 + 4\mathcal{D}\theta + \mathcal{E}, \end{aligned} \right.$$

les nouveaux coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ..., $\mathcal{E}$ étant cette fois

$$(74) \left\{ \begin{aligned} &\mathcal{A} = Z_0^2 + A, \quad \mathcal{B} = -\mathcal{D} = iZ_0\sqrt{n^2+\epsilon}, \\ &\qquad \mathcal{C} = -[Z_0^2 + 2(n^2+\epsilon) - B], \qquad \mathcal{E} = Z_0^2 + C, \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire en tenant compte successivement des valeurs (72) des précédents A, B, C, puis des définitions (18), (32), et (58) des symboles Y_0, Z_0, Π et λ,

---

(*) Pour le second de ces polynômes, en effet, bien que chacun des deux termes dont se compose cette définition soit séparément du cinquième degré, il est visible que les deux termes en θ^5 auront des coefficients égaux et de signe contraire et par conséquent se détruiront.

$$
(75)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathcal{A}=Z_0^2+[(\lambda+Y_0)^2+\Pi]=Z_0^2+[(\lambda^2+2Y_0\lambda+Y_0^2)+(\varpi-Y_0^2-Z_0^2+\rho_0^2)]\\
&\quad=\lambda^2+2Y_0\lambda+\varpi+\rho_0^2=-(l^2-\epsilon)+2i\frac{y_0}{l}\sqrt{(l^2-\varpi)(l^2-\epsilon)}+(\varpi+\rho_0^2),\\
&\mathcal{B}=-\mathcal{D}=\frac{iz_0}{n}\sqrt{(n^2+\varpi)(n^2+\epsilon)},\\
&\mathcal{C}=-Z_0^2-2(n^2+\epsilon)+(\lambda^2-Y_0^2-\Pi)\\
&\quad=-Z_0^2-2(n^2+\epsilon)+[-(l^2-\epsilon)-Y_0^2-(\varpi-Y_0^2-Z_0^2+\rho_0^2)]\\
&\quad=-(n^2+\epsilon)-(n^2+l^2)-(\varpi+\rho_0^2)=-[(n^2+\epsilon)-m^2+(\varpi+\rho_0^2)],\\
&\mathcal{E}=Z_0^2+[(\lambda-Y_0)^2+\Pi]=-(l^2-\epsilon)-2i\frac{y_0}{l}\sqrt{(l^2-\varpi)(l^2-\epsilon)}+(\varpi+\rho_0^2
\end{aligned}
\right.
$$

la dernière de ces valeurs, savoir celle de $\mathcal{E}$, se déduisant sans nouveau calcul de la première, savoir celle de $\mathcal{A}$, en y changeant simplement y_0 en $-y_0$, attendu qu'en se reportant aux définitions précédentes (74) et (72), C se déduit de même de A, en changeant simplement Y_0 en $-Y_0$.

De même, quant au second polynôme $f_4(\theta)$, ayant séparément, en partant des expressions (65) et (71) de $f_2(\theta)$ et $F_2(\theta^2)$,

$$
\left\{
\begin{aligned}
&f_2(\theta).\theta F_2'(\theta^2)=f_2(\theta).\frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}F_2(\theta^2)\\
&\qquad=(Z_0\theta^2-2i\sqrt{n^2+\epsilon}\,.\,\theta-Z_0).\,2\,(A\theta^3+B\theta)\\
&\qquad=2[AZ_0\theta^5-2i\sqrt{n^2+\epsilon}\,.\,A\theta^4-AZ_0\theta^3\\
&\qquad\qquad+BZ_0\theta^3-2i\sqrt{n^2+\epsilon}\,.\,B\theta^2-BZ_0\theta],\\
&F_2(\theta^2)f_2'(\theta)=(A\theta^4+2B\theta^2+C).\,2(Z_0\theta-i\sqrt{n^2+\epsilon})\\
&\qquad=2[AZ_0\theta^5+2BZ_0\theta^3+CZ_0\theta\\
&\qquad\qquad-Ai\sqrt{n^2+\epsilon}\,.\,\theta^4-2Bi\sqrt{n^2+\epsilon}\,.\,\theta^2-Ci\sqrt{n^2+\epsilon}],
\end{aligned}
\right.
$$

on obtiendra donc, pour le polynôme en question $f_4(\theta)$ (70), l'expression

$$(76)\begin{cases} f_4(\theta)=2[AZ_0\theta^5-2i\sqrt{n^2+\epsilon}.A\theta^4-(A-B)Z_0\theta^3-2i\sqrt{n^2+\epsilon}.B\theta^2-BZ_0\theta] \\ \qquad -2[AZ_0\theta^5-i\sqrt{n^2+\epsilon}.A\theta^4+2BZ_0\theta^3-2i\sqrt{n^2+\epsilon}.B\theta^2+CZ_0\theta-Ci\sqrt{n^2+\epsilon}] \\ \qquad =2[-i\sqrt{n^2+\epsilon}.A\theta^4-(A+B)Z_0\theta^3-(B+C)Z_0\theta+Ci\sqrt{n^2+\epsilon}], \end{cases}$$

dans laquelle les coefficients des deux termes en θ^3 et θ seront respectivement, eu égard aux valeurs (71) de A, B, C :

$$(77)\begin{cases} A+B=[(\lambda+Y_0)^2+\Pi]+(\lambda^2-Y_0^2-\Pi)=2\lambda^2+2\lambda Y_0=2\lambda(\lambda+Y_0), \\ B+C=(\lambda^2-Y_0^2-\Pi)+[(\lambda-Y_0)^2+\Pi]=2\lambda^2-2\lambda Y_0=2\lambda(\lambda-Y_0). \end{cases}$$

Ces nouveaux polynômes $F_4(\theta)$ et $f_4(\theta)$ (dont l'indice marque encore le degré) étant ainsi complètement déterminés, si nous reportons alors l'expression (69) que nous venons de calculer dans la précédente (68), celle-ci deviendra

$$\frac{d}{d\varphi}\log f(\psi_\epsilon, \varphi)\,d\varphi=\left[\left(-\frac{f_4(\theta)}{F_2(\theta^2)\sqrt{F_4(\theta)}}+\frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}\log F_2(\theta^2)\right)-\frac{d}{d\theta}\log(1-\theta^2)\right]d\theta,$$

$$=\left[-\frac{f_4(\theta)}{F_2(\theta^2)\sqrt{F_4(\theta)}}+\frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}\left(\log F_2(\theta^2)-2\log(1-\theta^2)\right)\right]d\theta$$

$$=-\frac{f_4(\theta)}{F_2(\theta^2)}\frac{d\theta}{\sqrt{F_4(\theta)}}+\frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}\log\frac{F_2(\theta^2)}{(1-\theta^2)^2}\,d\theta,$$

c'est-à-dire en remontant à l'équation (66) par laquelle a été introduite dans le calcul la fonction $F_2(\theta^2)$, et tenant compte de l'identité

$$\frac{d}{d\theta}\log\Phi.d\theta=\frac{d}{d\varphi}\log\Phi.d\varphi=\frac{\Phi'}{\Phi}d\varphi,$$

que l'on obtiendra en définitive l'expression suivante :

$$\frac{d}{d\varphi}\log f(\psi_\epsilon, \varphi)\,d\varphi=-\frac{f_4(\theta)}{F_2(\theta^2)}\frac{d\theta}{\sqrt{F_4(\theta)}}+\frac{1}{2}\frac{\Phi'}{\Phi}d\varphi.$$

En remettant donc à présent cette valeur dans l'expression (57) de la quantité (ϵ) qu'il s'agissait de calculer, il faudra, dans le premier des deux termes qu'on obtiendra ainsi, remplacer également φ par sa valeur en θ (60), pour intégrer par rapport à θ entre les limites $\theta^{(1)}$ et $\theta^{(2)}$ (63), tandis que dans le second on devra conserver φ comme variable d'intégration, ce qui conduira à la valeur

$$(\epsilon) = -i\int_{\varphi^{(1)}}^{\varphi^{(2)}} \varphi \frac{d}{d\varphi} \log f(\psi_\epsilon, \varphi)\, d\varphi$$

$$= -i\left[-\int_{\theta^{(1)}}^{\theta^{(2)}} \lambda \frac{1+\theta^2}{1-\theta^2} \frac{f_4(\theta)}{F_2(\theta^2)} \frac{d\theta}{\sqrt{F_4(\theta)}} + \frac{1}{2}\int_{\varphi^{(1)}}^{\varphi^{(2)}} \varphi \frac{\Phi'}{\Phi}\, d\varphi\right],$$

dans laquelle le second terme disparaîtra encore une fois lors de la sommation par rapport à ϵ, toujours en vertu du même Théorème du Chap. I, tout comme le second terme de la première expression (53) de (ϵ), attendu que, comme pour celui-là, l'intégrale indéfinie correspondante $\int \varphi \frac{\Phi'}{\Phi} d\varphi$ ne contient pas non plus ϵ ni η.

En négligeant donc encore une fois ce second terme, si pour écrire l'expression précédente, nous faisons en dernier lieu

$$(78) \qquad i\lambda(1+\theta^2) f_4(\theta) = \mathcal{J}_6(\theta), \qquad (1-\theta^2) F_2(\theta^2) = F_3(\theta^2),$$

la quantité $I^{(\varpi)}$ demandée se présentera dès lors, d'après la formule (47), sous la forme simple

$$(79) \qquad I^{(\varpi)} = \sum_\epsilon \pm (\epsilon) = \sum_\epsilon \pm \int_{\theta^{(1)}}^{\theta^{(2)}} \frac{\mathcal{J}_6(\theta)}{F_3(\theta^2)} \frac{d\theta}{\sqrt{F_4(\theta)}},$$

le degré des divers polynômes $\mathcal{J}$ ou F étant encore marqué par l'indice de leurs symboles, et l'interprétation du double signe et du symbole ϵ étant toujours celle que nous avons spécifiée une fois pour toutes dans notre Chapitre I (pp. 44-45).

Le problème d'intégration étant donc ainsi réduit aux quadratures, avant d'examiner quels genres de fonctions introduiront ces quadratures et quel en sera le nombre pour chacun, il convient de voir quelle sera, dans les divers Cas, la signification concrète, par rapport aux données du problème, des limites $\theta^{(1)}$ et $\theta^{(2)}$ des quadratures auxquelles nous avons ainsi réduit ledit problème, pour chacune des quatre déterminations de ϵ qui interviennent dans ce résultat.

Cette interprétation consistera simplement à introduire dans le type ci-dessus (62) des limites en question la signification particulière du symbole η relative à l'hypothèse envisagée, en tenant compte en même temps des six équations qui figurent en tête des tableaux P, Q, R du Chapitre I (pp. 72-74), équations déjà rappelées dans le présent Chapitre (p. 26), lesquelles donneront à tour de rôle, en faisant successivement $\eta = p^2$, q^2, r^2 dans le type précité (62),

$$\left\{\begin{aligned} \frac{i\sqrt{l^2-p^2}+m}{\sqrt{n^2+p^2}} &= \frac{il\,\mathrm{cn}\,u+m}{n\,\mathrm{dn}\,u} = \frac{m+il\,\mathrm{cn}\,u}{n\,\mathrm{dn}\,u},\\ \frac{i\sqrt{l^2-q^2}+m}{\sqrt{n^2+q^2}} &= \frac{i\,.\,im\,\mathrm{sn}\,v+m}{im\,\mathrm{cn}\,v} = -i\frac{1-\mathrm{sn}\,v}{\mathrm{cn}\,v},\\ \frac{i\sqrt{l^2-r^2}+m}{\sqrt{n^2+r^2}} &= \frac{i\,.\,im\,\mathrm{dn}\,w+m}{n\,\mathrm{sn}\,w} = \frac{m(1-\mathrm{dn}\,w)}{n\,\mathrm{sn}\,w}.\end{aligned}\right.$$

De ces expressions résultent ainsi immédiatement, dans chacun des trois Cas relatifs à la signification de ϖ, quant aux diverses déterminations de ϵ afférentes à ce Cas, les valeurs des limites en question mises en évidence par le tableau suivant :

TABLEAU θ

(I) $(\varpi = p^2)$

$$\epsilon = \begin{cases} q_1^2 \\ q_2^2 \end{cases} \quad \theta^{(1)} = -i\,\frac{m(1-\operatorname{dn} w_1)}{n \operatorname{sn} w_1}, \quad \theta^{(2)} = -i\,\frac{m(1-\operatorname{dn} w_2)}{n \operatorname{sn} w_2};$$

$$\epsilon = \begin{cases} r_1^2 \\ r_2^2 \end{cases} \quad \theta^{(1)} = -i\,\frac{1-\operatorname{sn} v_1}{\operatorname{cn} v_1}, \quad \theta^{(2)} = -i\,\frac{1-\operatorname{sn} v_2}{\operatorname{cn} v_2}.$$

(II) $(\varpi = q^2)$

$$\epsilon = \begin{cases} r_1^2 \\ r_2^2 \end{cases} \quad \theta^{(1)} = \frac{m + il \operatorname{cn} u_1}{n \operatorname{dn} u_1}, \quad \theta^{(2)} = \frac{m + il \operatorname{cn} u_2}{n \operatorname{dn} u_2};$$

$$\epsilon = \begin{cases} p_1^2 \\ p_2^2 \end{cases} \quad \theta^{(1)} = -i\,\frac{m(1-\operatorname{dn} w_1)}{n \operatorname{sn} w_1}, \quad \theta^{(2)} = -i\,\frac{m(1-\operatorname{dn} w_2)}{n \operatorname{sn} w_2};$$

(III) $(\varpi = r^2)$

$$\epsilon = \begin{cases} p_1^2 \\ p_2^2 \end{cases} \quad \theta^{(1)} = -i\,\frac{1-\operatorname{sn} v_1}{\operatorname{cn} v_1}, \quad \theta^{(2)} = -i\,\frac{1-\operatorname{sn} v_2}{\operatorname{cn} v_2}:$$

$$\epsilon = \begin{cases} q_1^2 \\ q_2^2 \end{cases} \quad \theta^{(1)} = \frac{m + il \operatorname{cn} u_1}{n \operatorname{sn} u_1}, \quad \theta^{(2)} = \frac{m + il \operatorname{cn} u_2}{n \operatorname{sn} u_2}.$$

Le problème d'intégration pouvant être considéré comme résolu par les calculs développés dans ce paragraphe, il est temps maintenant de distinguer nettement les deux hypothèses qui en constituaient le point de départ essentiel, en introduisant à tour de rôle les deux suppositions alternatives $\varpi = 0$ et $x_0 = 0$ dans les expressions explicites des résultats procurés par les calculs en question.

Pour exprimer aux yeux cette distinction, nous spécifierons par les indices 0 placé en exposant et x placé en indice, les symboles desdits résultats qui, se rapportant à l'hypothèse $\varpi = 0$, appartiendront dès lors à l'expression de la quantité $I^{(0)}$ relative à la composante X pour le Cas le plus général du problème i et conformément au mode de notation déjà employé au début de ce Chapitre, par les lettres yz placées en indice, les symboles des résultats, qui

se rapportant à l'autre hypothèse $x_0 = 0$, appartiendront dès lors à l'expression de $I^{(\varpi)}$ relative à la composante que nous avons désignée par la notation X_{y_2} (p. 25).

Dans le premier de ces deux cas, ayant par définition

$$\rho_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2,$$

et la supposition $\varpi = 0$ réduisant par conséquent les valeurs (18) de Y_0, Z_0, et (33) de Π simplement à y_0, z_0, et x_0^2, les expressions (72) d'une part et (75) de l'autre donneront donc naissance, pour cette hypothèse, en tenant compte de la valeur (58) de λ, respectivement à celles-ci :

TABLEAU B

$$\left\{\begin{aligned} A_x^{(0)} &= (x_0^2 + y_0^2) - (l^2 - \epsilon) + 2iy_0\sqrt{l^2 - \epsilon}, \\ B_x^{(0)} &= -(x_0^2 + y_0^2) - (l^2 - \epsilon), \\ C_x^{(0)} &= (x_0^2 + y_0^2) - (l^2 - \epsilon) - 2iy_0\sqrt{l^2 - \epsilon}; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{A}_x^{(0)} &= (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) - (l^2 - \epsilon) + 2iy_0\sqrt{l^2 - \epsilon}, \\ \mathcal{B}_x^{(0)} &= -\mathcal{D}_x^{(0)} = iz_0\sqrt{n^2 + \epsilon}, \\ \mathcal{C}_x^{(0)} &= -[(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) - m^2 + (n^2 + \epsilon)], \\ \mathcal{E}_x^{(0)} &= (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) - (l^2 - \epsilon) - 2iy_0\sqrt{l^2 - \epsilon}. \end{aligned}\right.$$

Et comme cette hypothèse $\varpi = 0$ n'est admissible que pour la seule détermination $\varpi = p_1^2$, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, dans ce Cas-là la somme en ϵ qui représente $I^{(\varpi)}$ ne comprendra donc que quatre termes ou intégrales définies seulement correspondant aux quatre déterminations de ϵ :

$$\left\{\begin{array}{ll} s_1 = q_1^2 = l^2 \,\mathrm{dn}^2\, v_1, & t_1 = r_1 = -\, n^2 \,\mathrm{cn}^2\, w_1, \\ s_2 = q_2^2 = l^2 \,\mathrm{dn}^2\, v_2, & t_2 = r_2 = -\, n^2 \,\mathrm{cn}^2\, w_2. \end{array}\right.$$

De même, dans la seconde hypothèse, les mêmes expressions (72) et (75) des divers coefficients, si l'on tient compte encore des définitions précitées de Y_0, Z_0, Π et λ, donneront naissance, par la supposition $x_0 = 0$, respectivement à ces autres valeurs :

TABLEAU C

$$\left\{\begin{array}{l} A_{yz} = (\varpi + y_0^2 - \frac{\varpi}{n^2} z_0^2) - (l^2 - \epsilon) + 2i\frac{y_0}{l}\sqrt{(l^2 - \varpi)(l^2 - \epsilon)}, \\ B_{yz} = -\,(\varpi + y_0^2 - \frac{\varpi}{n^2} z_0^2) - (l^2 - \epsilon), \\ C_{yz} = (\varpi + y_0^2 - \frac{\varpi}{n^2} z_0^2) - (l^2 - \epsilon) - 2i\frac{y_0}{l}\sqrt{(l^2 - \varpi)(l^2 - \epsilon)}; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{A}_{yz} = (\varpi + y_0^2 + z_0^2) - (l^2 - \epsilon) + 2i\frac{y_0}{l}\sqrt{(l^2 - \varpi)(l^2 - \epsilon)}, \\ \mathfrak{B}_{yz} = -\,\mathfrak{D}_{yz} = \frac{iz_0}{n}\sqrt{(n^2 + \varpi)(n^2 + \epsilon)}, \\ \mathfrak{C}_{yz} = -\,[(\varpi + y_0^2 + z_0^2) - m^2 + (n^2 + \epsilon)], \\ \mathfrak{E}_{yz} = (\varpi + y_0^2 + z_0^2) - (l^2 - \epsilon) - 2i\frac{y_0}{l}\sqrt{(l^2 - \varpi)(l^2 - \epsilon)}. \end{array}\right.$$

Mais, cette fois ϖ représentant aussi bien que s et t l'une quelconque des six limites données p_1^2, q_1^2, r_1^2 ; p_2^2, q_2^2, r_2^2, la somme en ϵ (47) qui exprime $I^{(\varpi)}$ comprendra donc alors $6 \times 4 = 24$ termes

représentés par des intégrales définies de la forme spécifiée par cette formule, et dont chacune se composera du nombre de termes effectifs que nous allons indiquer maintenant en en précisant la nature analytique.

Nombre et nature analytique des différents termes qui composeront la solution. — L'étendue et la signification des résultats de nos calculs étant ainsi nettement définies, bien que ceux-ci ne permettent pas en général de pousser jusqu'au bout la solution du problème (c'est-à-dire d'arriver à l'expression explicite de toutes les constantes en fonction des données, ainsi que nous l'avons fait pour le cas particulier traité dans le Chapitre I) à cause de la difficulté de résoudre l'équation complète du quatrième degré $F_4(\theta) = 0$, ils suffisent du moins pour faire connaître avec certitude la nature analytique et le nombre de tous les différents termes dont se composera l'expression de chacune des intégrales définies avec lesquelles est formée la solution obtenue ci-dessus (79), intégrales qui seront elles-mêmes, avons-nous dit, au nombre de quatre seulement pour la quantité $I^{(0)}$ et de 24 pour la quantité $I^{(\varpi)}$ relative à la composante X_{y_2}.

Pour cela il sera nécessaire de rappeler, ainsi qu'il suit, les grandes lignes de la méthode classique indiquée par Legendre, pour la réduction aux fonctions elliptiques des intégrales telles que celles que nous venons de dire à l'instant.

Par le moyen d'une substitution rationnelle, convenablement choisie, de la forme

$$(80)\qquad \theta = \frac{a + bt}{1 + t} \qquad \text{ou} \qquad t = \frac{a - \theta}{\theta - b},$$

l'expression différentielle $\frac{d\theta}{\sqrt{F_4(\theta)}}$ se changera en cette autre $\frac{dt}{\sqrt{T}}$ dans laquelle, G désignant un coefficient constant, T est un trinôme du second degré en t^2 et par conséquent de la forme

$$(81)\qquad T = f_2(t^2) = G(t^2 - \alpha)(t^2 - \beta),$$

et par ailleurs la même substitution transformera la fonction rationnelle

$$(82)\qquad \mathcal{J}(\theta)=\frac{\mathcal{J}_6(\theta)}{F_3(\theta^2)}=\frac{i\lambda(1+\theta^2)f_4(\theta)}{(1-\theta^2)F_2(\theta^2)}$$

en une autre fonction rationnelle dont les deux termes seront également du sixième degré en t, et qui pourra dès lors, en séparant dans chacun la partie paire et la partie impaire, être représentée par la fraction

$$\mathcal{J}(\theta)=\mathfrak{F}(t)=\frac{\dfrac{M_3+N_2t}{(1+t)^6}}{\dfrac{P_3+Q_2t}{(1+t)^6}}=\frac{M_3+N_2t}{P_3+Q_2t},$$

les lettres M, N, P, Q désignant des polynômes en t^2 dont le degré est marqué par l'indice qui les affecte.

Cela posé, cette dernière expression pouvant elle-même être mise sous la forme

$$(83)\qquad \mathcal{J}(\theta)=\frac{(M_3+N_2t)(P_3-Q_2t)}{(P_3+Q_2)(P_3-Q_2t)}=\frac{\mathfrak{F}_6(t^2)+tf_5(t^2)}{F_6(t^2)},$$

les f, $\mathfrak{F}$ et F étant encore des polynômes dont le degré est indiqué de la même façon, si donc $t^{(1)}$ et $t^{(2)}$ sont les limites de t qui correspondent à celles de θ, c'est-à-dire en vertu de la définition (80) les valeurs

$$(84)\qquad t^{(1)}=\frac{a-\theta^{(1)}}{\theta^{(1)}-b},\qquad t^{(2)}=\frac{a-\theta^{(2)}}{\theta^{(2)}-b},$$

l'intégrale en θ qui figure dans l'expression en question (79) se trouvera donc transformée par cette substitution de la façon suivante :

$$(85)\begin{cases}\displaystyle\int_{\theta^{(1)}}^{\theta^{(2)}} \mathcal{J}(\theta)\frac{d\theta}{\sqrt{F_4(\theta)}} = \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \frac{\mathfrak{F}_6(t^2) + tf_5(t^2)}{F_6(t^2)}\frac{dt}{\sqrt{T}} \\ \displaystyle\qquad = \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \frac{\mathfrak{F}_6(t^2)}{F_6(t^2)}\frac{dt}{\sqrt{T}} + \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \frac{f_5(t^2)}{F_6(t^2)}\frac{tdt}{\sqrt{T}}.\end{cases}$$

Ces procédés classiques étant ainsi rappelés, occupons-nous en premier lieu de la seconde de ces deux quadratures.

Pour cela, laissant de côté pour le moment le cas, que nous traiterons plus loin, où le polynôme F_6 présenterait des facteurs multiples, et supposant en conséquence

$$(86)\qquad F_6(t^2) = H\,(t^2 - a_1)(t^2 - a_2)\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(t^2 - a_6),$$

comme la décomposition en fractions simples donnera alors

$$\frac{f_5(t^2)}{F_6(t^2)} = \frac{A'_1}{t^2 - a_1} + \frac{A'_2}{t^2 - a_2} + \text{———} = \sum_{i=1}^{i=6}\frac{A'_i}{t^2 - a_i},$$

la dite quadrature deviendra donc, en faisant pour un instant $t^2 = z$, et appliquant au trinôme $T = f_2(t^2)$ un résultat connu (*),

$$(86^{\text{bis}})\begin{cases}\displaystyle\int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \frac{f_5(t^2)}{F_6(t^2)}\frac{tdt}{\sqrt{T}} = \int_{z^{(1)}}^{z^{(2)}}\left(\sum_{i=1}^{i=6}\frac{A'_i}{z - a_i}\right)\frac{1}{2}\frac{dz}{\sqrt{f_2(z)}} \\ \displaystyle\qquad = \sum_{i=1}^{i=6}\frac{1}{2}A'_i\int_{z^{(1)}}^{z^{(2)}}\frac{dz}{(z - a_i)\sqrt{f_2(z)}} \\ \displaystyle\qquad = \left[\sum_{i=1}^{i=6}\frac{\frac{1}{2}A'_i}{\sqrt{f_2(a_i)}}\log \mathcal{J}(z, a_i)\right]_{z^{(1)}}^{z^{(1)}},\end{cases}$$

(*) Voir HERMITE, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, Tome I, pp. 308-309.

le symbole $\mathcal{J}(z, a_i)$ désignant, pour faciliter l'écriture, la fonction

$$(87) \qquad \mathcal{J}(z, a_i) = \frac{G\,[a_i z - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)(a_i + z) + \alpha\beta] - \sqrt{f_2(a_i)}\sqrt{f_2(z)}}{z - a_i};$$

c'est-à-dire qu'en revenant à la variable t, la valeur de cette même quadrature pourra s'écrire, à l'aide d'un seul signe logarithme,

$$(88) \qquad \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \frac{f_5(t^2)}{F_6(t^2)} \frac{t\,dt}{\sqrt{T}} = \Big[\log F(t^2)\Big]_{t^{(1)}}^{t^{(2)}},$$

le nouveau symbole $F(t^2)$ désignant cette fois la fonction plus complexe :

$$(88^{bis}) \left\{ \begin{aligned} F(t^2) &= \prod_{i=1}^{i=6} \left(\mathcal{J}(t^2, a_i)^{\frac{A'_i}{2 f_2 (a_i)^{\frac{1}{2}}}} \right) \\ &= \prod_{i=1}^{i=6} \left[\frac{G\,[a_i t^2 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)(a_i + t^2) + \alpha\beta] - \sqrt{f_2(a_i)}\sqrt{f_2(t^2)}}{t^2 - a_i} \right]^{\frac{A'_i}{2 f_2 (a_i)^{\frac{1}{2}}}}. \end{aligned} \right.$$

Venons maintenant à la première des deux quadratures de l'expression (85).

Quant à celle-là, la décomposition en fractions simples donnant, eu égard à la forme (86) du dénominateur,

$$\frac{\mathfrak{F}_6(t^2)}{F_6(t^2)} = E + \frac{A''_1}{t^2 - a_1} + \frac{A''_2}{t^2 - a_2} + \ldots\ldots = E + \sum_{i=1}^{i=6} \frac{A''_i}{t^2 - a_i},$$

on trouvera donc pour son expression

$$(89) \left\{ \begin{aligned} \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \frac{\mathfrak{F}_6(t^2)}{F_6(t^2)} \frac{dt}{\sqrt{T}} &= \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \left(E + \sum_{i=1}^{i=6} \frac{A''_i}{t^2 - a_i} \right) \frac{dt}{\sqrt{f_2(t^2)}} \\ &= \left[E \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{f_2(t^2)}} + \sum_{i=1}^{i=6} A''_i \int_0^t \frac{dt}{(t^2 - a_i)\sqrt{f_2(t^2)}} \right]_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}; \end{aligned} \right.$$

et comme, pour réduire à la forme canonique le radical de l'élément il suffira de faire à présent $t=\sqrt{\alpha}.z$, ce qui le transformera dans celui-ci

$$\sqrt{f_2(t^2)}=\sqrt{G(\alpha z^2-\alpha)(\alpha z^2-\beta)}=\sqrt{G\alpha\beta}\sqrt{(1-z^2)(1-\frac{\alpha}{\beta}z^2)},$$

on voit qu'elle se composera en général, pour chacune des deux limites de t, d'une intégrale elliptique de première espèce et de six intégrales de troisième espèce, ayant toutes le même module $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ et le même argument $\frac{t}{\sqrt{\alpha}}$, lequel dépendra à la fois, par les valeurs (84) jointes à celles du Tableau Θ (p. 64) et par la racine α, des trois fonctions *sn*, *cn*, *dn* de trois des limites données (*) $u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2$ du Solide attirant. Mais, par contre, les paramètres des six fonctions de troisième espèce seront différents, puisque nous avons supposé tout à l'heure que le dénominateur $F_6(t^2)$ n'avait pas de facteurs multiples.

En résumé, l'intégrale proposée (85) se composera donc en général, pour chacune des deux limites de t, simplement de ces sept intégrales elliptiques de première et troisième espèce au même module et même argument, dont l'ensemble forme l'expression de la première quadrature en t (89), et en outre du terme logarithmique que représente la seconde quadrature en t (88) : soit au total 15 termes pour chacune des intégrales qui composent l'expression (79) de la quantité $I^{(\varpi)}$ en particulier; et comme le nombre de ces intégrales différentes qui entrent dans l'expression de la composante X_{y_z} est de 24, avons-nous dit, le nombre total des termes effectifs de ladite expression sera donc finalement, en général, de $24 \times 15 = 360$, dont la nature analytique est spécifiée avec certitude par les explications qui précèdent.

Toutefois cette composition pourra se trouver modifiée, de la façon que nous allons indiquer, dans des circonstances particulières qu'il est intéressant de signaler.

(*) Savoir, une correspondant à ϖ, une autre à ϵ, une troisième enfin à η_1 ou η_2.

En premier lieu, si le polynôme $F_6(t^2)$ admet des facteurs multiples, ou encore si, antérieurement au changement de variables (80), une ou plusieurs racines de l'équation $F_4(\theta) = 0$ satisfont en même temps à l'équation $F_3(\theta^2) = 0$, dans ces deux hypothèses l'expression de la première des deux quadratures en t (85) comprendra, en sus de la fonction de première espèce et des fonctions de troisième espèce dont nous préciserons à nouveau tout à l'heure le nombre pour chacun de ces deux cas, une fonction de seconde espèce, toujours de même module et même argument, et en outre un terme algébrique de la forme $F(t)\sqrt{T}$, ou bien, ce qui est la même chose, $\mathfrak{F}(\theta)\sqrt{F_4(\theta)}$, les symboles F ou $\mathfrak{F}$ désignant alors des fonctions rationnelles. En effet, dans le premier cas, si le dénominateur $F_6(t^2)$ comprend le facteur $(t^2 - \tau)^n$ $(n \leqq 6)$, la fonction rationnelle $\frac{\mathfrak{F}_6(t^2)}{F_6(t^2)}$ décomposée en fractions simples contiendra une série de termes tels que

$$(90) \qquad \frac{T_1}{t^2 - \tau}, \quad \frac{T_2}{(t^2 - \tau)^2}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{T_4}{(t^2 - \tau)^n}.$$

Or, un résultat classique montrant que chaque intégrale telle $\int \frac{dt}{(t^2 - \tau)^m \sqrt{T}}$ s'exprime linéairement au moyen des quatre quantités

$$\int \frac{dt}{\sqrt{T}}, \quad \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{T}}, \quad \int \frac{dt}{(t^2 - \tau)\sqrt{T}}, \quad \frac{\mathcal{F}(t)}{(t^2 - \tau)^{m-1}}\sqrt{T},$$

$\mathcal{F}(t)$ désignant ici un simple polynôme (*), il résulte de là dès

(*) Voir, si l'on veut, JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, Tome II (pp. 32 et 35), en y supposant $n = 3$ et $p = 1$ (p. 36), attendu que le polynôme sous le radical X étant avec ces suppositions de la forme $X = A(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$, il suffira dans le cas actuel de faire $x = \gamma + t^2$, pour que le facteur différentiel de l'élément $\frac{dx}{\sqrt{X}}$ se change ainsi en $\frac{2tdt}{\sqrt{A(t^2 - \alpha)(t^2 - \beta) \cdot t^2}} = 2\frac{dt}{\sqrt{T}}$, c'est-à-dire (au coefficient 2 près) à celui-là même de nos calculs.

lors que l'ensemble de toutes les intégrales correspondant aux divers termes (90) et par suite aussi l'ensemble de l'expression de la première quadrature en t envisagée (85) présentera bien la composition que nous avons dite tout à l'heure.

Quant au nombre des fonctions de troisième espèce distinctes, c'est-à-dire des paramètres différents qui entreront dans cette expression, si nous supposons, pour plus de généralité, que le dénominateur $F_6(t^2)$ contient les trois facteurs $(t^2-\rho)^m$, $(t^2-\sigma)^n$, $(t^2-\tau)^p$, $(m+n+p \leqq 6)$, le nombre de ses facteurs simples étant dès lors $6-(m+n+p)$, il est clair que le nombre de ces intégrales de troisième espèce distinctes sera :

$$[6-(m+n+p)]+3=9-(m+n+p).$$

En outre, pour ce même cas, la seconde quadrature en t (85) comprenant alors dans son expression une série de termes de la forme $\int \frac{dz}{(z-\tau)^m \sqrt{f_2(z)}}$ qui se ramèneraient chacun, comme on sait, au moyen d'une substitution ne contenant d'autre irrationnalité que $\sqrt{f_2(z)}$ (*) à l'intégrale d'une fonction rationnelle, comprendra donc alors elle aussi, en sus du même terme logarithmique (**), un second terme algébrique en z ou t^2, lequel, ne contenant encore d'autre irrationnelle que $\sqrt{T}$, donnera, étant réuni au terme algébrique introduit par la première quadrature précédente, un terme algébrique de la forme $\mathcal{F}(\theta) + F(\theta)\sqrt{F_4(\theta)}$, $\mathcal{F}$ et F désignant toujours des fonctions rationnelles.

Semblablement, dans le second cas, si σ est une racine de l'équa-

---

(*) En effet, la nouvelle variable qu'il faudra prendre pour cela est, ainsi que nous l'avons fait plus haut pour le choix de la variable θ (59),

$$y=\sqrt{\frac{z-\alpha}{z-\beta}}=\frac{\sqrt{G}\,(z-\alpha)}{\sqrt{G\,(z-\alpha)(z-\beta)}}=\frac{\sqrt{G}\,(z-\alpha)}{\sqrt{f_2(z)}}.$$

(**) Considéré, bien entendu, pour les seules racines distinctes a_i, en sorte que la définition exacte du symbole $F(t^2)$ (88) sera pour ce nouveau cas

$F(t^2)=\prod_{i=1}^{i=9-(m+n+p)} \mathcal{F}(z, \alpha_i)$, la définition du symbole $\mathcal{F}$ restant toujours la même (87).

tion $F_4(\theta)=0$ qui satisfait en même temps à l'équation $F_3(\theta^2)=0$, la valeur de t correspondante à σ que nous désignerons par τ, savoir la valeur $\tau = \frac{a-\sigma}{\sigma - b}$ vérifiera donc à la fois l'équation $\frac{f_2(t^2)}{(1+t)^4} = 0$, transformée en t de $F_4(\theta) = 0$, et l'équation $\frac{P_3 + Q_2 t}{(1+t)^6} = 0$, transformée de $F_3(\theta^2) = 0$, et par conséquent aussi l'équation $F_6(t^2) = 0$ qui, d'après l'équation (83), n'est autre chose que la précédente multipliée par le produit $(P_3 - Q_2 t)(1+t)^6$. Dès lors, le développement en fractions simples de la fraction rationnelle $\frac{\mathcal{F}_6(t^2)}{F_6(t^2)}$ comprendra donc un terme tel que $\frac{T_0}{t^2-\alpha}$ puisque τ^2 est ainsi, par hypothèse, l'une des deux racines α ou β (81) de l'équation $0 = f_2(t^2) = T$.

Cela étant, un autre résultat classique, connexe de celui invoqué tout à l'heure, faisant voir que l'intégrale $\int \frac{dt}{(t^2-\alpha)\sqrt{T}}$ s'exprime encore linéairement à l'aide des trois quantités

$$\int \frac{dt}{\sqrt{T}}, \quad \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{T}}, \quad \frac{t\sqrt{T}}{t^2-\alpha}, \; (*)$$

l'expression de la première quadrature en t (85) sera donc de nouveau dans ce second cas composée de la même manière que dans le cas précédent, sauf que le terme algébrique sera plus simple, et qu'à la racine $\theta = \sigma$ envisagée de l'équation $F_3(\theta^2) = 0$ ne correspondra plus aucune fonction elliptique de troisième espèce, ainsi qu'il en sera encore pour les cinq autres racines.

Et plus généralement, si n racines en θ ($n \leqq 4$) étaient ainsi communes aux deux équations $F_4(\theta) = 0$ et $F_3(\theta^2)=0$, la composition de la première quadrature en question (85) serait toujours la même, sauf que le nombre des fonctions distinctes de troisième espèce serait $6 - n$, chacune des n racines précitées ne donnant de

(*) Voir de même, si l'on veut, JORDAN, *Ibid.* Tome II (p. 32-33), en tenant compte de l'observation consignée dans la note de la page 72 ci-dessus.

même naissance à aucune fonction de cette espèce, ainsi que nous venons de le dire pour la racine σ supposée seule en premier lieu.

Enfin, pour ce second cas, dans le développement de la seconde quadrature en t (85), le terme correspondant à chacune des racines communes en question $a_i = \tau^2 = \alpha$ (ou β), sera alors tel que

$$\frac{1}{2} A' \int \frac{dz}{(z-\tau^2)\sqrt{f_2(z)}} = \frac{1}{2} A' \int \frac{dz}{(z-\alpha)\sqrt{G(z-\alpha)(z-\beta)}}$$

$$= \frac{A'}{2\sqrt{G}} \int (z-\alpha)^{-\frac{3}{2}} (z-\beta)^{-\frac{1}{2}} dz = -\frac{A'}{G^{\frac{1}{2}}(\alpha-\beta)} \sqrt{\frac{z-\beta}{z-\alpha}} = \frac{-A'}{G^{\frac{1}{2}}(\alpha-\beta)} \sqrt{\frac{t^2-\beta}{t^2-\alpha}},$$

$$= \frac{-A'}{G(\alpha-\beta)} \frac{\sqrt{G(t^2-\alpha)(t^2-\beta)}}{t^2-\alpha} = \frac{-A'}{G(\alpha-\beta)} \cdot \frac{\sqrt{T}}{t^2-\alpha},$$

et se réduira par conséquent avec le précédent terme algébrique introduit par la première quadrature en t, ainsi que nous venons de le dire, de manière à donner cette fois, pour l'ensemble de l'expression de l'intégrale proposée (85), la forme $F(t)\sqrt{T}$ ou $\mathcal{F}(\theta)\sqrt{F_4(\theta)}$, F et $\mathcal{F}$ désignant toujours des fonctions rationnelles.

Les résultats obtenus tout à l'heure dans les deux cas particuliers que nous venons d'examiner reposaient toujours sur le changement de variable (80). Nous allons signaler maintenant les cas qui n'exigeront plus ce changement de variable, ou pour lesquels on devra en employer un autre.

Ce sont ceux pour lesquels l'équation $F_4(\theta)$ aura, ou bien des racines égales, ou bien des racines nulles ou infinies.

Si cette équation a deux racines égales, de telle sorte que l'on ait

$$F_4(\theta) = \mathfrak{A}(\theta-\alpha)(\theta-\beta)(\theta-\gamma)^2,$$

$$\sqrt{F_4(\theta)} = (\theta-\gamma)\sqrt{\mathfrak{A}(\theta-\alpha)(\theta-\beta)} = (\theta-\gamma)\sqrt{f_2(\theta)},$$

en adjoignant ce facteur $\theta-\gamma$ à ceux du dénominateur $F_3(\theta^2)$, il est clair que l'intégrale proposée pourra être mise alors sous la forme

$$\int_{\theta^{(1)}}^{\theta^{(2)}} \frac{\mathcal{F}_6(\theta)}{F_3(\theta^2)}\frac{d\theta}{\sqrt{F_4(\theta)}} = \int_{\theta^{(1)}}^{\theta^{(2)}} \left(\sum_{i=1}^{i=7} \frac{A'_i}{\theta - \alpha_i}\right)\frac{d\theta}{\sqrt{f_2(\theta)}}$$

$$= \sum_{i=1}^{i=7} A'_i \int_{\theta^{(1)}}^{\theta^{(2)}} \frac{d\theta}{(\theta - \alpha_i)\sqrt{f_2(\theta)}},$$

laquelle reproduit exactement, avec un terme de plus, la forme du développement déjà rencontré (86[bis]), dans lequel les deux limites $z^{(1)}$ et $z^{(2)}$ seraient remplacées par $\theta^{(1)}$ et $\theta^{(2)}$. Dans ce cas l'intégrale proposée se réduira donc à un seul terme logarithmique semblable à celui représenté par les égalités (88) et (88[bis]).

Il en serait évidemment de même encore (sauf toujours le nombre des termes), si l'équation $F_4(\theta) = 0$ avait deux racines infinies, puisque cette supposition équivaut à admettre que le polynôme $F_4(\theta)$ s'abaisserait au second degré seulement.

Si une seule des racines de la même équation devenait infinie, le dit polynôme $F_4(\theta)$ s'abaissant de même alors au troisième degré et étant par conséquent alors de la forme

$$F_4(\theta) = \mathcal{G}(\theta - \alpha)(\theta - \beta)(\theta - \gamma),$$

on se rappelle qu'il suffira alors de faire

$$\frac{\theta - \alpha}{\alpha - \beta} = -t^2 \quad \text{ou} \quad \theta = \alpha - (\alpha - \beta)t^2, \quad \text{et} \quad \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma} = k^2,$$

ce qui donnera successivement

$$\left\{\begin{array}{l}
\theta - \alpha = -(\alpha - \beta)t^2, \qquad d\theta = -(\alpha - \beta).2\,tdt, \\
\theta - \beta = (\alpha - \beta) - (\alpha - \beta)t^2 = (\alpha - \beta)(1 - t^2), \\
\theta - \gamma = (\alpha - \gamma) - (\alpha - \beta)t^2 = (\alpha - \gamma)\left(1 - \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma}t^2\right) = (\alpha - \gamma)(1 - k^2t^2), \\
(\theta - \alpha)(\theta - \beta)(\theta - \gamma) = -(\alpha - \beta)t^2.(\alpha - \beta)(1 - t^2).(\alpha - \gamma)(1 - k^2t^2) \\
\qquad = -(\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma).t^2(1 - t^2)(1 - k^2t^2),
\end{array}\right.$$

pour que le facteur irrationnel de l'élément $\frac{d\theta}{\sqrt{F_4(\theta)}}$ prenne la forme canonique

$$\frac{d\theta}{\sqrt{F_4(\theta)}} = \frac{-(\alpha-\beta)\,.\,2tdt}{\sqrt{\mathcal{G}(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)\,.\,t^2(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \frac{Gdt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

le coefficient constant G ayant alors pour valeur $G = \frac{-2}{\sqrt{\mathcal{G}\,(\alpha-\gamma)}}$, et par ailleurs, la fonction rationnelle $\mathcal{J}\,(\theta)$ (82) se changeant en même temps par cette nouvelle substitution dans une autre fonctiön rationnelle que nous représenterons encore par $\frac{\mathcal{J}_6\,(t^2)}{F_6\,(t^2)}$ [les nouveaux polynômes $\mathcal{J}_6$ et F_6 n'étant plus évidemment les mêmes que dans les formules ci-dessus (83) et suivantes], on voit donc que dans ce cas l'intégrale proposée se réduira seulement à la première des deux quadratures en t (89), dont nous avons indiqué plus haut la composition dans les différents cas qui pourront se présenter relativement aux deux polynômes $F_6\,(t^2)$ et $f_2\,(t^2)$, ce dernier réduit cette fois à la forme canonique, comme on vient de le voir, par le choix actuel de la nouvelle variable t.

Enfin, si, au lieu d'une ou deux racines infinies, on se trouvait en présence d'une ou deux racines nulles de la même équation $F_4\,(\theta) = 0$, il n'y aurait alors évidemment qu'à considérer, à la place des trois polynômes $F_4\,(\theta)$, $\mathcal{J}_6(\theta)$, $F_3\,(\theta^2)$ et de la différentielle $d\theta$, leurs transformées en $\frac{1}{\theta}$ pour rentrer exactement dans les conditions que nous venons d'envisager à l'instant, et arriver par suite à des conclusions entièrement semblables.

CHAPITRE III

Le point attiré étant situé sur un axe de symétrie du Système Ellipsoïdal, expression définitive des deux Composantes Normales au dit axe de symétrie.

Premier type de solution définitive pour la double hypothèse $X_0 = 0$. — Nous aurions vivement désiré, pour le problème traité dans le Chapitre précédent, pouvoir encore, ainsi que nous l'avions fait pour celui traité dans le Chapitre I, réduire toutes les intégrales elliptiques qui en composaient la solution aux seuls types canoniques Arg sn $(z, k) = \omega$, $Z(\omega, k)$, $\Pi(\omega, h, k)$, en fournissant alors de nouveau l'expression en fonction des données de tous les divers éléments z, h et k qui devaient y entrer ; mais nous n'avons pu le faire, parce qu'il aurait été nécessaire pour cela de posséder celles des coefficients a et b de la substitution (80), coefficients dont la détermination, d'après la méthode classique due à Legendre, supposerait la décomposition en facteurs du polynôme sous le radical, c'est-à-dire, en fait, la résolution de l'équation du quatrième degré $F_4(\theta) = 0$.

Toutefois, si cette résolution n'est pas praticable en général, parce que le polynôme $F_4(\theta)$ est en général, d'après sa définition (73) et (75), un polynôme complet, elle le deviendra lorsque les termes de degré impair y feront défaut, ladite équation devenant alors bi-carrée : circonstance qui se présentera lorsqu'on ajoutera à l'hypothèse $X_0 = 0$, sur laquelle était basé le calcul qui nous a conduit aux résultats en question relatifs à la composante X, la supposition $z_0 = 0$; c'est-à-dire quand on supposera le point attiré

situé, dans le plan principal xy si l'objet de la recherche est la quantité $I^{(\omega)}$ à laquelle se rapporte le tableau B (p. 65) des valeurs des coefficients dudit polynôme, ou bien sur l'axe du Système Ellipsoïdal qui coïncide avec l'axe des y (puisqu'on aura alors à la fois $x_0 = 0$ et $z_0 = 0$), si c'est la quantité $I^{(\varpi)}$ relative à la composante X_{yz} à laquelle se rapporte de même le tableau C (p. 66).

Nous allons donc effectuer ce dernier calcul de réduction aux formes canoniques de toutes les fonctions elliptiques dont sera composée la solution, en introduisant cette supposition $z_0 = 0$ dans les diverses expressions (72), (75), et (77) avec lesquelles sont constitués, comme constantes, les résultats des calculs du Chapitre précédent; puis, les nouveaux résultats définitifs correspondant à cette hypothèse particulière une fois obtenus, nous distinguerons de nouveau les deux cas spécifiés tout à l'heure, en introduisant seulement alors, comme à la fin du Chapitre précédent, soit la supposition $\varpi = 0$, x_0 et y_0 étant alors arbitraires, soit celle $x_0 = 0$ pour des valeurs quelconques de ϖ et d'y_0.

D'ailleurs, lorsque nous aurons ainsi obtenu les résultats définitifs pour le second de ces deux cas qui est le plus intéressant, en mettant alors à profit la règle pratique établie au début du même Chapitre (pp. 20 et 21), la permutation des deux plans coordonnés zx et xy nous permettra de déduire de ces résultats, par le moyen d'un simple jeu d'écritures, ceux relatifs aux suppositions simultanées $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$ pour la composante X_{zx}, duquel une double permutation circulaire déduira ensuite ceux relatifs aux suppositions simultanées $z_0 = 0$ et $x_0 = 0$ pour la composante Z_{yz} : de telle sorte qu'en rapprochant ce dernier résultat de celui obtenu en premier lieu, nous serons ainsi en possession de l'expression définitive des deux composantes X et Z relatives à la même hypothèse du point attiré situé sur l'axe des y, la seule composante Y restant à déterminer par le moyen des calculs que nous développerons dans le Chapitre suivant.

Le programme de ce troisième Chapitre étant ainsi nettement tracé, introduisons donc maintenant l'hypothèse en question $z_0 = 0$, ou ce qui est la même chose $Z_0 = 0$, dans les expressions (74) des coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ..., $\mathcal{E}$ du polynôme $F_4(\theta)$: elles se réduiront alors aux suivantes

$$(91)\quad \mathcal{A}=\mathrm{A},\quad \mathcal{B}=-\mathcal{D}=0,\quad \mathcal{C}=\mathrm{B}-2(n^2+\epsilon),\quad \mathcal{E}=\mathrm{C},$$

la forme des expressions (72) des coefficients A, B, C du polynôme $F_2(\theta^2)$ n'étant pas altérée par l'introduction de la dite hypothèse, du moment qu'elles ne contiennent explicitement ni z_0 ni Z_0, mais la signification de la constante Π qui y figure devenant, au lieu de l'expression (33), désormais la suivante

$$(92)\qquad \Pi=\varpi\left(1+\frac{y_0^2}{l^2}\right)+x_0^2,$$

en sous-entendant toujours, comme dans le Chapitre précédent, que des deux données ϖ et x_0 il y en a une de nulle que nous ne spécifierons qu'une fois les calculs complètement achevés.

Or, comme ces deux séries de valeurs donneront alors successivement, en tenant compte de la définition (58) de λ,

$$(93)\left\{\begin{aligned} \mathrm{B}^2-\mathrm{AC}&=[(\lambda^2-\mathrm{Y}_0^2)-\Pi]^2-[(\lambda+\mathrm{Y}_0)^2+\Pi][(\lambda-\mathrm{Y}_0)^2+\Pi]\\ &=[(\lambda^2-\mathrm{Y}_0^2)^2-2(\lambda^2-\mathrm{Y}_0^2)\Pi+\Pi^2]\\ &\quad-[(\lambda+\mathrm{Y}_0)^2(\lambda-\mathrm{Y}_0)^2+\Pi\{(\lambda+\mathrm{Y}_0)^2+(\lambda-\mathrm{Y}_0)^2\}+\Pi^2]\\ &=-2\Pi[(\lambda^2-\mathrm{Y}_0^2)+(\lambda^2+\mathrm{Y}_0^2)]=-4\Pi\lambda^2,\end{aligned}\right.$$

$$(94)\quad -\mathrm{B}\pm\sqrt{\mathrm{B}^2-\mathrm{AC}}=(-\lambda^2+\mathrm{Y}_0^2+\Pi)\pm 2i\lambda\sqrt{\Pi}=\mathrm{Y}_0^2+(\sqrt{\Pi}\pm i\lambda)^2,$$

$$(95)\left\{\begin{aligned} \mathcal{C}^2-\mathcal{A}\mathcal{E}&=[\mathrm{B}-2(n^2+\epsilon)]^2-\mathrm{AC}=[\mathrm{B}^2-4\mathrm{B}(n^2+\epsilon)+4(n^2+\epsilon)^2]-\mathrm{AC}\\ &=(\mathrm{B}^2-\mathrm{AC})+4(n^2+\epsilon)(-\mathrm{B}+n^2+\epsilon)\\ &=-4\Pi\lambda^2+4(n^2+\epsilon)\{(-\lambda^2+\mathrm{Y}_0^2+\Pi)+(n^2+\epsilon)\}\\ &=4\Pi\{-\lambda^2+(n^2+\epsilon)\}+4(n^2+\epsilon)\{-\lambda^2+\mathrm{Y}_0^2+(n^2+\epsilon)\}\\ &=4\Pi\{-(l^2-\epsilon)+(n^2+\epsilon)\}+4(n^2+\epsilon)\{(l^2-\epsilon)+\mathrm{Y}_0^2+(n^2+\epsilon)\}\\ &=4\Pi(l^2+n^2)+4(n^2+\epsilon)(l^2+n^2+\mathrm{Y}_0^2)\\ &=4\Pi(-m^2)+4(n^2+\epsilon)(-m^2+\mathrm{Y}_0^2)\\ &=-4[m^2\Pi-(n^2+\epsilon)(\mathrm{Y}_0^2-m^2)],\end{aligned}\right.$$

si l'on convient de désigner, par α et β d'une part, et par θ'^2 et θ''^2 d'autre part, les deux racines respectivement des deux équations en θ^2,

$$(96)\quad 0=F_2(\theta^2)=A\theta^4+2B\theta^2+C \quad \text{et} \quad 0=F_4(\theta)=\mathfrak{A}\theta^4+2\mathfrak{C}\theta^2+\mathfrak{E},$$

l'on aura donc en même temps

$$(97)\left\{\begin{array}{l} F_2(\theta^2)=A\theta^4+2B\theta^2+C=A(\theta^2-\alpha)(\theta^2-\beta),\\ F_4(\theta)=\mathfrak{A}\theta^4+2\mathfrak{C}\theta^2+\mathfrak{E}=\mathfrak{A}(\theta^2-\theta'^2)(\theta^2-\theta''^2)=\mathfrak{A}(\theta'^2-\theta^2)(\theta''^2-\theta^2),\end{array}\right.$$

la valeur des dites racines étant dès lors, eu égard aux valeurs précédentes (94) et (95), ainsi qu'à celles (75) du coefficient $\mathfrak{C}$, et (72) de $A=\mathfrak{A}$,

$$(98)\left\{\begin{array}{l} \alpha=\dfrac{1}{A}(-B+\sqrt{B^2-AC})=\dfrac{Y_0^2+(\sqrt{\Pi}+i\lambda)^2}{\Pi+(Y_0+\lambda)^2},\\ \beta=\dfrac{1}{A}(-B-\sqrt{B^2-AC})=\dfrac{Y_0^2+(\sqrt{\Pi}-i\lambda)^2}{\Pi+(Y_0+\lambda)^2};\end{array}\right.$$

$$(99)\left\{\begin{array}{l} \theta'^2=\dfrac{1}{\mathfrak{A}}(-\mathfrak{C}+\sqrt{\mathfrak{C}^2-\mathfrak{A}\mathfrak{E}})\\ \quad=\dfrac{(\rho_0^2+\varpi)-m^2+(n^2+\epsilon)+2i\sqrt{m^2\Pi-(n^2+\epsilon)(Y_0^2-m^2)}}{\Pi+(Y_0+\lambda)^2},\\ \theta''^2=\dfrac{1}{\mathfrak{A}}(-\mathfrak{C}-\sqrt{\mathfrak{C}^2-\mathfrak{A}\mathfrak{E}})\\ \quad=\dfrac{(\rho_0^2+\varpi)-m^2+(n^2+\epsilon)-2i\sqrt{m^2\Pi-(n^2+\epsilon)(Y_0^2-m^2)}}{\Pi+(Y_0+\lambda)^2}.\end{array}\right.$$

Cela posé, en faisant

$$(100)\quad \theta=\theta' t, \quad \text{d'où} \quad t^{(1)}=\frac{\theta^{(1)}}{\theta'} \quad \text{et} \quad t^{(2)}=\frac{\theta^{(2)}}{\theta'},$$

la seconde expression (97) de $F_1(\theta)$ devenant

$$(101) \qquad F_1(\theta) = A(\theta'^2 - \theta^2)(\theta''^2 - \theta^2) = A\,\theta'^2(1 - t^2).\,\theta''^2\left(1 - \frac{\theta'^2}{\theta''^2}t^2\right),$$

donnera donc successivement

$$\sqrt{F_1(\theta)} = \sqrt{A}\,\theta'\theta''\sqrt{(1 - t^2)\left(1 - \frac{\theta'^2}{\theta''^2}t^2\right)},$$

$$(102) \qquad \frac{d\theta}{\sqrt{F_1(\theta)}} = \frac{\theta' dt}{\sqrt{A}\,\theta'\theta''\sqrt{(1-t^2)\left(1-\frac{\theta'^2}{\theta''^2}t^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{A}\,\theta''}\,\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

en faisant

$$(103) \qquad k^2 = \frac{\theta'^2}{\theta''^2} = \frac{-\mathcal{C} + \sqrt{\mathcal{C}^2 - \mathcal{A}\mathcal{E}}}{-\mathcal{C} - \sqrt{\mathcal{C}^2 - \mathcal{A}\mathcal{E}}} = \frac{\mathcal{C}^2 - (\mathcal{C}^2 - \mathcal{A}\mathcal{E})}{(-\mathcal{C} - \sqrt{\mathcal{C}^2 - \mathcal{A}\mathcal{E}})^2},$$

et par conséquent le module k lui-même aura pour expression

$$k = \frac{\sqrt{\mathcal{A}\mathcal{E}}}{-\mathcal{C} - \sqrt{\mathcal{C}^2 - \mathcal{A}\mathcal{E}}},$$

c'est-à-dire, en tenant compte des valeurs (72) des coefficients $\mathcal{A} = A$ et $\mathcal{E} = C$ ainsi que de celle (32) de Π, qui donneront successivement

$$(103^{bis}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{A}\mathcal{E} = AC &= [(\lambda^2 + Y_0^2 + \Pi) + 2\lambda Y_0]\,[(\lambda^2 + Y_0^2 + \Pi) - 2\lambda Y_0] \\ &= (\lambda^2 + Y_0^2 + \Pi)^2 - 4\lambda^2 Y_0^2 = (\lambda^2 + \varpi + \rho_0^2)^2 - 4\lambda^2 Y_0^2, \end{aligned} \right.$$

que l'on obtiendra pour ledit module k définitivement la valeur :

$$k = \frac{\sqrt{(x_0^2 + y_0^2 + \varpi + \lambda^2)^2 - 4\lambda^2 Y_0^2}}{x_0^2 + y_0^2 + \varpi - m^2 + (n^2 + \epsilon) - 2i\sqrt{m^2\Pi - (n^2 + \epsilon)(Y_0^2 - m^2)}}.$$

D'autre part, l'autre polynôme du quatrième degré $f_4(\theta)$ (76) se réduisant dans l'hypothèse actuelle à

$$f_4(\theta) = -2i\sqrt{n^2+\epsilon}\,(A\theta^4 - C),$$

pour décomposer en fractions simples en θ^2 la fonction rationnelle $\mathcal{F}(\theta)$ (82) qui figure dans l'élément de l'intégrale (ϵ) (79) qu'il s'agit de calculer, nous écrirons en premier lieu

$$\frac{A\theta^4 - C}{F_2(\theta^2)} = \frac{(A\theta^4 + 2B\theta^2 + C) - 2(B\theta^2 + C)}{A\theta^4 + 2B\theta^2 + C} = 1 - \frac{2(B\theta^2 + C)}{F_2(\theta^2)},$$

et nous mettrons en conséquence tout d'abord cette fonction rationnelle, en ayant égard aux expressions (78) des polynômes $\mathcal{F}_6(\theta)$ et $F_3(\theta^2)$ sous la forme

$$\mathcal{F}(\theta) = \frac{\mathcal{F}_6(\theta)}{F_3(\theta^2)} = \frac{i\lambda(1+\theta^2)f_4(\theta)}{(1-\theta^2)F_2(\theta^2)} = i\lambda\frac{1+\theta^2}{1-\theta^2}\,\frac{-2i\sqrt{n^2+\epsilon}\,(A\theta^4 - C)}{F^2(\theta^2)}$$

$$= 2\lambda\sqrt{n^2+\epsilon}\,\frac{\theta^2+1}{\theta^2-1}\left(1 - \frac{2(B\theta^2+C)}{F_2(\theta^2)}\right) = 2\lambda\sqrt{n^2+\epsilon}\left(\frac{\theta^2+1}{\theta^2-1} - \frac{2(B\theta^2+C)(\theta^2+1)}{F_2(\theta^2)(\theta^2-1)}\right)$$

puis cela fait, nous observerons que le dénominateur de la seconde fraction dans la parenthèse ne pourra renfermer aucun facteur double, car d'une part la condition pour que le trinôme $F^2(\theta^2)$ (71) en admette un lui-même équivaut d'après la valeur (93) de son discriminant à la condition $\lambda = 0$, et d'autre part la condition pour qu'il admette le facteur $\theta^2 - 1$ serait, en ayant égard aux définitions (72),

$$(104^{\text{bis}})\quad \begin{cases} 0 = A + 2B + C = [(\lambda^2 + 2\lambda Y_0 + Y_0^2) + \Pi] + 2(\lambda^2 - Y_0^2 - \Pi) \\ \qquad\qquad + [(\lambda^2 - 2\lambda Y_0 + Y_0^2) + \Pi] = 4\lambda^2, \end{cases}$$

c'est-à-dire encore la même condition $\lambda = 0$ ou $\epsilon = l^2$, hypothèse que nous avons dû exclure (p. 61) pour la détermination de l'intégrale (57) qui constituait le point de départ des calculs de

notre Chapitre II, dont celui actuel n'est que le prolongement et la conséquence.

Le dénominateur de la fonction rationnelle précitée (104) ne renfermant ainsi que des facteurs simples, les formules classiques nous donneront alors, en ayant égard à l'expression (97) du trinôme $F_2(\theta^2)$,

$$(105)\quad \frac{2(B\theta^2+C)(\theta^2+1)}{F_2(\theta^2)(\theta^2-1)}=\frac{2(B\theta^2+C)(\theta^2+1)}{A(\theta^2-\alpha)(\theta^2-\beta).(\theta^2-1)}=\frac{L}{\theta^2-\alpha}+\frac{M}{\theta^2-\beta}+\frac{N}{\theta^2-1},$$

les valeurs des résidus L, M, N étant :

$$(106)\quad L=\frac{2(B\alpha+C)(\alpha+1)}{A(\alpha-\beta)(\alpha-1)},\quad M=\frac{2(B\beta+C)(\beta+1)}{A(\beta-\alpha)(\beta-1)},\quad N=\frac{2(B+C).2}{A(1-\alpha)(1-\beta)}.$$

Or, comme on trouvera successivement, d'abord en partant des valeurs (98) des racines α et β, et ayant égard à la précédente (93),

$$(106^{bis})\quad \begin{cases} A\alpha+B=-(A\beta+B)=\sqrt{B^2-AC}=2i\lambda\sqrt{\Pi}, \\ A(\alpha-\beta)=-A(\beta-\alpha)=2\sqrt{B^2-AC}=4i\lambda\sqrt{\Pi}, \\ B\alpha+C=\frac{B}{A}\left(-B+\sqrt{B^2-AC}\right)+C=\frac{1}{A}\left(-(B^2-AC)+B\sqrt{B^2-AC}\right), \\ \qquad =-\sqrt{B^2-AC}\,\frac{-B+\sqrt{B^2-AC}}{A}=-\sqrt{B^2-AC}\,.\,\alpha, \\ \frac{2(B\alpha+C)}{A(\alpha-\beta)}=\frac{-2\sqrt{B^2-AC}\,.\,\alpha}{2\sqrt{B^2-AC}}=-\alpha, \end{cases}$$

puis, en rappelant la seconde égalité (77), et remarquant que la première (97) jointe à la précédente (104bis) donnent ensemble

$$(107)\quad \begin{cases} B+C=2\lambda^2-2\lambda Y_0=2\lambda^2\left(1-\frac{Y_0}{\lambda}\right), \\ A(1-\alpha)(1-\beta)=F_2(1)=A+2B+C=4\lambda^2, \end{cases}$$

les expressions (106) des résidus en question deviendront tout d'abord

$$L = -\alpha\frac{\alpha+1}{\alpha-1}, \qquad M = -\beta\frac{\beta+1}{\beta-1}, \qquad N = 2\left(1-\frac{Y_0}{\lambda}\right).$$

Ce premier résultat une fois acquis, l'expression de la fonction rationnelle (105) étant alors

$$\frac{2(B\theta^2+C)(\theta^2+1)}{F_2(\theta^2)(\theta^2-1)} = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}\frac{-\alpha}{\theta^2-\alpha} + \frac{\beta+1}{\beta-1}\frac{-\beta}{\theta^2-\beta} + \frac{2\left(1-\frac{Y_0}{\lambda}\right)}{\theta^2-1},$$

en la remettant dans la précédente (104) de la fonction $\mathcal{F}(\theta)$ en question, cette dernière deviendra :

$$\mathcal{F}(\theta) = 2\lambda\sqrt{n^2+\epsilon}\left[\frac{\theta^2+1}{\theta^2-1} - \left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\frac{-\alpha}{\theta^2-\alpha} + \frac{\beta+1}{\beta-1}\frac{-\beta}{\theta^2-\beta} + \frac{2\left(1-\frac{Y_0}{\lambda}\right)}{\theta^2-1}\right)\right].$$

Cela fait, supposant tout d'abord α et β différents de θ'^2 et θ''^2, nous écrirons cette expression en réunissant les deux fractions extrêmes qui ont même dénominateur, et ajoutant et retranchant le terme θ^2 au numérateur des deux autres fractions :

$$\mathcal{F}(\theta) = 2\lambda\sqrt{n^2+\epsilon}\left[\frac{\theta^2+2\frac{Y_0}{\lambda}-1}{\theta^2-1} - \frac{\alpha+1}{\alpha-1}\frac{(\theta^2-\alpha)-\theta^2}{\theta^2-\alpha} - \frac{\beta+1}{\beta-1}\frac{(\theta^2-\beta)-\theta^2}{\theta^2-\beta}\right].$$

Dès lors, en observant que la première fraction pourra s'écrire elle-même

$$\frac{\theta^2+2\frac{Y_0}{\lambda}-1}{\theta^2-1} = \frac{\left(1-2\frac{Y_0}{\lambda}\right)(\theta^2-1)+2\frac{Y_0}{\lambda}\theta^2}{\theta^2-1} = \left(1-2\frac{Y_0}{\lambda}\right)+2\frac{Y_0}{\lambda}\frac{\theta^2}{\theta^2-1},$$

l'expression précédente deviendra donc

$$(108)\quad \begin{cases} \mathcal{F}(\theta) = 2\lambda\sqrt{n^2+\epsilon}\left[\left(1-2\frac{Y_0}{\lambda}+2\frac{Y_0}{\lambda}\frac{\theta^2}{\theta^2-1}\right) - \frac{\alpha+1}{\alpha-1}\left(1-\frac{\theta^2}{\theta^2-\alpha}\right) \right.\\ \qquad\qquad \left. - \frac{\beta+1}{\beta-1}\left(1-\frac{\theta^2}{\theta^2-\beta}\right)\right] \\ \quad = 2\lambda\sqrt{n^2+\epsilon}\left(\mathcal{S}+\mathcal{T}\frac{\theta^2}{\theta^2-1}+\mathcal{Q}\frac{\theta^2}{\theta^2-\alpha}+\mathcal{R}\frac{\theta^2}{\theta^2-\beta}\right), \end{cases}$$

en faisant, pour abréger,

$$(109)\quad \begin{cases} \mathcal{P} = 2\dfrac{Y_0}{\lambda}, \quad \mathcal{Q} = \dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}, \quad \mathcal{R} = \dfrac{\beta+1}{\beta-1}, \\ \mathcal{S} = \left(1 - 2\dfrac{Y_0}{\lambda}\right) - \dfrac{\alpha+1}{\alpha-1} - \dfrac{\beta+1}{\beta-1} = 1 - (\mathcal{P} + \mathcal{Q} + \mathcal{R}), \end{cases}$$

quantités qui se calculeront très aisément en partant de celles (98) des racines α et β.

En effet, la seconde des dites expressions pouvant être écrite, en tenant compte de la seconde valeur (107),

$$(110)\qquad \mathcal{Q} = -\frac{1+\alpha}{1-\alpha} = -\frac{A(1+\alpha)(1-\beta)}{A(1-\alpha)(1-\beta)} = \frac{-A}{4\lambda^2}(1+\alpha)(1-\beta),$$

et d'autre part, les valeurs précitées (98) des racines α et β donnant séparément, en ayant égard à celle (72) du coefficient A,

$$\begin{aligned} 1+\alpha &= 1 + \frac{1}{A}[Y_0^2 + (\sqrt{\Pi} + i\lambda)^2] \\ &= \frac{1}{A}[\{(Y_0+\lambda)^2 + \Pi\} + \{Y_0^2 + (\sqrt{\Pi} + i\lambda)^2\}] \\ &= \frac{1}{A}[\{(Y_0^2 + 2\lambda Y_0 + \lambda^2) + \Pi\} + \{Y_0^2 + (\Pi + 2i\lambda\sqrt{\Pi} - \lambda^2)\}] \\ &= \frac{2}{A}[(Y_0^2 + \lambda Y_0 + \Pi) + i\lambda\sqrt{\Pi}] = \frac{2}{A}[Y_0(Y_0+\lambda) + i\sqrt{\Pi}(\lambda - i\sqrt{\Pi})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1-\beta &= 1 - \frac{1}{A}[Y_0^2 + (\sqrt{\Pi} - i\lambda)^2] \\ &= \frac{1}{A}[\{(Y_0+\lambda)^2 + \Pi\} - \{Y_0^2 + (\sqrt{\Pi} - i\lambda)^2\}] \\ &= \frac{1}{A}[\{(Y_0^2 + 2\lambda Y_0 + \lambda^2) + \Pi\} - \{Y_0^2 + (\Pi - 2i\lambda\sqrt{\Pi} - \lambda^2)\}] \\ &= \frac{2\lambda}{A}[(Y_0+\lambda) + i\sqrt{\Pi}], \end{aligned}$$

l'expression précédente (110) deviendra donc successivement

$$\mathcal{Q}=\frac{-A}{4\lambda^2}\cdot\frac{2}{A}[Y_0(Y_0+\lambda)+i\sqrt{\Pi}(\lambda-i\sqrt{\Pi})].\frac{2\lambda}{A}[(Y_0+\lambda)+i\sqrt{\Pi}]$$

$$=\frac{-1}{\lambda A}[Y_0(Y_0+\lambda)^2+i\sqrt{\Pi}(Y_0+\lambda)\{Y_0+(\lambda-i\sqrt{\Pi})\}+(i\sqrt{\Pi})^2(\lambda-i\sqrt{\Pi})]$$

$$=\frac{-1}{\lambda A}[Y_0(Y_0+\lambda)^2+i\sqrt{\Pi}\{(Y_0+\lambda)^2-i\sqrt{\Pi}(Y_0+\lambda)\}-\Pi(\lambda-i\sqrt{\Pi})]$$

$$=\frac{-1}{\lambda A}[(Y_0+i\sqrt{\Pi})(Y_0+\lambda)^2+\Pi(Y_0+\lambda)-\Pi(\lambda-i\sqrt{\Pi})]$$

$$=\frac{-1}{\lambda A}[(Y_0+i\sqrt{\Pi})(Y_0+\lambda)^2+\Pi(Y_0+i\sqrt{\Pi})]$$

$$=\frac{-1}{\lambda A}(Y_0+i\sqrt{\Pi})\{(Y_0+\lambda)^2+\Pi\};$$

et alors, si l'on fait attention que la valeur de β se déduit de celle de α par le simple changement de i en $-i$, d'abord l'expression que nous venons d'écrire nous fournira donc à elle seule, eu égard à la valeur (72) de A, pour les deux coefficients $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ (109), les deux valeurs très simples

$$\mathcal{Q}=\frac{-1}{\lambda}(Y_0+i\sqrt{\Pi}),\qquad \mathcal{R}=\frac{-1}{\lambda}(Y_0-i\sqrt{\Pi}),$$

et par suite les trois premiers des quatre mêmes coefficients étant ainsi les valeurs

1) $$\mathcal{P}=\frac{2Y_0}{\lambda},\qquad \mathcal{Q}=\frac{-1}{\lambda}(Y_0+i\sqrt{\Pi}),\qquad \mathcal{R}=\frac{-1}{\lambda}(Y_0-i\sqrt{\Pi}),$$

qui donnent ensemble

$$\mathcal{P}+\mathcal{Q}+\mathcal{R}=0,$$

la valeur du quatrième coefficient S sera donc simplement, d'après sa définition (109) :

$$\mathcal{S}=1.$$

Le développement de la fonction rationnelle $\mathcal{F}(\theta)$ étant ainsi acquis sous la forme (108), nous l'écrirons, en introduisant à la place de θ la nouvelle variable t (100),

$$\mathcal{F}(\theta) = 2\lambda\sqrt{n^2+\epsilon}\left(\mathcal{S} - \mathcal{S}\frac{\theta^2}{1-\theta^2} - \mathcal{Q}\frac{\frac{\theta^2}{\alpha}}{1-\frac{\theta^2}{\alpha}} - \mathcal{R}\frac{\frac{\theta^2}{\beta}}{1-\frac{\theta^2}{\beta}}\right)$$

$$= 2\lambda\sqrt{n^2+\epsilon}\left(1 - \mathcal{S}\frac{\theta'^2 t^2}{1-\theta'^2 t^2} - \mathcal{Q}\frac{\frac{\theta'^2}{\alpha}t^2}{1-\frac{\theta'^2}{\alpha}t^2} - \mathcal{R}\frac{\frac{\theta'^2}{\beta}t^2}{1-\frac{\theta'^2}{\beta}t^2}\right),$$

puis cela fait, multipliant les premier et second membres par $\frac{d\theta}{\sqrt{F_4(\theta)}}$ en même temps que le troisième par la valeur égale (102), puis négligeant le membre intermédiaire, on aura d'abord

$$(111^{\text{bis}})\left\{\begin{aligned} \mathcal{F}(\theta)\frac{d\theta}{\sqrt{F_4(\theta)}} = 2\lambda\sqrt{n^2+\epsilon}&\left(\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{A}\theta''}} - \mathcal{S}\frac{\frac{\theta'^2}{\sqrt{\mathfrak{A}\theta''}}t^2}{1-\theta'^2 t^2} - \mathcal{Q}\frac{\frac{\theta'^2}{\sqrt{\mathfrak{A}\theta''.\alpha}}t^2}{1-\frac{\theta'^2}{\alpha}t^2}\right. \\ &\left. - \mathcal{R}\frac{\frac{\theta'^2}{\sqrt{\mathfrak{A}\theta''.\beta}}t^2}{1-\frac{\theta'^2}{\beta}t^2}\right)\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},\end{aligned}\right.$$

et enfin, en intégrant alors entre les limites $t^{(1)} = \frac{\theta^{(1)}}{\theta'}$ et $t^{(2)} = \frac{\theta^{(2)}}{\theta'}$, $\theta^{(1)}$ et $\theta^{(2)}$ étant les limites de θ dont nous avons indiqué les valeurs pour chaque Cas dans le Tableau Θ du Chapitre II (p. 64), on obtiendra ainsi, l'expression de l'intégrale (ϵ) de la solution (79) qu'il s'agit de calculer pour l'hypothèse particulière $z_0 = 0$ du présent Chapitre. Cette préparation étant achevée, l'on voit qu'il suffira dans ce but de faire à présent $t = \text{sn}\,(\omega, k)$,

pour que les quatre termes qui composeront la dite expression représentent, à un facteur près, chacun entre les limites de ω correspondant à celles précitées de t, le premier la fonction inverse Arg sn $(t, k) = \omega$, et les autres trois fonctions elliptiques de troisième espèce $\Pi(\omega, h, k)$, dont le paramètre et le coefficient, différents pour chacune, restent actuellement les seules quantités à calculer.

Pour effectuer cette dernière détermination, faisant donc à cet effet $1 = \alpha_1$, $\alpha = \alpha_2$, $\beta = \alpha_3$, en même temps que $t = \text{sn}(\omega, k)$, nous pourrons donc comprendre les trois dernières quadratures auxquelles donnerait naissance l'intégration que nous venons de dire, sous la forme synthétique

$$\int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \frac{\frac{\theta'^2}{\sqrt{\mathfrak{A}}\,\theta''.\alpha_i} t^2}{1 - \frac{\theta'^2}{\alpha_i} t^2} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_{\omega^{(1)}}^{\omega^{(2)}} \frac{\frac{\theta'^2}{\sqrt{\mathfrak{A}}\,\theta''.\alpha_i} \text{sn}^2(\omega, k)}{1 - \frac{\theta'^2}{\alpha_i}\text{sn}^2(\omega, k)} d\omega$$

$$= \frac{\frac{\theta'^2}{\sqrt{\mathfrak{A}}\,\theta''.\alpha_i}}{k^2\text{sn}(h_i,k)\text{cn}(h_i,k)\text{dn}(h_i,k)} \int_{\omega^{(1)}}^{\omega^{(2)}} \frac{k^2\text{sn}(h_i,k)\text{cn}(h_i,k)\text{dn}(h_i,k).\text{sn}^2(\omega,k)}{1 - k^2\text{sn}^2(h_i,k).\text{sn}^2(\omega,k)} d\omega,$$

$$= \mathfrak{A}_i \Big[\Pi(\omega, h_i, k)\Big]_{(1)}^{(2)},$$

à la condition de faire à la fois

$$\text{(112)} \qquad \frac{\theta'^2}{\alpha_i} = k^2\text{sn}^2(h_i, k), \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{A}_i = \frac{\frac{\theta'^2}{\sqrt{\mathfrak{A}}\,\theta''.\alpha_i}}{k^2\text{sn}(h_i,k)\text{cn}(h_i,k)\text{dn}(h_i,k)}.$$

Or, la première de ces deux égalités donnant successivement, en tenant compte, d'abord de la première valeur (103) de k^2, puis de l'expression (97) du polynôme $F_4(\theta)$,

$$
(113)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{sn}^2(h_1,k)=\frac{\theta'^2}{\alpha_1 k^2}=\frac{\theta'^2}{\alpha_1\frac{\theta'^2}{\theta''^2}}=\frac{\theta''^2}{\alpha_1},\\
&\mathrm{cn}^2(h_1,k)=1-\mathrm{sn}^2(h_1,k)=1-\frac{\theta''^2}{\alpha_1}=\frac{\alpha_1-\theta''^2}{\alpha_1},\\
&\mathrm{dn}^2(h_1,k)=1-k^2\mathrm{sn}^2(h_1,k)=1-\frac{\theta'^2}{\alpha_i}=\frac{\alpha_1-\theta'^2}{\alpha_1}.\\
&k^4\mathrm{sn}^2(h_1,k)\mathrm{cn}^2(h_1,k)\mathrm{dn}^2(h_1,k)=\left(\frac{\theta'^2}{\theta''^2}\right)^2\frac{\theta''^2}{\alpha_1}\,\frac{\alpha_i-\theta''^2}{\alpha_1}\,\frac{\alpha_1-\theta'^2}{\alpha_1}\\
&\qquad\qquad=\frac{\theta'^4}{\theta''^2}\,\frac{\mathfrak{A}(\alpha_1-\theta'^2)(\alpha_1-\theta''^2)}{\mathfrak{A}\,\alpha_1^3}=\left(\frac{\theta'}{\theta''}\right)^2\frac{F_4(\alpha_1^2)}{\mathfrak{A}_1\,\alpha_1^3},\\
&k^2\mathrm{sn}(h_i,k)\mathrm{cn}(h_i,k)\mathrm{dn}(h_i,k)=\frac{\theta'^2}{\theta''}\,\frac{\sqrt{F_4(\alpha_1^{\frac{1}{2}})}}{\sqrt{\mathfrak{A}}\,\alpha_1^{\frac{3}{2}}},\\
&\frac{\dfrac{\theta'^2}{\theta''}\,\dfrac{1}{\sqrt{\mathfrak{A}}\,\alpha_1}}{k^2\mathrm{sn}(h_i,k)\mathrm{cn}(h_i^2,k)\mathrm{dn}(h_i,k)}=\frac{\sqrt{\alpha_i}}{\sqrt{F_4(\alpha_1^{\frac{1}{2}})}},
\end{aligned}\right.
$$

la seconde des égalités précédentes (112) fournira donc immédiatement la valeur :

$$(114)\qquad \mathfrak{A}_i=\sqrt{\frac{\alpha_i}{F_4(\alpha_i^{\frac{1}{2}})}}.$$

Cela posé, comme on conclura des expressions (96) de $F_2(\theta)$ et $F_4(\theta)$, puis des valeurs (91) des coefficients du second de ces trinômes,

$$
(115)\quad \left\{
\begin{aligned}
F_4(\alpha_i^{\frac{1}{2}})&=\mathfrak{A}\alpha_i^2+2\mathfrak{C}\alpha_i+\mathfrak{E}=(A\alpha_i^2+2B\alpha_i+C)+2(C-B)\alpha_i\\
&=F_2(\alpha_i)-4(n^2+\epsilon)\alpha_i,
\end{aligned}\right.
$$

on voit donc, d'une part, que pour $i=1$, c'est-à-dire pour $\alpha_i=\alpha_1=1$, l'on aura, en ayant égard à la seconde expression (107), ainsi qu'à la définition (58) de λ^2,

$$F_4(\alpha_1 \tfrac{1}{s}) = F_4(1) = F_2(1) - 4(n^2+\epsilon) = 4\lambda^2 - 4(n^2+\epsilon)$$
$$= 4[-(l^2-\epsilon)-(n^2+\epsilon)] = 4m^2,$$

en sorte que l'expression précédente (114) donnera, pour la valeur du coefficient de la première fonction Π,

$$(116) \qquad \mathfrak{A}_1 = \sqrt{\frac{\alpha_1}{F_4(\alpha_1 \tfrac{1}{s})}} = \sqrt{\frac{1}{4m^2}} = \frac{\pm 1}{2m};$$

et, d'autre part, que pour l'indice $i = 2$ ou 3, c'est-à-dire $\alpha_i = \alpha$ ou β, cette même expression (114) se réduira, eu égard à la signification même de ces deux symboles, simplement à

$$F_4(\alpha_i \tfrac{1}{s}) = -4(n^2+\epsilon)\alpha_i,$$

en sorte que la valeur correspondante du coefficient $\mathfrak{A}_i$ sera

$$\mathfrak{A}_i = \sqrt{\frac{\alpha_i}{-4(n^2+\epsilon)\alpha_i}} = \sqrt{\frac{1}{-4(n^2+\epsilon)}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}\sqrt{n^2+\epsilon}},$$

et l'on aura par conséquent :

$$(117) \qquad \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_3 = \frac{\pm\sqrt{-1}}{2\sqrt{n^2+\epsilon}}.$$

Les trois valeurs du coefficient $\mathfrak{A}_i$ étant ainsi acquises, on voit donc que l'expression ci-dessus (111bis), étant exprimée en ω au lieu de t ou θ, puis intégrée entre les limites $\omega^{(1)}$ et $\omega^{(2)}$ correspondant à $t^{(1)}$ et $t^{(2)}$ ou $\theta^{(1)}$ et $\theta^{(2)}$, fournira, comme nous l'avons dit, pour la quantité cherchée (ϵ) la valeur

$$(\epsilon) = \int_{\theta^{(1)}}^{\theta^{(2)}} \mathcal{F}(\theta)\frac{d\theta}{\sqrt{F_4(\theta)}} = 2\lambda\sqrt{n^2+\epsilon}\left(\frac{\omega^{(2)}-\omega^{(1)}}{\sqrt{\mathfrak{A}}\,\theta^4}\right.$$
$$\left. - \mathfrak{P}\mathfrak{A}_1\Big[\Pi(\omega, h_1, k)\Big]_{(1)}^{(2)} - \mathfrak{Q}\mathfrak{A}_2\Big[\Pi(\omega, h_2, k)\Big]_{(1)}^{(2)} - \mathfrak{R}\mathfrak{A}_3\Big[\Pi(\omega, h_3, k)\Big]_{(1)}^{(2)}\right)$$

et dès lors, les limites spécifiées par les indices (1) et (2) étant les mêmes pour tous les termes, la quantité $I^{(\varpi)}$ elle-même, fournie par la formule (79) du Chapitre II, se présentera pour le cas particulier actuel sous la forme

$$(118)\quad I^{(\varpi)}=\sum_{\epsilon}\pm\Big[A_0\,\omega+A_1\Pi(\omega,h_1,k)+A_2\Pi(\omega,h_2,k)+A_3\Pi(\omega,h_3,k)\Big]_{(1)}^{(2)},$$

à la condition de faire à la fois maintenant, en ayant égard aux définitions (112) des paramètres h_i, ainsi qu'aux valeurs (63) de $\theta^{(1)}$ et $\theta^{(2)}$:

$$(119)\quad\left\{\begin{aligned}
&A_0=\frac{2\lambda\sqrt{n^2+\epsilon}}{\sqrt{\mathfrak{A}}\,\theta''},\quad A_1=-2\lambda\sqrt{n^2+\epsilon}\,.\,\mathcal{P}\mathfrak{A}_1,\quad A_2=-2\lambda\sqrt{n^2+\epsilon}\,.\,\mathfrak{Q}\mathfrak{A}_2,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad A_3=-2\lambda\sqrt{n^2+\epsilon}\,.\,\mathfrak{R}\mathfrak{A}_3,\\
&\mathrm{sn}^2(h_1,k)=\frac{\theta''^2}{\alpha_1}=\theta''^2,\quad \mathrm{sn}^2(h_2,k)=\frac{\theta''^2}{\alpha_2}=\frac{\theta''^2}{\alpha},\quad \mathrm{sn}^2(h_3,k)=\frac{\theta''^2}{\alpha_3}=\frac{\theta''^2}{\beta},\\
&\mathrm{sn}^2(\omega^{(1)},k)=\frac{\theta^{(1)}}{\theta'}=\frac{1}{\theta'}\,\frac{i\sqrt{l^2-\eta_1}+m}{\sqrt{n^2+\eta_1}},\quad \mathrm{sn}^2(\omega^{(2)},k)=\frac{\theta^{(2)}}{\theta'}=\frac{1}{\theta'}\,\frac{i\sqrt{l^2-\eta_2}+m}{\sqrt{n^2+\eta_2}}.
\end{aligned}\right.$$

On peut réduire le nombre des symboles qui entrent dans l'ensemble de ces définitions, attendu que les diverses quantités qui y figurent ne sont pas toutes indépendantes. En effet, ayant, en vertu des expressions (96) des polynômes $F_2(\theta)$ et $F_4(\theta)$ et des égalités (91),

$$(120)\quad \theta'^2\theta''^2=\frac{\mathcal{E}}{\mathfrak{A}}=\frac{C}{A}=\alpha\beta,\qquad \text{d'où}\qquad \theta'=\frac{\sqrt{\mathcal{E}}}{\sqrt{\mathfrak{A}}\,\theta''}=\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}\,\theta''},$$

en premier lieu, si l'on désigne par D la quantité

$$(121)\qquad D=\mathfrak{A}\theta''^2=A\theta''^2,$$

où θ''^2 représente la valeur (99), à la place de celle (103) de k^2 et des équations de définition qui précèdent, on pourra écrire celles-ci

$$\left\{\begin{aligned} &k^2 = \theta'^2 \frac{1}{\theta''^2} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{A}\theta''^2}\frac{1}{\theta''^2} = \frac{\mathcal{A}\mathcal{E}}{(\mathcal{A}\theta''^2)^2} = \frac{AC}{D^2}, \qquad A_0 = \frac{2\lambda\sqrt{n^2+\epsilon}}{\sqrt{D}}, \\ &\mathrm{sn}^2(h_1, k) = \frac{\mathcal{A}\theta''^2}{\mathcal{A}} = \frac{D}{A}, \quad \mathrm{sn}^2(h_2, k) = \frac{A\theta''^2}{A\alpha} = \frac{D}{Y_0^2 + (\sqrt{\Pi} + i\lambda)^2}, \end{aligned}\right.$$

dans lesquelles le produit AC tient lieu de l'expression (103bis); et en même temps, à la place des deux dernières (119), les deux limites $\omega^{(1)}$ et $\omega^{(2)}$ de ω seront alors fournies l'une et l'autre par une équation du type :

$$\mathrm{sn}(\omega, k) = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{C}} \frac{i\sqrt{l^2-\eta}+m}{\sqrt{n^2+\eta}}.$$

Puis, en second lieu, ayant alors, en vertu des premières définitions (103) et (119), ainsi que de la première suite des égalités ci-dessus (120),

$$k^2\,\mathrm{sn}^2(h_2, k)\,\mathrm{sn}^2(h_3, k) = \frac{\theta'^2}{\theta''^2}\frac{\theta''^2}{\alpha}\frac{\theta''^2}{\beta} = \frac{\theta'^2\theta''^2}{\alpha\beta} = 1,$$

d'où

$$\mathrm{sn}(h_3, k) = \frac{1}{\pm k\,\mathrm{sn}(h_2, k)} = \frac{1}{k\,\mathrm{sn}(\pm h_2, k)} = \mathrm{sn}(\pm h_2 + iK'),$$

on pourra donc prendre pour h_3 la valeur très simple :

$$(122) \qquad h_3 = \pm h_2 + iK'.$$

Enfin, par l'introduction de la même quantité D(121), les valeurs des quatre coefficients A_i (119) devenant, en tenant compte de celles (58) de λ, (111) de $\mathcal{S}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$, et (116) et (117) de $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, puis faisant usage encore du symbole E (53) du Chapitre I,

$$
(123)\left\{
\begin{aligned}
A_0 &= \frac{2\lambda\sqrt{n^2+\epsilon}}{\sqrt{\mathfrak{A}}\,\theta''} = \frac{2i\sqrt{l^2-\epsilon}\sqrt{n^2+\epsilon}}{\sqrt{D}} = 2i\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{D}},\\
A_1 &= -2\lambda\sqrt{n^2+\epsilon}\,.\,\mathfrak{P}\mathfrak{A}_1 = -2\lambda\sqrt{n^2+\epsilon}\,.\,\frac{2Y_0}{\lambda}\frac{-1}{2m} = 2\frac{Y_0}{m}\sqrt{n^2+\epsilon},\\
A_2 &= -2\lambda\sqrt{n^2+\epsilon}\,.\,\mathfrak{Q}\mathfrak{A}_2 = -2\lambda\sqrt{n^2+\epsilon}\,.\,\frac{-1}{\lambda}(Y_0+i\sqrt{\Pi})\frac{-i}{2\sqrt{n^2+\epsilon}}\\
&= -i(Y_0+i\sqrt{\Pi}) = \sqrt{\Pi}-iY_0,\\
A_3 &= -2\lambda\sqrt{n^2+\epsilon}\,.\,\mathfrak{R}\mathfrak{A}_3 = -2\lambda\sqrt{n^2+\epsilon}\,.\,\frac{-1}{\lambda}(Y_0-i\sqrt{\Pi})\frac{-i}{2\sqrt{n^2+\epsilon}}\\
&= -i(Y_0-i\sqrt{\Pi}) = -(\sqrt{\Pi}+iY_0),
\end{aligned}\right.
$$

on voit donc que la formule (118), à laquelle nous sommes arrivés comme type de la solution, sera finalement

$$
(124)\quad I^{(\varpi)} = \sum_{\epsilon} \pm\Big[2i\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{D}}\omega + 2\frac{Y_0}{m}\sqrt{n^2+\epsilon}\,\Pi(\omega, h_1, k) + (\sqrt{\Pi}-iY_0)\,\Pi(\omega, h_2, k) - (\sqrt{\Pi}+iY_0)\,\Pi(\omega, h_3, k)\Big]_{\omega}^{\varpi},
$$

tous les divers symboles qui y figurent étant définis successivement par les explications qui précèdent.

Un dernier point reste toutefois encore à élucider, à savoir celui du signe qu'il faudra adopter dans la valeur (122) $h_3 = \pm h_2 + iK'$ du paramètre de la troisième fonction Π (car il est bien évident que ce signe ne saurait être arbitraire) : question qui ne pourra être tranchée qu'en le constatant sur un cas particulier, c'est-à-dire, en essayant à tour de rôle les deux signes dans un cas particulier pour lequel la solution soit déjà connue, par exemple celui correspondant à l'hypothèse $\rho_0 = 0$, et comparant à chaque fois le résultat ainsi obtenu avec celui que nous avons trouvé pour ce cas simple dans notre Chapitre I.

En faisant donc à la fois $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$ dans le résultat et les formules connexes qui précèdent, lesquels supposaient déjà comme point de départ $z_0 = 0$, hypothèses qui entraîneront dès lors les valeurs $Y_0 = 0$ et $\Pi = \varpi$, ce résultat se réduira simplement à

$$5)\quad I^{(\varpi)} = \sum_{\epsilon} \pm \left[2i \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{D}} \omega + \sqrt{\varpi} \left\{ \Pi(\omega, h_2, k) - \Pi(\omega, \pm h_2 + iK', k) \right\} \right]_{(1)}^{(2)},$$

expression qui peut être ramenée, comme on va le voir, à une forme encore plus simple en faisant usage de la formule (*)

$$(126)\quad \Pi(\omega, h + iK') = \Pi(\omega, h) + \frac{\operatorname{cn} h \operatorname{dn} h}{\operatorname{sn} h}\omega + \frac{1}{4}\log\frac{\operatorname{sn}^2(\omega - h)}{\operatorname{sn}^2(\omega + h)},$$

à laquelle on parvient aisément en partant de la formule relative à l'addition des paramètres de la fonction de troisième espèce, ainsi que nous le montrons dans la Note II de l'*Appendice* qui termine cet Ouvrage.

En effet cette dernière formule donnant pour $h = \pm h_2$, en représentant, pour abréger, par Ω la fonction

$$(127)\qquad \Omega = \frac{\operatorname{sn}(\omega \mp h_2)}{\operatorname{sn}(\omega \pm h_2)},$$

et faisant attention que les deux premiers termes seront alors des fonctions impaires de h_2,

$$\Pi(\omega, \pm h_2 + iK') = \Pi(\omega, \pm h_2) + \frac{\operatorname{cn} h_2 \operatorname{dn} h_2}{\operatorname{sn}(\pm h_2)}\omega + \frac{1}{4}\log\Omega^2$$

$$= \pm\left[\Pi(\omega, h_2) + \frac{\operatorname{cn} h_2 \operatorname{dn} h_2}{\operatorname{sn} h_2}\omega\right] + \frac{1}{4}\log\Omega^2,$$

(*) Nous n'appliquerons pas immédiatement, pour cette réduction, la formule d'addition des paramètres de la fonction Π, parce que, ne sachant pas actuellement lequel des deux signes on devra prendre dans le paramètre de la seconde fonction Π, savoir $\pm h_2 + iK'$, dans le cas où ce serait le signe —, lequel donnerait alors $h_2 + h_3 = iK'$, le résultat fourni par la dite formule, savoir

$$\Pi(\omega, h_2) + \Pi(\omega, h_3) = \Pi(\omega, h_2 + h_3) - k^2 \operatorname{sn} h_2 \operatorname{sn} h_3 \operatorname{sn}(h_2 + h_3).\,\omega + \tfrac{1}{2}\log\Omega,$$

en désignant par Ω la fonction de ω, h_2, h_3, et k que l'on sait, se présenterait donc dans ce cas sous la forme indéterminée $\infty - \infty$, attendu que les deux premiers termes seraient infinis chacun dans cette hypothèse, et la réduction de cette indétermination exigerait un calcul fort long et délicat, que l'on évite en faisant usage de l'autre formule que nous employons ci-dessus.

si l'on reporte cette expression dans le résultat en question (125), l'on voit qu'en adoptant le signe + la fonction $\Pi(\omega, h_2)$ disparaîtra alors dans l'intérieur des crochets, c'est-à-dire pour chaque interprétation du symbole ϵ séparément; et comme il est facile de reconnaître, ainsi que nous le montrons dans la note ci-dessous (*),

---

(*) Pour établir l'existence de ce fait, quel que soit le signe que l'on adopte dans la valeur $h_3 = \pm h_2 + iK'$, remarquons tout d'abord que, d'après la définition (127), l'expression de la quantité Ω sera, en prenant le signe +, c'est-à-dire pour $h = h_2$, le rapport $\frac{\operatorname{sn}(\omega - h_2)}{\operatorname{sn}(\omega + h_2)}$, et en prenant le signe —, le rapport $\frac{\operatorname{sn}(\omega + h_2)}{\operatorname{sn}(\omega - h_2)}$ qui est précisément l'inverse du précédent. Pour être en mesure de faire usage du Théorème en question (pp. 60-61 du Chap. I), il suffira donc de s'être assuré que l'un de ces rapports, le premier par exemple, se change en une fonction symétrique de ϵ et de η, lorsqu'on y remet, à la place de ω, le type en ϵ et η (abstraction faite de l'indice de η) des limites de la variable ω qui correspond à la dernière intégration.

Pour faire cette démonstration; posant en vue de ce calcul

$$L = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 h_2 \operatorname{sn}^2 \omega, \qquad M = \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn} h_2 \operatorname{dn} h_2, \qquad N = \operatorname{sn} h_2 \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega,$$

la dite quantité Ω s'écrira avec ces notations,

$$(\alpha) \qquad \Omega = \frac{\frac{1}{L}\left(M - N\right)}{\frac{1}{L}\left(M + N\right)} = \frac{M - N}{M + N},$$

rapport dont on obtiendra aisément l'expression des deux termes en opérant de la façon suivante.

D'une part les formules de définition (103) de k^2 et (119) de h_2 donneront, indépendamment de toute hypothèse relative à la valeur de h_3, en ayant égard en outre successivement aux deux expressions (97) de $F_4(\theta)$ et $F_2(\theta^2)$,

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{sn}^2(h_2, k) = \frac{\theta''^2}{a}, \qquad \operatorname{cn}^2(h_2, k) = 1 - \operatorname{sn}^2(h_2, k) = 1 - \frac{\theta''^2}{a} = \frac{a - \theta''^2}{a}, \\ &\qquad\qquad \operatorname{dn}^2(h_2, k) = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(h_2, k) = 1 - \frac{\theta'^2}{\theta''^2}\frac{\theta''^2}{a} = \frac{a - \theta'^2}{a}, \\ &\operatorname{cn}^2(h_2, k)\operatorname{dn}^2(h_2, k) = \frac{a - \theta''^2}{a}\frac{a - \theta'^2}{a} = \frac{\mathfrak{A}(a - \theta'^2)(a - \theta''^2)}{\mathfrak{A}a^2} = \frac{F_4(a^{\frac{1}{2}})}{\mathfrak{A}a^2}, \end{aligned}\right.$$

et par conséquent, en ayant égard à l'égalité (115) considérée pour $a_i = a$:

que quel que soit le signe adopté pour h_2, le terme $\frac{1}{4}\sqrt{\varpi}\log\Omega^2$ disparaîtra également dans la sommation relative à ϵ en vertu du Théorème du Chapitre I, le dit résultat se réduirait donc alors simplement à la forme

$$I^{(\varpi)} = \sum_{\epsilon} \pm \Big[G\,\omega \Big]_{(1)}^{(2)} = \sum_{\epsilon} \pm G\,(\omega^{(2)} - \omega^{(1)}),$$

$$(\beta) \qquad \operatorname{cn} h_2 \operatorname{dn} h_2 = \frac{\sqrt{F_4(\alpha^{\frac{1}{2}})}}{\sqrt{\mathfrak{a}\,.\,\alpha}} = \frac{\sqrt{-4(n^2+\epsilon)\,\alpha}}{\sqrt{\mathfrak{a}\,.\,\alpha}} = \frac{2i\sqrt{n^2+\epsilon}}{\sqrt{\mathfrak{a}\alpha}}.$$

D'autre part, si l'on convient, pour abréger l'écriture, de représenter expressément par θ le type (62) (du Chap. II) des limites de cette variable, celui des limites de ω étant alors fourni, d'après les définitions (119), par la première des équations analogues que nous allons écrire

$$\left\{\begin{aligned}
&\operatorname{sn}^2(\omega, k) = \frac{\theta^2}{\theta'^2}, \qquad \operatorname{cn}^2(\omega, k) = 1 - \operatorname{sn}^2(\omega, k) = 1 - \frac{\theta^2}{\theta'^2} = \frac{\theta'^2 - \theta^2}{\theta'^2},\\
&\qquad\qquad \operatorname{dn}^2(\omega, k) = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\omega, k) = 1 - \frac{\theta'^2}{\theta''^2}\frac{\theta^2}{\theta'^2} = \frac{\theta''^2 - \theta^2}{\theta''^2},\\
&\operatorname{cn}^2(\omega, k)\operatorname{dn}^2(\omega, k) = \frac{\theta'^2 - \theta^2}{\theta'^2}\,\frac{\theta''^2 - \theta^2}{\theta''^2} = \frac{\mathfrak{a}\,(\theta^2 - \theta'^2)(\theta^2 - \theta''^2)}{\mathfrak{a}\,\theta'^2\theta''^2} = \frac{F_4(\theta)}{\mathfrak{a}\theta'^2\theta''^2},\\
&\operatorname{cn}(\omega, k)\operatorname{dn}(\omega, k) = \frac{\sqrt{F_4(\theta)}}{\mathfrak{a}\,\theta'\theta''},
\end{aligned}\right.$$

en rapprochant la dernière de ces valeurs de la précédente (β), on en conclura donc, pour les quantités M et N, les expressions

$$\left\{\begin{aligned}
M &= \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn} h_2 \operatorname{dn} h_2 = \frac{\theta}{\theta'}\,\frac{2i\sqrt{n^2+\epsilon}}{\sqrt{\mathfrak{a}\alpha}} = \frac{2i\sqrt{n^2+\epsilon}\,.\,\theta}{\theta'\sqrt{\mathfrak{a}\alpha}},\\
N &= \operatorname{sn} h_2 \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega = \frac{\theta''}{\sqrt{\alpha}}\,\frac{\sqrt{F_4(\theta)}}{\sqrt{\mathfrak{a}}\,\theta'\theta''} = \frac{\sqrt{F_4(\theta)}}{\theta'\sqrt{\mathfrak{a}\alpha}},
\end{aligned}\right.$$

et delà, pour la quantité en question $\Omega(\alpha)$, la valeur

$$(\gamma) \qquad \Omega = \frac{M+N}{M-N} = \frac{2i\sqrt{n^2+\epsilon}\,.\,\theta + \sqrt{F_4(\theta)}}{2i\sqrt{n^2+\epsilon}\,.\,\theta - \sqrt{F_4(\theta)}},$$

c'est-à-dire à une somme de huit intégrales elliptiques de *première* espèce par rapport à la variable $t = \mathrm{sn}(\omega, k)$, et ne pourrait dès lors, par le moyen d'aucune transformation, reproduire dans ce cas le résultat obtenu dans notre Chapitre I pour la même hypothèse, lequel étant de la forme [p. 62, formule (84)]

$$(128) \qquad I^{(\varpi)} = \sqrt{\varpi} \sum_{\epsilon} \pm \Big[\Pi(\varphi_0, h_0, k_0) \Big]_{(1)}^{(2)},$$

---

dans laquelle il n'y a plus qu'à remettre au lieu du polynome $F_4(\theta)$ son expression dans la question actuelle, puis cela fait, à la place du symbole θ sa signification convenue tout à l'heure (62) du Chapitre II.

Or, d'une part, l'hypothèse $0 = y_0 = Y_0$ réduisant les valeurs (72) des coefficients A, B, C à celles-ci

$$A = \lambda^2 + \varpi, \qquad B = \lambda^2 - \varpi = (\lambda^2 + \varpi) - 2\varpi, \qquad C = \lambda^2 + \varpi,$$

et par suite celles (74) des coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ aux suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{A} = A = \lambda^2 + \varpi, & \mathcal{B} = C = \lambda^2 + \varpi, \\ \mathcal{C} = B - 2(n^2 + \epsilon) = [(\lambda^2 + \varpi) - 2\varpi] - 2(n^2 + \epsilon) = (\lambda^2 + \varpi) - 2(\varpi + n^2 + \epsilon), \end{cases}$$

la première expression (97) de $F_4(\theta)$ sera donc, dans le cas actuel :

$$(\delta) \begin{cases} F_4(\theta) = \mathcal{A}\theta^4 + 2\mathcal{C}\theta^2 + \mathcal{B} \\ \quad = (\lambda^2 + \varpi)\theta^4 + 2[(\lambda^2 + \varpi) - 2(\varpi + n^2 + \epsilon)]\theta^2 + (\lambda^2 + \varpi) \\ \quad = (\lambda^2 + \varpi)(\theta^2 + 1)^2 - 4(\varpi + n^2 + \epsilon)\theta^2. \end{cases}$$

D'autre part, si l'on fait attention que l'hypothèse fondamentale

$$0 = l^2 + m^2 + n^2 = (l^2 - \eta) + m^2 + (n^2 + \eta),$$

pouvant s'écrire en la décomposant en deux membres

$$(i\sqrt{l^2 - \eta} + m)(-i\sqrt{l^2 - \eta} + m) = -(\sqrt{n^2 + \eta})^2,$$

permettra dès lors de présenter la signification convenue (62) du symbole θ aussi bien sous cette autre forme

$$(\epsilon) \qquad \theta = \frac{i\sqrt{l^2 - \eta} + m}{\sqrt{n^2 + \eta}} = \frac{-\sqrt{n^2 + \eta}}{-i\sqrt{l^2 - \eta} + m} = \frac{\sqrt{n^2 + \eta}}{i\sqrt{l^2 - \eta} - m},$$

représentait par conséquent une somme de huit intégrales de *troisième* espèce par rapport à la variable $z = \mathrm{sn}\,(\varphi_0, k_0)$: ce qui établit péremptoirement que le dit signe + doit être rejeté dans la valeur précitée de h_3.

En adoptant au contraire le signe —, la même identification deviendra possible, après toutefois un certain changement de l'argument et du paramètre, car le résultat en question se réduira alors, par le moyen de la même formule, à la forme

$$(129)\quad \mathrm{I}^{(\varpi)} = \sum_{\epsilon} \pm\sqrt{\varpi}\left[\mathrm{G}\,\omega + 2\Pi\,(\omega, h_2, k) - \frac{1}{4}\log\frac{\mathrm{sn}^2\,(\omega + h_2)}{\mathrm{sn}^2\,(\omega - h_2)}\right]_{\omega^{(1)}}^{\omega^{(2)}},$$

---

on aura donc, d'après cette dernière valeur,

$$\theta^2 + 1 = \frac{n^2 + \eta}{(i\sqrt{l^2 - \eta} - m)^2} + 1 = \frac{\mathrm{H}}{(i\sqrt{l^2 - \eta} - m)^2},$$

en faisant, pour faciliter les transformations,

$$\begin{aligned}\mathrm{H} &= (n^2 + \eta) + \left[-(l^2 - \eta) + m^2 - 2im\sqrt{l^2 - \eta}\right] \\ &= \left[(n^2 + m^2) - l^2 + 2\eta\right] - 2im\sqrt{l^2 - \eta} = -2(l^2 - \eta) - 2im\sqrt{l^2 - \eta} \\ &= 2i\sqrt{l^2 - \eta}\,(i\sqrt{l^2 - \eta} - m),\end{aligned}$$

c'est-à-dire simplement en conséquence :

$$(\eta)\qquad \theta^2 + 1 = \frac{2i\sqrt{l^2 - \eta}\,(i\sqrt{l^2 - \eta} - m)}{(i\sqrt{l^2 - \eta} - m)^2} = \frac{2i\sqrt{l^2 - \eta}}{i\sqrt{l^2 - \eta} - m}.$$

En tenant compte dès lors de ces deux valeurs (η) et (ϵ), en premier lieu, l'expression précédente (δ) de $\mathrm{F}_4(\theta)$ sera donc, eu égard à la définition de λ [formule (58) du Chap. II),

$$\begin{aligned}\mathrm{F}_4(\theta) &= [-(l^2 - \epsilon) + \varpi]\,\frac{-4(l^2 - \eta)}{(i\sqrt{l^2 - \eta} - m)^2} - 4(\varpi + n^2 + \epsilon)\,\frac{n^2 + \eta}{(i\sqrt{l^2 - \eta} - m)^2} \\ &= \frac{4}{(i\sqrt{l^2 - \eta} - m)^2}\,[-(\varpi - l^2 + \epsilon)(l^2 - \eta) - (\varpi + n^2 + \epsilon)(n^2 + \eta)],\end{aligned}$$

et l'on aura par conséquent

$$(\theta)\qquad \sqrt{\mathrm{F}_4(\theta)} = \frac{\sqrt{\Theta}}{i\sqrt{l^2 - \eta} - m},$$

en faisant à nouveau

$$(130)\qquad G = \frac{2i}{\sqrt{\varpi}}\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{D}} + \frac{\operatorname{cn} h_2 \operatorname{dn} h_2}{\operatorname{sn} h_2},$$

c'est-à-dire à la forme même, quant à la nature analytique des termes, à laquelle la transformation célèbre dite *de Landen* permettra de réduire le résultat précité (128) de notre Chapitre I, ainsi qu'il résulte du Théorème I ou, mieux encore, de la formule (21bis) établis dans la Note III de l'*Appendice* qui termine cet Ouvrage.

Il suffira dès lors, pour que l'identification des deux solutions en question (129) et (128) devienne possible (*), que leurs deux

---

en faisant de nouveau pour faciliter l'écriture du calcul :

$$\begin{aligned}\Theta = &-(\varpi - l^2 - \epsilon)(l^2 - \eta) - (\varpi + n^2 + \epsilon)(n^2 + \eta)\\ = &[-\varpi(l^2 - \eta) + (l^2 - \epsilon)(l^2 - \eta)] - [\varpi(n^2 + \eta) + (n^2 + \epsilon)(n^2 + \eta)]\\ = &-\varpi(l^2 + n^2) + (l^2 - \epsilon)(l^2 - \eta) - (n^2 + \epsilon)(n^2 + \eta).\end{aligned}$$

En remettant donc à présent cette dernière valeur, dans laquelle $l^2 + n^2 = -m^2$, dans celle précédente de $\sqrt{F_1(\theta)}$, puis reportant enfin celle ainsi obtenue, en même temps que celle (ϵ) de θ, dans l'expression ci-dessus (Υ) de la quantité en question Ω, on voit que cette dernière deviendra alors

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{2i\sqrt{n^2+\epsilon}\,\sqrt{n^2+\eta} + 2\Theta}{2i\sqrt{n^2+\epsilon}\,\sqrt{n^2+\eta} - 2\Theta}\\ &= \frac{i\sqrt{(n^2+\epsilon)(n^2+\eta)} + \sqrt{m^2\varpi + (l^2-\epsilon)(l^2-\eta) - (n^2+\epsilon)(n^2+\eta)}}{i\sqrt{(n^2+\epsilon)(n^2+\eta)} - \sqrt{m^2\varpi + (l^2-\epsilon)(l^2-\eta) - (n^2+\epsilon)(n^2+\eta)}},\end{aligned}$$

expression parfaitement symétrique en ϵ et η : d'où il suit, en vertu du Théorème susmentionné du Chapitre I, que le terme logarithmique introduit par la formule (126) disparaitra bien, ainsi que nous l'avons annoncé, par l'effet de la sommation en ϵ, dans l'expression envisagée (125) de $I^{(\varpi)}$.

(*) Il est à peine besoin de faire observer que cette identification ne pourrait être réalisée, malgré l'identité apparente de forme des deux expressions en question (129) ci-dessus et (21bis) de la Note V de l'Appendice supposée appliquée à la formule (128) envisagée, en égalant simplement le paramètre h_2 et l'argument ω de la première au paramètre h_1 et à l'argument φ de la seconde, mais qu'il faudrait de plus un changement de l'argument et du paramètre de l'une ou de l'autre formule à identifier.

modules k_0 et k vérifient bien l'une ou l'autre des deux relations équivalentes

$$k_0 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k} \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{k} = \frac{1+k'_0}{k_0}$$

qui caractérisent la transformation susmentionnée de Landen. Or, c'est là précisément le fait qu'il est bien facile de constater, en partant de la seconde des deux formes de la relation entre les modules que nous venons d'écrire.

Le Lecteur trouvera tous les calculs de cette identification (*) complètement développés dans la Note V de l'*Appendice* du présent Ouvrage, à laquelle, pour ne pas alourdir l'exposition de notre Théorie, nous le prions de vouloir bien se reporter.

Avant d'indiquer une autre forme plus symétrique qu'on peut encore donner à la même solution, nous croyons devoir, pour plus de précision, résumer dans les deux tableaux suivants l'ensemble des résultats qui constituent celle que nous venons de déterminer, en distinguant maintenant, ainsi que nous l'avons fait dans le Chapitre II précédent, les deux cas distincts confondus dans l'hypothèse initiale $X_0 = 0$, à savoir celui de $\varpi = 0$ pour lequel les valeurs (18) de Y_0 et (33) de Π se réduisent respectivement à y_0 et x_0^2, et celui de $x_0 = 0$, seul visé dans l'énoncé du présent Chapitre aussi bien que dans celui du Chapitre II, parce qu'il est le plus important des deux, et cela de nouveau afin de ne pas allonger outre mesure cet énoncé.

(*) A cela près que la constante ϖ s'y trouvera remplacée partout par la constante x_0^2, celle-ci n'intervenant pas en même temps que la première dans les formules connexes (128) et (129) qu'il s'agit de discuter en ce moment.

TABLEAU D

$$
\left\{
\begin{aligned}
&D = x_0^2 + y_0^2 - m^2 + (n^2+\epsilon) - 2i\sqrt{m^2x_0^2 - (n^2+\epsilon)(y_0^2 - m^2)},\\
&E = (l^2-\epsilon)(n^2+\epsilon), \qquad k = \frac{1}{D}\sqrt{(x_0^2 + y_0^2 - l^2 + \epsilon)^2 + 4(l^2-\epsilon)y_0^2},\\
&\mathrm{sn}(h_1, k) = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{x_0^2 + (y_0 + i\sqrt{l^2-\epsilon})^2}}, \qquad \mathrm{sn}(h_2, k) = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{y_0^2 + (x_0 + \sqrt{l^2-\epsilon})^2}},\\
&h_3 = -h_2 + iK', \qquad \mathrm{sn}(\omega, k) = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{x_0^2 + (y_0 - i\sqrt{l^2-\epsilon})^2}}\;\frac{i\sqrt{l^2-\eta}+m}{\sqrt{n^2+\eta}}, \text{ (*)}\\
&I^{(\varpi)} = \sum_{\epsilon} \pm \Big[2i\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{D}}\omega + 2\frac{y_0}{m}\sqrt{n^2+\epsilon}\,\Pi(\omega, h_1, k) + (x_0 - iy_0)\,\Pi(\omega, h_2, k)\\
&\qquad\qquad - (x_0 + iy_0)\,\Pi(\omega, h_3, k)\Big]_{(1)}^{(2)},
\end{aligned}
\right.
$$

(*) Pour ne pas surcharger ces deux tableaux D et E, nous y portons seulement le type des deux équations qui fournissent les deux limites $\omega^{(1)}$ et $\omega^{(2)}$ de l'argument ω, type dont on déduira ces deux équations elles-mêmes en y affectant à la fois les deux symboles ω et η du même indice (1 ou 2), cet indice étant inscrit en exposant quant à ω.

TABLEAU E

$$Y_0 = y_0\sqrt{1-\frac{\varpi}{l^2}}, \qquad \Pi = \varpi\left(1+\frac{y_0^2}{l^2}\right),$$

$$D = y_0^2 + \varpi - m^2 + (n^2+\epsilon) - 2i\sqrt{m^2\Pi - (n^2+\epsilon)(Y_0^2 - m^2)},$$

$$E = (l^2-\epsilon)(n^2+\epsilon), \qquad k = \frac{1}{D}\sqrt{(y_0^2+\varpi-l^2+\epsilon)^2 + 4(l^2-\epsilon)Y_0^2},$$

$$\operatorname{sn}(h_1,k) = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{\Pi + (Y_0 + i\sqrt{l^2-\epsilon})^2}}, \qquad \operatorname{sn}(h_2,k) = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{Y_0^2 + (\sqrt{\Pi}+\sqrt{l^2-\epsilon})^2}},$$

$$h_3 = -h_2 + iK', \qquad \operatorname{sn}(\omega,k) = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{\Pi + (Y_0 - i\sqrt{l^2-\epsilon})^2}}\,\frac{i\sqrt{l^2-\eta}+m}{\sqrt{n^2+\eta}},$$

$$I^{(\varpi)} = \sum_{\epsilon}\pm\Big[2i\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{D}}\,\omega + 2\frac{Y_0}{m}\sqrt{n^2+\epsilon}\,\Pi(\omega,h_1,k) + (\sqrt{\Pi} - iY_0)\,\Pi(\omega,h_2,k)$$
$$- (\sqrt{\Pi} + iY_0)\,\Pi(\omega,h_3,k)\Big]_{(1)}^{(2)}.$$

Second type, plus symétrique, de la solution définitive pour la même hypothèse $X_0 = 0$. — Bien que les deux tableaux D et E qui précèdent fournissent tous les éléments de la solution définitive qui forme l'objet du présent Chapitre, du moment qu'ils réduisent désormais la formation explicite de cette solution à de simples opérations littérales, nous croyons devoir indiquer encore une autre forme plus symétrique sous laquelle on peut également présenter la dite solution, forme dont le calcul intéressant mentionné dans l'avant-dernier alinéa du paragraphe précédent (p. 101) permettra d'apprécier l'avantage pour la commodité des calculs.

Partant donc de la relation empruntée aux tableaux D et E

$$h_3 = -h_2 + iK' \qquad \text{ou} \qquad h_2 + h_3 = iK',$$

si nous convenons de faire, pour plus de symétrie,

$$(131)\qquad h_2 = h + \frac{1}{2} i K', \qquad h_3 = -h + \frac{1}{2} i K',$$

d'où, par conséquent, la fonction $\Pi(\omega, h, k)$ étant impaire en h,

$$\begin{cases} \Pi(\omega, h_2, k) = \Pi(\omega, h + \frac{1}{2} i K', k), \\ \Pi(\omega, h_3, k) = \Pi(\omega, -h + \frac{1}{2} i K', k) = -\Pi(\omega, h - \frac{1}{2} i K', k), \end{cases}$$

comme on trouvera, en ayant égard à la première des égalités (131),

$$\frac{1}{k \operatorname{sn} 2h} = \operatorname{sn}(2h + iK') = \operatorname{sn} 2h_2 = \frac{2 \operatorname{sn} h_2 \operatorname{cn} h_2 \operatorname{dn} h_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 h_2},$$

l'on déduira de cette dernière suite d'égalités, en faisant abstraction des deux membres intermédiaires, pour $\operatorname{sn}(2h, k)$ la valeur

$$(132)\qquad \operatorname{sn} 2h = \frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 h_2}{2k \operatorname{sn} h_2 \operatorname{cn} h_2 \operatorname{dn} h_2}.$$

Or, l'avant-dernière des égalités (113) ainsi que celle (115), considérées l'une et l'autre pour $i = 2$ c'est-à-dire pour $\alpha_2 = \alpha$, donnant ensemble, en ayant égard également à la définition (103) du module k,

$$k^2 \operatorname{sn} h_2 \operatorname{cn} h_2 \operatorname{dn} h_2 = \frac{\theta'^2}{\theta''} \frac{\sqrt{F_1(\alpha_2^{\frac{1}{2}})}}{\sqrt{\mathfrak{A}}\, \alpha_2^{\frac{3}{2}}} = \frac{\theta'^2}{\theta''^2} \frac{\theta'' \sqrt{-4(n^2+\epsilon)\alpha_2}}{\sqrt{\mathfrak{A}}\, \alpha_2^{\frac{3}{2}}}$$

$$= k^2 \frac{\theta''.2i\sqrt{n^2+\epsilon}}{\sqrt{\mathfrak{A}}\, \alpha},$$

si l'on multiplie par $\frac{2}{k}$ les deux membres extrêmes de cette suite d'égalités et qu'on les rapproche, on trouvera donc, pour le dénominateur de l'expression précédente (132) de $\operatorname{sn} 2h$, la valeur

$$2k \operatorname{sn} h_2 \operatorname{cn} h_2 \operatorname{dn} h_2 = k\theta''.\frac{4i\sqrt{n^2+\epsilon}}{\sqrt{\mathfrak{A}}\,\alpha},$$

en sorte que la dite expression aura elle-même pour valeur, en tenant compte successivement de la définition (119) du paramètre h_2, puis de la première expression (120) et de la seconde (106bis), et enfin des définitions (121) de D et (58) de λ,

$$\operatorname{sn} 2h = \frac{1-\frac{\theta'^2}{\theta''^2}\frac{\theta''^4}{\alpha^2}}{k\theta''\frac{4i\sqrt{n^2+\epsilon}}{\sqrt{\mathfrak{A}}\,\alpha}} = \frac{\sqrt{\mathfrak{A}}\,\alpha\left(1-\frac{\theta'^2\theta''^2}{\alpha^2}\right)}{k\theta''.4i\sqrt{n^2+\epsilon}} = \frac{\sqrt{\mathfrak{A}}\left(\alpha-\frac{\alpha\beta}{\alpha}\right)}{k\theta''.4i\sqrt{n^2+\epsilon}}$$

$$= \frac{A(\alpha-\beta)}{k\sqrt{D}.4i\sqrt{n^2+\epsilon}} = \frac{4i\lambda\sqrt{\Pi}}{k\sqrt{D}.4i\sqrt{n^2+\epsilon}} = \frac{i\sqrt{l^2-\epsilon}}{\sqrt{n^2+\epsilon}}\,\frac{\sqrt{\Pi}}{k\sqrt{D}};$$

et quand on aura calculé cette valeur, ainsi que celles de $\operatorname{cn} 2h$ et $\operatorname{dn} 2h$ que l'on en déduira, le paramètre h lui-même sera alors déterminé, au moyen de ces dernières valeurs, par la formule connue (*) :

$$(133) \qquad \operatorname{sn} h = \sqrt{\frac{1-\operatorname{cn} 2h}{1+\operatorname{dn} 2h}}.$$

Ce second type de solution définitive, dont nous allons faire usage tout à l'heure pour former l'expression explicite des deux Composantes Normales à l'axe de symétrie sur lequel on supposera situé le point attiré, sera donc, en résumé, représenté pour la double hypothèse $X_0 = 0$, sous la condition de supposer nul soit ϖ soit x_0, par le tableau suivant, analogue aux deux précédents D et E, mais dans lequel nous substituerons le symbole h^0 au symbole h_1 des dits tableaux afin de pouvoir réserver, en vue du développement explicite de la solution, les indices 1, 2, 3, 4 pour spécifier, comme dans notre Chapitre I, les valeurs particulières relatives aux quatre déterminations distinctes de ϵ.

(*) Voir HERMITE, *Cours d'Analyse de la Sorbonne* (Cours de 1882, rédigé par M. *Andoyer*, Feuilles lithographiées, p. 285, *au bas*).

TABLEAU F

$$\left\{\begin{aligned}
&Y_0 = y_0\sqrt{1-\frac{\varpi}{l^2}}, \qquad \Pi = x_0^2 + \varpi\left(1+\frac{y_0^2}{l^2}\right), \qquad \lambda = i\sqrt{l^2-\epsilon};\\
&D = x_0^2 + y_0^2 - m^2 + \varpi + (n^2+\epsilon) - 2i\sqrt{m^2\Pi - (n^2+\epsilon)(Y_0^2 - m^2)},\\
&E = (l^2-\epsilon)(n^2+\epsilon), \qquad k = \frac{1}{D}\sqrt{(\lambda^2 + Y_0^2 + \Pi)^2 - 4\lambda^2 Y_0^2},\\
&\operatorname{sn}(h^0, k) = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{(Y_0+\lambda)^2+\Pi}}, \qquad \operatorname{sn}(2h, k) = \frac{i\sqrt{l^2-\epsilon}}{\sqrt{n^2+\epsilon}}\,\frac{\sqrt{\Pi}}{k\sqrt{D}},\\
&\operatorname{sn}(h,k) = \sqrt{\frac{1-\operatorname{cn}(2h,k)}{1+\operatorname{dn}(2h,k)}}, \qquad \operatorname{sn}(\omega,k) = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{(Y_0-\lambda)^2+\Pi}}\,\frac{i\sqrt{l^2-\eta}+m}{\sqrt{n^2+\eta}}{}^{(*)},\\
&I^{(\varpi)} = \sum_{\epsilon} \pm\Big[2i\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{D}}\,\omega + 2\frac{Y_0}{m}\sqrt{n^2+\epsilon}\;\Pi(\omega, h^0, k)\\
&\qquad + (\sqrt{\Pi}-iY_0)\,\Pi\left(\omega, h+\tfrac{1}{2}iK', k\right) + (\sqrt{\Pi}+iY_0)\,\Pi\left(\omega, h-\tfrac{1}{2}iK', k\right)\Big]_{(1)}^{(2)}.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on veut maintenant distinguer les deux hypothèses $x_0 = 0$ et $\varpi = 0$, confondues dans celle $X_0 = 0$ à laquelle se rapporte ce dernier tableau, il y aura lieu d'en déduire alors deux autres semblables correspondant respectivement aux tableaux D et E précédents (pp. 102-103), mais nous n'effectuerons cette nouvelle écriture, vu sa longueur, que pour la première des deux hypothèses précitées seulement, qui est de beaucoup la plus importante.

(*) Voir à nouveau la note de la page 102.

Expression explicite des deux composantes normales a l'axe des y, sur lequel on suppose situé le point attiré.

A. *Expression de la Composante* X_y. — Pour former effectivement, à l'aide du tableau F précédent considéré pour l'hypothèse $x_0 = 0$, l'expression explicite des six intégrales doubles $I^{(\varpi)}$ qui composeront celle (7) de la quantité $\Delta_x = \frac{l.\, in}{-fD} X$ relative à l'hypothèse en question, nous n'aurons qu'à suivre de point en point la marche qui nous a conduit au but pour le problème analogue résolu dans notre Chapitre I, en passant encore successivement par toutes les écritures intermédiaires homologues de celles issues du premier tableau de la page 65 dudit Chapitre I, auquel nous prions en conséquence le Lecteur de vouloir bien se reporter (pp. 64-66 et 68-75).

Remarquant donc dans ce but que, des coefficients des trois fonctions Π, celui de la première seul dépend de ϵ, et faisant en conséquence, pour simplifier l'écriture,

$$134) \qquad 2\frac{Y_0}{m}\sqrt{n^2+\epsilon} = A_j, \qquad \sqrt{\Pi} - iY_0 = B, \qquad \sqrt{\Pi} + iY_0 = C,$$

la dernière formule du tableau F en question devenant avec ces notations

$$= \sum_{\epsilon} \pm \left[2i\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{D}}\omega + A_j \Pi(\omega, h^0, k) + B\Pi\left(\omega, h + \frac{1}{2}iK', k\right) + C\Pi\left(\omega, h - \frac{1}{2}iK', k\right) \right]_{(1)}^{(2)},$$

fournira donc, en tenant compte de la signification des symboles ϵ et E, ainsi que des signes afférents par définition aux quatre déterminations successives de ϵ (Chap. I, p. 45), pour l'expression développée de la même quantité, celle-ci

$$
(135)\left\{
\begin{aligned}
\mathrm{I}^{(\varpi)} = &\left[2i\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{D_1}}\omega_1 + A_1\Pi(\omega_1, h_1^0, k_1) + B\Pi\left(\omega_1, h_1 + \frac{1}{2}iK_1', k_1\right) + C\Pi\left(\omega_1, h_1 - \frac{1}{2}iK_1', k_1\right)\right]_{\omega_1^{(1)}}^{\omega_1^{(2)}} \\
- &\left[2i\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{D_2}}\omega_2 + A_2\Pi(\omega_2, h_2^0, k_2) + B\Pi\left(\omega_2, h_2 + \frac{1}{2}iK_2', k_2\right) + C\Pi\left(\omega_2, h_2 - \frac{1}{2}iK_2', k_2\right)\right]_{\omega_2^{(1)}}^{\omega_2^{(2)}} \\
- &\left[2i\frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{D_3}}\omega_3 + A_3\Pi(\omega_3, h_3^0, k_3) + B\Pi\left(\omega_3, h_3 + \frac{1}{2}iK_3', k_3\right) + C\Pi\left(\omega_3, h_3 - \frac{1}{2}iK_3', k_3\right)\right]_{\omega_3^{(1)}}^{\omega_3^{(2)}} \\
+ &\left[2i\frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{D_4}}\omega_4 + A_4\Pi(\omega_4, h_4^0, k_4) + B\Pi\left(\omega_4, h_4 + \frac{1}{2}iK_4', k_4\right) + C\Pi\left(\omega_4, h_4 - \frac{1}{2}iK_4', k_4\right)\right]_{\omega_4^{(1)}}^{\omega_4^{(2)}}
\end{aligned}
\right.
$$

et il s'agit par conséquent de déduire du même tableau F ci-dessus (p. 106) l'expression explicite des différents éléments ou coefficients qui figurent dans cette dernière formule, homologue de celle (86) pour la question traitée dans le Chapitre I.

Pour cela faisant, comme alors, successivement $\epsilon = s_1, s_2, t_1, t_2$ dans le dit tableau, en remarquant que, par suite de l'hypothèse actuelle $x_0 = 0$, les valeurs de Y_0 et Π inscrites en tête donnent, conjointement avec les définitions précédentes (134),

$$
\left\{
\begin{aligned}
&Y_0^2 + \Pi = y_0^2\left(1 - \frac{\varpi}{l^2}\right) + \varpi\left(1 + \frac{y_0^2}{l^2}\right) = y_0^2 + \varpi, \\
&B = \sqrt{\Pi} - iY_0 = \sqrt{\varpi}\sqrt{1 + \frac{y_0^2}{l^2}} - iy_0\sqrt{1 - \frac{\varpi}{l^2}}, \\
&C = \sqrt{\Pi} + iY_0 = \sqrt{\varpi}\sqrt{1 + \frac{y_0^2}{l^2}} + iy_0\sqrt{1 - \frac{\varpi}{l^2}},
\end{aligned}
\right.
$$

nous formerons donc encore, en premier lieu, le tableau $\bar{A}$ suivant, homologue du tableau A du Chapitre I (p. 65) :

TABLEAU $\bar{A}$

$$\left\{\begin{aligned} &Y_0 = \frac{y_0}{l}\sqrt{l^2-\varpi}, \qquad \Pi = \frac{\varpi}{l^2}(l^2+y_0^2),\\ &B = \frac{1}{l}\left[\sqrt{\varpi}\sqrt{l^2+y_0^2} - i y_0\sqrt{l^2-\varpi}\right],\\ &C = \frac{1}{l}\left[\sqrt{\varpi}\sqrt{l^2+y_0^2} + i y_0\sqrt{l^2-\varpi}\right];\end{aligned}\right.$$

$$\text{I)}\left\{\begin{aligned} &D_1 = y_0^2 - m^2 + \varpi + (n^2+s_1) - 2i\sqrt{m^2\Pi - (n^2+s_1)(Y_0^2-m^2)},\\ &k_1 = \frac{1}{D_1}\sqrt{[y_1^2+\varpi-(l^2-s_1)]^2 + 4(l^2-s_1)(l^2-\varpi)\frac{y_0^2}{l^2}},\\ &S_1 = (l^2-s_1)(n^2+s_1), \quad \operatorname{sn}(h_1^0,k_1) = \frac{l\sqrt{D_1}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2-\varpi}+il\sqrt{l^2-s_1})^2+\varpi(l^2+y_0^2)}},\\ &A_1 = \frac{2y_0}{lm}\sqrt{l^2-\varpi}\sqrt{n^2+s_1}, \qquad \operatorname{sn}(2h_1,k_1) = \frac{i\sqrt{l^2-s_1}}{\sqrt{n^2+s_1}}\,\frac{\sqrt{\varpi}\sqrt{l^2+y_0^2}}{lk_1 D_1},\\ &\operatorname{sn}(\omega_1,k_1) = \frac{l\sqrt{D_1}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2-\varpi}-il\sqrt{l^2-s_1})^2+\varpi(l^2+y_0^2)}}\,\frac{i\sqrt{l^2-t}+m}{\sqrt{n^2+t}};\end{aligned}\right.$$

$$\text{II)}\left\{\begin{aligned} &D_2 = y_0^2 - m^2 + \varpi + (n^2+s_2) - 2i\sqrt{m^2\Pi - (n^2+s_2)(Y_0^2-m^2)},\\ &k_2 = \frac{1}{D_2}\sqrt{[y_0^2+\varpi-(l^2-s_2)]^2 + 4(l^2-s_2)(l^2-\varpi)\frac{y_0^2}{l^2}},\\ &S_2 = (l^2-s_2)(n^2+s_2), \quad \operatorname{sn}(h_2^0,k_2) = \frac{l\sqrt{D_2}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2-\varpi}+il\sqrt{l^2-s_2})^2+\varpi(l^2+y_0^2)}},\\ &A_2 = \frac{2y_0}{l}\sqrt{l^2-\varpi}\sqrt{n^2+s_2}, \qquad \operatorname{sn}(2h_2,k_2) = \frac{i\sqrt{l^2-s_2}}{\sqrt{n^2+s_2}}\,\frac{\sqrt{\varpi}\sqrt{l^2+y_0^2}}{lk_2\sqrt{D_2}},\\ &\operatorname{sn}(\omega_2,k_2) = \frac{l\sqrt{D_2}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2-\varpi}-il\sqrt{l^2-s_2})^2+\varpi(l^2+y_0^2)}}\,\frac{i\sqrt{l^2-t}+m}{\sqrt{n^2+t}};\end{aligned}\right.$$

(III)

$$\begin{cases} D_3 = y_0^2 - m^2 + \varpi + (n^2 + t_1) - 2i\sqrt{m^2\Pi - (n^2+t_1)(Y_0^2 - m^2)}, \\ k_3 = \frac{1}{D_3}\sqrt{[y_0^2 + \varpi - (l^2 - t_1)]^2 + 4(l^2 - t_1)(l^2 - \varpi)\frac{y_0^2}{l^2}}, \\ T_1 = (l^2 - t_1)(n^2 + t_1), \quad \operatorname{sn}(h_3^0, k_3) = \frac{l\sqrt{D_3}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2-\varpi} + il\sqrt{l^2-t_1})^2 + \varpi(l^2+y_0^2)}} \\ A_3 = \frac{2y_0}{lm}\sqrt{l^2-\varpi}\sqrt{n^2+t_1}, \quad \operatorname{sn}(2h_3, k_3) = \frac{i\sqrt{l^2-t_1}}{\sqrt{n^2+t_1}}\,\frac{\sqrt{\varpi}\sqrt{l^2+y_0^2}}{lk_3\sqrt{D_3}} \\ \operatorname{sn}(\omega_3, k_3) = \frac{l\sqrt{D_3}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2-\varpi} - il\sqrt{l^2-t_1})^2 + \varpi(l^2+y_0^2)}}\;\frac{i\sqrt{l^2-s}+m}{\sqrt{n^2+s}}, \end{cases}$$

(IV)

$$\begin{cases} D_4 = y_0^2 - m^2 + \varpi + (n^2 + t_2) - 2i\sqrt{m^2\Pi - (n^2+t_2)(Y_0^2 - m^2)}, \\ k_4 = \frac{1}{D_4}\sqrt{[y_0^2 + \varpi - (l^2 - t_2)]^2 + 4(l^2 - t_2)(l^2 - \varpi)\frac{y_0^2}{l^2}}, \\ T_2 = (l^2 - t_2)(n^2 + t_2), \quad \operatorname{sn}(h_4^0, k_4) = \frac{l\sqrt{D_4}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2-\varpi} + il\sqrt{l^2-t_2})^2 + \varpi(l^2+y_0^2)}} \\ A_4 = \frac{2y_0}{lm}\sqrt{l^2-\varpi}\sqrt{n^2+t_2}, \quad \operatorname{sn}(2h_4, k_4) = \frac{i\sqrt{l^2-t_2}}{\sqrt{n^2+t_2}}\,\frac{\sqrt{\varpi}\sqrt{l^2+y_0^2}}{lk_4\sqrt{D_4}} \\ \operatorname{sn}(\omega_4, k_4) = \frac{l\sqrt{D_4}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2-\varpi} - il\sqrt{l^2-t_2})^2 + \varpi(l^2+y_0^2)}}\;\frac{i\sqrt{l^2-s}+m}{\sqrt{n^2+s}}. \end{cases}$$

Puis, le type des expressions de chacun des éléments ou coefficients en question (ou des équations qui les déterminent) étant ainsi mis en évidence par le tableau que nous venons de former, il faudra de nouveau écrire trois fois de suite ce même tableau, en prenant successivement pour s et t, en premier lieu q et r, puis en second lieu r et p, et enfin en troisième lieu p et q, la constante ϖ tenant lieu à chaque fois du carré de la troisième variable restante : opération qui donnera naissance aux trois nouveaux

tableaux suivants que nous désignerons, par analogie avec les désignations adoptées pour ceux des pages 68-70 du Chapitre I auxquels ils correspondent, par les lettres $P_y^{(x)}$, $Q_y^{(x)}$, $R_y^{(x)}$, l'indice inférieur y indiquant qu'ils concernent l'hypothèse du point attiré situé sur l'axe des y, et l'indice supérieur x qu'ils se rapportent à la composante X relative à la dite hypothèse, et en tête de chacun desquels figureront donc de nouveau les valeurs des constantes ou des coefficients qui ne dépendent pas de la détermination de ϵ.

TABLEAU $P_y^{(x)}$

$$(\varpi = p^2, \qquad s = q^2, \qquad t = r^2)$$

$$\left\{\begin{aligned} & Y_0 = \frac{y_0}{l}\sqrt{l^2 - p^2}, \qquad \Pi = \frac{p^2}{l^2}(l^2 + y_0^2), \\ & B = \frac{1}{l}\left[p\sqrt{l^2 + y_0^2} - i\,y_0\sqrt{l^2 - p^2}\right], \\ & C = \frac{1}{l}\left[p\sqrt{l^2 + y_0^2} + i\,y_0\sqrt{l^2 - p^2}\right], \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} & D_1 = y_0^2 - m^2 + p^2 + (n^2 + q_1^2) - 2i\sqrt{m^2\Pi - (n^2 + q_1^2)(Y_0^2 - m^2)}, \\ & k_1 = \frac{1}{D_1}\sqrt{[y_0^2 + p^2 - (l^2 - q_1^2)]^2 + 4(l^2 - p^2)(l^2 - q_1^2)\frac{y_0^2}{l^2}}, \\ & S_1 = Q_1 = (l^2 - q_1^2)(n^2 + q_1^2), \quad \operatorname{sn}(h_1^0, k_1) = \frac{l\sqrt{D_1}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2 - p^2} + il\sqrt{l^2 - q_1^2})^2 + p^2(l^2 + y_0^2)}}, \\ & A_1 = \frac{2y_0}{lm}\sqrt{l^2 - p^2}\sqrt{n^2 + q_1^2}, \qquad \operatorname{sn}(2h_1, k_1) = \frac{i\sqrt{l^2 - q_1^2}}{\sqrt{n^2 + q_1^2}}\,\frac{p\sqrt{l^2 + y_0^2}}{lk_1\sqrt{D_1}}, \\ & \operatorname{sn}(\omega_1^{(1)}, k_1) = \frac{l\sqrt{D_1}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2 - p^2} - il\sqrt{l^2 - q_1^2})^2 + p^2(l^2 + y_0^2)}}\;\frac{i\sqrt{l^2 - r_1^2} + m}{\sqrt{n^2 + r_1^2}}, \\ & \operatorname{sn}(\omega_1^{(2)}, k_1) = \frac{l\sqrt{D_1}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2 - p^2} - il\sqrt{l^2 - q_1^2})^2 + p^2(l^2 + y_0^2)}}\;\frac{i\sqrt{l^2 - r_2^2} + m}{\sqrt{n^2 + r_2^2}}; \end{aligned}\right.$$

(II)

$$D_2 = y_0^2 - m^2 + p^2 + (n^2 + q_2^2) - 2i\sqrt{m^2\Pi - (n^2+q_2^2)(Y_0^2 - m^2)},$$

$$k_2 = \frac{1}{D_2}\sqrt{[y_0^2 + p^2 - (l^2 - q_2^2)]^2 + 4(l^2 - p^2)(l^2 - q_2^2)\frac{y_0^2}{l^2}},$$

$$S_2 = Q_2 = (l^2 - q_2^2)(n^2 + q_2^2), \qquad \mathrm{sn}(h_2^0, k_2) = \frac{l\sqrt{D_2}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2-p^2} + il\sqrt{l^2-q_2^2})^2 + p^2(l^2+}}$$

$$A_2 = \frac{2y_0}{lm}\sqrt{l^2 - p^2}\sqrt{n^2 + q_2^2}, \qquad \mathrm{sn}(2h_2, k_2) = \frac{i\sqrt{l^2 - q_2^2}}{\sqrt{n^2 + q_2^2}}\ \frac{p\sqrt{l^2-}}{lk_2\sqrt{}}$$

$$\mathrm{sn}(\omega_2^{(1)}, k_2) = \frac{l\sqrt{D_2}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2-p^2} - il\sqrt{l^2-q_2^2})^2 + p^2(l^2 + y_0^2)}}\ \frac{i\sqrt{l^2 - r_1^2} + m}{\sqrt{n^2 + r_1^2}},$$

$$\mathrm{sn}(\omega_2^{(2)}, k_2) = \frac{l\sqrt{D_2}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2-p^2} - il\sqrt{l^2-q_2^2})^2 + p^2(l^2 + y_0^2)}}\ \frac{i\sqrt{l^2 - r_2^2} + m}{\sqrt{n^2 + r_2^2}};$$

(III)

$$D_3 = y_0^2 - m^2 + p^2 + (n^2 + r_1^2) - 2i\sqrt{m^2\Pi - (n^2+r_1^2)(Y_0^2 - m^2)},$$

$$k_3 = \frac{1}{D_3}\sqrt{[y_0^2 + p^2 - (l^2 - r_1^2)]^2 + 4(l^2 - p^2)(l^2 - r_1^2)\frac{y_0^2}{l^2}},$$

$$T_1 = R_1 = (l^2 - r_1^2)(n^2 + r_1^2), \qquad \mathrm{sn}(h_3^0, k_3) = \frac{l\sqrt{D_3}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2-p^2} + il\sqrt{l^2-r_1^2})^2 + p^2(l^2-}}$$

$$A_3 = \frac{2y_0}{lm}\sqrt{l^2 - p^2}\sqrt{n^2 + r_1^2}, \qquad \mathrm{sn}(2h_3, k_3) = \frac{i\sqrt{l^2 - r_1^2}}{\sqrt{n^2 + r_1^2}}\ \frac{p\sqrt{l^2-}}{lk_3\sqrt{}}$$

$$\mathrm{sn}(\omega_3^{(1)}, k_3) = \frac{l\sqrt{D_3}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2-p^2} - il\sqrt{l^2-r_1^2})^2 + p^2(l^2 + y_0^2)}}\ \frac{i\sqrt{l^2 - q_1^2} + m}{\sqrt{n^2 + q_1^2}},$$

$$\mathrm{sn}(\omega_3^{(2)}, k_3) = \frac{l\sqrt{D_3}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2-p^2} - il\sqrt{l^2-r_1^2})^2 + p^2(l^2 + y_0^2)}}\ \frac{i\sqrt{l^2 - q_2^2} + m}{\sqrt{n^2 + q_2^2}}.$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&D_4 = y_0^2 - m^2 + p^2 + (n^2 + r_2^2) - 2i\sqrt{m^2\Pi - (n^2 + r_2^2)(Y_0^2 - m^2)},\\
&k_4 = \frac{1}{D_4}\sqrt{[y_0^2 + p^2 - (l^2 - r_2^2)]^2 + 4(l^2 - p^2)(l^2 - r_2^2)\frac{y_0^2}{l^2}},\\
&T_2 = R_2 = (l^2 - r_2^2)(n^2 + r_2^2), \qquad \operatorname{sn}(h_4^0, k_4) = \frac{l\sqrt{D_4}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2 - p^2} + il\sqrt{l^2 - r_2^2})^2 + p^2(l^2 + y_0^2)}},\\
&A_4 = \frac{2y_0}{lm}\sqrt{l^2 - p^2}\sqrt{n^2 + r_2^2}, \qquad \operatorname{sn}(2h_4, k_4) = \frac{i\sqrt{l^2 - r_2^2}}{\sqrt{n^2 + r_2^2}}\,\frac{p\sqrt{l^2 + y_0^2}}{lk_4\sqrt{D_4}},\\
&\operatorname{sn}(\omega_4^{(1)}, k_4) = \frac{l\sqrt{D_4}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2 - p^2} - il\sqrt{l^2 - r_2^2})^2 + p^2(l^2 + y_0^2)}}\;\frac{i\sqrt{l^2 - q_1^2} + m}{\sqrt{n^2 + q_1^2}},\\
&\operatorname{sn}(\omega_4^{(2)}, k_4) = \frac{l\sqrt{D_4}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2 - p^2} - il\sqrt{l^2 - r_2^2})^2 + p^2(l^2 + y_0^2)}}\;\frac{i\sqrt{l^2 - q_2^2} + m}{\sqrt{n^2 + q_2^2}},
\end{aligned}
\right.
$$

TABLEAU $Q_y^{(x)}$

$$(\varpi = q^2, \qquad s = r^2, \qquad t = p^2).$$

$$\left\{\begin{aligned} &Y_0 = \frac{y_0}{l}\sqrt{l^2 - q^2}, \qquad \Pi = \frac{q^2}{l^2}(l^2 + y_0^2),\\ &B = \frac{1}{l}\left[q\sqrt{l^2 + y_0^2} - iy_0\sqrt{l^2 - q^2}\right],\\ &C = \frac{1}{l}\left[q\sqrt{l^2 + y_0^2} + iy_0\sqrt{l^2 - q^2}\right];\end{aligned}\right.$$

$$(I)\left\{\begin{aligned} &D_1 = y_0^2 - m^2 + q^2 + (n^2 + r_1^2) - 2i\sqrt{m^2\Pi - (n^2 + r_1^2)(Y_0^2 - m^2)},\\ &k_1 = \frac{1}{D_1}\sqrt{[y_0^2 + q^2 - (l^2 - r_1^2)]^2 + 4(l^2 - q^2)(l^2 - r_1^2)\frac{y_0^2}{l^2}},\\ &S_1 = R_1 = (l^2 - r_1^2)(n^2 + r_1^2), \qquad \mathrm{sn}(h_1^0, k_1) = \frac{l\sqrt{D_1}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2 - q^2} + il\sqrt{l^2 - r_1^2})^2 + q^2(l^2-}}\\ &A_1 = \frac{2y_0}{lm}\sqrt{l^2 - q^2}\sqrt{n^2 + r_1^2}, \qquad \mathrm{sn}(2h_1, k_1) = \frac{i\sqrt{l^2 - r_1^2}}{\sqrt{n^2 + r_1^2}}\,\frac{q\sqrt{l^2 + y_0^2}}{lk_1\sqrt{D_1}},\\ &\mathrm{sn}(\omega_1^{(1)}, k_1) = \frac{l\sqrt{D_1}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2 - q^2} - il\sqrt{l^2 - r_1^2})^2 + q^2(l^2 + y_0^2)}}\,\frac{i\sqrt{l^2 - p_1^2} + m}{\sqrt{n^2 + p_1^2}},\\ &\mathrm{sn}(\omega_1^{(2)}, k_1) = \frac{l\sqrt{D_1}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2 - q^2} - il\sqrt{l^2 - r_1^2})^2 + q^2(l^2 + y_0^2)}}\,\frac{i\sqrt{l^2 - p_2^2} + m}{\sqrt{n^2 + p_2^2}};\end{aligned}\right.$$

$$
\text{II)}\quad\left\{\begin{aligned}
&D_2=y_0^2-m^2+q^2+(n^2+r_2^2)-2i\sqrt{m^2\Pi-(n^2+r_2^2)(Y_0^2-m^2)},\\
&k_2=\frac{1}{D_2}\sqrt{[y_0^2+q^2-(l^2-r_2^2)]^2+4(l^2-q^2)(l^2-r_2^2)\frac{y_0^2}{l^2}},\\
&S_2=R_2=(l^2-r_2^2)(n^2+r_2^2),\qquad \operatorname{sn}(h_2^0,k_2)=\frac{l\sqrt{D_2}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2-q^2}+il\sqrt{l^2-r_2^2})^2+q^2(l^2+y_0^2)}},\\
&A_2=\frac{2y_0}{lm}\sqrt{l^2-q^2}\,\sqrt{n^2+r_2^2},\qquad \operatorname{sn}(2h_2,k_2)=\frac{i\sqrt{l^2-r_2^2}}{\sqrt{n^2+r_2^2}}\,\frac{q\sqrt{l^2+y_0^2}}{lk_2\sqrt{D_2}},\\
&\operatorname{sn}(\omega_2^{(1)},k_2)=\frac{l\sqrt{D_2}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2-q^2}-il\sqrt{l^2-r_2^2})^2+q^2(l^2+y_0^2)}}\,\frac{i\sqrt{l^2-p_1^2}+m}{\sqrt{n^2+p_1^2}},\\
&\operatorname{sn}(\omega_2^{(2)},k_2)=\frac{l\sqrt{D_2}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2-q^2}-il\sqrt{l^2-r_2^2})^2+q^2(l^2+y_0^2)}}\,\frac{i\sqrt{l^2-p_2^2}+m}{\sqrt{n^2+p_2^2}};
\end{aligned}\right.
$$

$$
\text{I)}\quad\left\{\begin{aligned}
&D_3=y_0^2-m^2+q^2+(n^2+p_1^2)-2i\sqrt{m^2\Pi-(n^2+p_1^2)(Y_0^2-m^2)},\\
&k_3=\frac{1}{D_3}\sqrt{[y_0^2+q^2-(l^2-p_1^2)]^2+4(l^2-q^2)(l^2-p_1^2)\frac{y_0^2}{l^2}},\\
&T_1=P_1=(l^2-p_1^2)(n^2+p_1^2),\qquad \operatorname{sn}(h_3^0,k_3)=\frac{l\sqrt{D_3}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2-q^2}+il\sqrt{l^2-p_1^2})^2+q^2(l^2+y_0^2)}},\\
&A_3=\frac{2y_0}{lm}\sqrt{l^2-q^2}\,\sqrt{n^2+p_1^2},\qquad \operatorname{sn}(2h_3,k_3)=\frac{i\sqrt{l^2-p_1^2}}{\sqrt{n^2+p_1^2}}\,\frac{q\sqrt{l^2+y_0^2}}{lk_3\sqrt{D_3}},\\
&\operatorname{sn}(\omega_3^{(1)},k_3)=\frac{l\sqrt{D_3}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2-q^2}-il\sqrt{l^2-p_1^2})^2+q^2(l^2+y_0^2)}}\,\frac{i\sqrt{l^2-r_1^2}+m}{\sqrt{n^2+r_1^2}},\\
&\operatorname{sn}(\omega_3^{(2)},k_3)=\frac{l\sqrt{D_3}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2-q^2}-il\sqrt{l^2-p_1^2})^2+q^2(l^2+y_0^2)}}\,\frac{i\sqrt{l^2-r_2^2}+m}{\sqrt{n^2+r_2^2}};
\end{aligned}\right.
$$

$$(\mathrm{IV})\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{D}_4 = y_0^2 - m^2 + q^2 + (n^2 + p_2^2) - 2i\sqrt{m^2\Pi - (n^2 + p_2^2)(\mathrm{Y}_0^2 - m^2)},\\
&k_4 = \frac{1}{\mathrm{D}_4}\sqrt{[y_0^2 + q^2 - (l^2 - p_2^2)]^2 + 4(l^2 - q^2)(l^2 - p_2^2)\frac{y_0^2}{l^2}},\\
&\mathrm{T}_2 = \mathrm{P}_2 = (\sqrt{l^2 - p_2^2}\sqrt{n^2 + p_2^2}, \qquad \mathrm{sn}(h_4^0, k_4) = \frac{l\sqrt{\mathrm{D}_4}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2 - q^2} + il\sqrt{l^2 - p_2^2})^2 + q^2(l^2-}}\\
&\mathrm{A}_4 = \frac{2y_0}{lm}\sqrt{l^2 - q^2}\sqrt{n^2 + p_2^2}, \qquad \mathrm{sn}(2h_4, k_4) = \frac{i\sqrt{l^2 - p_2^2}}{\sqrt{n^2 + p_2^2}}\,\frac{q\sqrt{l^2 + y_0^2}}{lk_4\sqrt{\mathrm{D}_4}},\\
&\mathrm{sn}(\omega_4^{(1)}, k_4) = \frac{l\sqrt{\mathrm{D}_4}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2 - q^2} - il\sqrt{l^2 - p_2^2})^2 + q^2(l^2 + y_0^2)}}\,\frac{i\sqrt{l^2 - r_1^2} + m}{\sqrt{n^2 + r_1^2}},\\
&\mathrm{sn}(\omega_4^{(2)}, k_4) = \frac{l\sqrt{\mathrm{D}_4}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2 - q^2} - il\sqrt{l^2 - p_2^2})^2 + q^2(l^2 + y_0^2)}}\,\frac{i\sqrt{l^2 - r_2^2} + m}{\sqrt{n^2 + r_2^2}}.
\end{aligned}\right.$$

TABLEAU $R_y^{(x)}$

$$(\varpi = r^2, \qquad s = p^2, \qquad t = q^2)$$

$$\left\{\begin{aligned}
Y_0 &= \frac{y_0^2}{l}\sqrt{l^2 - r^2}, \qquad \Pi = \frac{r^2}{l^2}(l^2 + y_0^2),\\
B &= \frac{1}{l}\left[r\sqrt{l^2 + y_0^2} - i\,y_0\sqrt{l^2 - r^2}\right],\\
C &= \frac{1}{l}\left[r\sqrt{l^2 + y_0^2} + i\,y_0\sqrt{l^2 - r^2}\right].
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
D_1 &= y_0^2 - m^2 + r^2 + (n^2 + p_1^2) - 2i\sqrt{m^2\Pi - (n^2 + p_1^2)(Y_0^2 - m^2)},\\
k_1 &= \frac{1}{D_1}\sqrt{[y_0^2 + r^2 - (l^2 - p_1^2)]^2 + 4(l^2 - r^2)(l^2 - p_1^2)\frac{y_0^2}{l^2}},\\
S_1 &= P_1 = (l^2 - p_1^2)(n^2 + p_1^2), \qquad \mathrm{sn}(h_1^0, k_1) = \frac{l\sqrt{D_1}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2 - r^2} + i\,l\sqrt{l^2 - p_1^2})^2 + r^2(l^2 + y_0^2)}},\\
A_1 &= \frac{2y_0}{lm}\sqrt{l^2 - r^2}\sqrt{n^2 + p_1^2}, \qquad \mathrm{sn}(2h_1, k_1) = \frac{i\sqrt{l^2 - p_1^2}}{\sqrt{n^2 + p_1^2}}\,\frac{r\sqrt{l^2 + y_0^2}}{lk_1\sqrt{D_1}},\\
\mathrm{sn}(\omega_1^{(1)}, k_1) &= \frac{l\sqrt{D_1}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2 - r^2} - i\,l\sqrt{l^2 - p_1^2})^2 + r^2(l^2 + y_0^2)}}\;\frac{i\sqrt{l^2 - q_1^2} + m}{\sqrt{n^2 + q_1^2}},\\
\mathrm{sn}(\omega_1^{(2)}, k_1) &= \frac{l\sqrt{D_1}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2 - r^2} - i\,l\sqrt{l^2 - p_1^2})^2 + r^2(l^2 + y_0^2)}}\;\frac{i\sqrt{l^2 - q_2^2} + m}{\sqrt{n^2 + q_2^2}}.
\end{aligned}\right.$$

(II)

$$D_2 = y_0^2 - m^2 + r^2 + (n^2 + p_2^2) - 2i\sqrt{m^2\Pi - (n^2+p_2^2)(Y_0^2 - m^2)},$$

$$k_2 = \frac{1}{D_2}\sqrt{[y_0^2 + r^2 - (l^2 - p_2^2)]^2 + 4(l^2 - r^2)(l^2 - p_2^2)\frac{y_0^2}{l^2}},$$

$$S_2 = P_2 = (l^2 - p_2^2)(n^2 + p_2^2), \qquad \mathrm{sn}(h_2^0, k_2) = \frac{l\sqrt{D_2}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2 - r^2} + il\sqrt{l^2 - p_2^2})^2 + r^2(l^2 -}}$$

$$A_2 = \frac{2y_0}{lm}\sqrt{l^2 - r^2}\sqrt{n^2 + p_2^2}, \qquad \mathrm{sn}(2h_2, k_2) = \frac{i\sqrt{l^2 - p_2^2}}{\sqrt{n^2 + p_2^2}}\ \frac{r\sqrt{l^2 -}}{lk_2\sqrt{}}$$

$$\mathrm{sn}(\omega_2^{(1)}, k_2) = \frac{l\sqrt{D_2}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2 - r^2} - il\sqrt{l^2 - p_2^2})^2 + r^2(l^2 + y_0^2)}}\ \frac{i\sqrt{l^2 - q_1^2} + m}{\sqrt{n^2 + q_1^2}},$$

$$\mathrm{sn}(\omega_2^{(2)}, k_2) = \frac{l\sqrt{D_2}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2 - r^2} - il\sqrt{l^2 - p_2^2})^2 + r^2(l^2 + y_0^2)}}\ \frac{i\sqrt{l^2 - q_2^2} + m}{\sqrt{n^2 + q_2^2}},$$

(III)

$$D_3 = y_0^2 - m^2 + r^2 + (n^2 + q_1^2) - 2i\sqrt{m^2\Pi - (n^2+q_1^2)(Y_0^2 - m^2)},$$

$$k_3 = \frac{1}{D_3}\sqrt{[y_0^2 + r^2 - (l^2 - q_1^2)]^2 + 4(l^2 - r^2)(l^2 - q_1^2)\frac{y_0^2}{l^2}},$$

$$T_1 = Q_1 = (l^2 - q_1^2)(n^2 + q_1^2), \qquad \mathrm{sn}(h_3^0, k_3) = \frac{l\sqrt{D_3}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2 - r^2} + il\sqrt{l^2 - q_1^2})^2 + r^2(l^2 -}}$$

$$A_3 = \frac{2y_0}{lm}\sqrt{l^2 - r^2}\sqrt{n^2 + q_1^2}, \qquad \mathrm{sn}(2h_3, k_3) = \frac{i\sqrt{l^2 - q_1^2}}{\sqrt{n^2 + q_1^2}}\ \frac{r\sqrt{l^2 -}}{lk_3\sqrt{}}$$

$$\mathrm{sn}(\omega_3^{(1)}, k_3) = \frac{l\sqrt{D_3}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2 - r^2} - il\sqrt{l^2 - q_1^2})^2 + r^2(l^2 + y_0^2)}}\ \frac{i\sqrt{l^2 - p_1^2} + m}{\sqrt{n^2 + p_1^2}},$$

$$\mathrm{sn}(\omega_3^{(2)}, k_3) = \frac{l\sqrt{D_3}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2 - r^2} - il\sqrt{l^2 - q_1^2})^2 + r^2(l^2 + y_0^2)}}\ \frac{i\sqrt{l^2 - p_2^2} + m}{\sqrt{n^2 + p_2^2}};$$

$$
)\quad \left\{
\begin{aligned}
&D_4 = y_0^2 - m^2 + r^2 + (n^2 + q_2^2) - 2i\sqrt{m^2\Pi - (n^2+q_2^2)(Y_0^2 - m^2)},\\
&k_4 = \frac{1}{D_4}\sqrt{[y_0^2 + r^2 - (l^2 - q_2^2)]^2 + 4(l^2 - r^2)(l^2 - q_2^2)\frac{y_0^2}{l^2}},\\
&T_2 = Q_2 = (l^2 - q_2^2)(n^2 + q_2^2), \qquad \operatorname{sn}(h_4^0, k_4) = \frac{l\sqrt{D_4}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2 - r^2} + il\sqrt{l^2 - q_2^2})^2 + r^2(l^2 + y_0^2)}},\\
&A_4 = \frac{2y_0}{lm}\sqrt{l^2 - r^2}\sqrt{n^2 + q_2^2}, \qquad \operatorname{sn}(2h_4, k_4) = \frac{i\sqrt{l^2 - q_2^2}}{\sqrt{n^2 + q_2^2}}\,\frac{r\sqrt{l^2 + y_0^2}}{lk_4\sqrt{D_4}},\\
&\operatorname{sn}(\omega_4^{(1)}, k_4) = \frac{l\sqrt{D_4}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2 - r^2} - il\sqrt{l^2 - q_2^2})^2 + r^2(l^2 + y_0^2)}}\,\frac{i\sqrt{l^2 - p_1^2} + m}{\sqrt{n^2 + p_1^2}},\\
&\operatorname{sn}(\omega_4^{(2)}, k_4) = \frac{l\sqrt{D_4}}{\sqrt{(y_0\sqrt{l^2 - r^2} - il\sqrt{l^2 - q_2^2})^2 + r^2(l^2 + y_0^2)}}\,\frac{i\sqrt{l^2 - p_2^2} + m}{\sqrt{n^2 + p_2^2}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Cela fait, il ne restera plus qu'à substituer dans ces trois derniers tableaux, aux variables intermédiaires p, q, r, les coordonnées u, v, w elles-mêmes, en ayant égard, tant aux six relations inscrites en tête des tableaux $\overline{\mathrm{P}}$, $\overline{\mathrm{Q}}$, $\overline{\mathrm{R}}$ du Chapitre I (pp. 72-74), qu'aux trois définitions de ces variables dont elles résultent, savoir

$$
6)\quad \left\{
\begin{aligned}
&p^2 = l^2\operatorname{sn}^2 u, &\quad& q^2 = l^2\operatorname{sn}^2 v, &\quad& r^2 = -n^2\operatorname{cn}^2 w,\\
&l^2 - p^2 = l^2\operatorname{cn}^2 u, && l^2 - q^2 = -m^2\operatorname{sn}^2 v, && l^2 - r^2 = -m^2\operatorname{dn}^2 w,\\
&n^2 + p^2 = n^2\operatorname{dn}^2 u, && n^2 + q^2 = -m^2\operatorname{dn}^2 v, && n^2 + r^2 = n^2\operatorname{sn}^2 w,
\end{aligned}
\right.
$$

opération qui, en supposant remises préalablement dans chaque expression, à la place des symboles Y_0 et Π, leurs valeurs inscrites en tête de chaque tableau, donnera définitivement naissance aux trois nouveaux tableaux suivants homologues de ceux $\overline{\mathrm{P}}$, $\overline{\mathrm{Q}}$, $\overline{\mathrm{R}}$ précités de notre Chapitre I.

TABLEAU $\overline{\mathrm{P}}_y^{(x)}$

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{B} &= \sqrt{l^2+y_0^2}\,\mathrm{sn}\,u - i\,y_0\,\mathrm{cn}\,u, \\ \mathrm{C} &= \sqrt{l^2+y_0^2}\,\mathrm{sn}\,u + i\,y_0\,\mathrm{cn}\,u, \end{aligned}\right.$$

(I)

$$\mathrm{D}_1 = y_0^2 - m^2 + l^2\mathrm{sn}^2 u - m^2\mathrm{cn}^2 v_1 - 2im\sqrt{(l^2\mathrm{sn}^2 u - m^2\mathrm{cn}^2 v_1)^2 + y_0^2(\mathrm{sn}^2 u + \mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{c}}$$

$$k_1 = \frac{1}{\mathrm{D}_1}\sqrt{(y_0^2 + l^2\,\mathrm{sn}^2 u + m^2\,\mathrm{sn}^2 v_1)^2 - 4\,m^2\,y_0^2\,\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v_1},$$

$$\sqrt{\mathrm{S}_1} = m^2\,\mathrm{sn}\,v_1\,\mathrm{cn}\,v_1, \qquad \mathrm{sn}\,(h_1^0, k_1) = \frac{\sqrt{\mathrm{D}_1}}{\sqrt{(y_0\,\mathrm{cn}\,u - m\,\mathrm{sn}\,v_1)^2 + (l^2 + y_0^2)\,\mathrm{s}}}$$

$$\mathrm{A}_1 = 2\,i\,y_0\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v_1, \qquad \mathrm{sn}\,(2h_1, k_1) = \frac{i\,\mathrm{sn}\,v_1}{\mathrm{cn}\,v_1}\,\frac{\sqrt{l^2+y_0^2}\,\mathrm{sn}\,u}{k_1\sqrt{\mathrm{D}_1}},$$

$$\mathrm{sn}\,(\omega_1^{(1)}, k_1) = \frac{\sqrt{\mathrm{D}_1}}{\sqrt{(y_0\,\mathrm{cn}\,u + m\,\mathrm{sn}\,v_1)^2 + (l^2+y_0^2)\,\mathrm{sn}^2 u}}\;\frac{m\,(1 - \mathrm{dn}\,w_1)}{n\,\mathrm{sn}\,w_1},$$

$$\mathrm{sn}\,(\omega_1^{(2)}, k_1) = \frac{\sqrt{\mathrm{D}_1}}{\sqrt{(y_0\,\mathrm{cn}\,u + m\,\mathrm{sn}\,v_1)^2 + (l^2+y_0^2)\,\mathrm{sn}^2 u}}\;\frac{m\,(1 - \mathrm{dn}\,w_2)}{n\,\mathrm{sn}\,w_2};$$

(II)

$$\mathrm{D}_2 = y_0^2 - m^2 + l^2\mathrm{sn}^2 u - m^2\mathrm{cn}^2 v_2 - 2im\sqrt{(l^2\mathrm{sn}^2 u - m^2\mathrm{cn}^2 v_2)^2 + y_0^2(\mathrm{sn}^2 u + \mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{c}}$$

$$k_2 = \frac{1}{\mathrm{D}_2}\sqrt{(y_0^2 + l^2\,\mathrm{sn}^2 u + m^2\,\mathrm{sn}^2 v_2)^2 - 4\,m^2\,y_0^2\,\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v_2},$$

$$\sqrt{\mathrm{S}_2} = m^2\,\mathrm{sn}\,v_2\,\mathrm{cn}\,v_2, \qquad \mathrm{sn}\,(h_2^0, k_2) = \frac{\sqrt{\mathrm{D}_2}}{\sqrt{(y_0\,\mathrm{cn}\,u - m\,\mathrm{sn}\,v_2)^2 + (l^2 + y_0^2)\,\mathrm{s}}}$$

$$\mathrm{A}_2 = 2\,i\,y_0\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v_2, \qquad \mathrm{sn}\,(2h_2, k_2) = \frac{i\,\mathrm{sn}\,v_2}{\mathrm{cn}\,v_2}\,\frac{\sqrt{l^2+y_0^2}\,\mathrm{sn}\,u}{k_2\sqrt{\mathrm{D}_2}},$$

$$\mathrm{sn}\,(\omega_2^{(1)}, k_2) = \frac{\sqrt{\mathrm{D}_2}}{\sqrt{(y_0\,\mathrm{cn}\,u + m\,\mathrm{sn}\,v_2)^2 + (l^2+y_0^2)\,\mathrm{sn}^2 u}}\;\frac{m\,(1 - \mathrm{dn}\,w_1)}{n\,\mathrm{sn}\,w_1},$$

$$\mathrm{sn}\,(\omega_2^{(2)}, k_2) = \frac{\sqrt{\mathrm{D}_2}}{\sqrt{(y_0\,\mathrm{cn}\,u + m\,\mathrm{sn}\,v_2)^2 + (l^2+y_0^2)\,\mathrm{sn}^2 u}}\;\frac{m\,(1 - \mathrm{dn}\,w_2)}{n\,\mathrm{sn}\,w_2};$$

I)
$$\left\{\begin{aligned}
&D_3=y_0^2-m^2+l^2\operatorname{sn}^2u+n^2\operatorname{sn}^2w_1-2i\sqrt{m^2(l^2\operatorname{sn}^2u+n^2\operatorname{sn}^2w_1)^2+y_0^2(m^2\operatorname{sn}^2u-n^2\operatorname{cn}^2u\operatorname{sn}^2w_1)},\\
&k_3=\frac{1}{D_3}\sqrt{(y_0^2+l^2\operatorname{sn}^2u+m^2\operatorname{dn}w_1)^2-4m^2y_0^2\operatorname{cn}^2u\operatorname{dn}^2w_1},\\
&\sqrt{T_1}=imn\operatorname{sn}w_1\operatorname{dn}w_1,\qquad \operatorname{sn}(h_3^0,k_3)=\frac{\sqrt{D_3}}{\sqrt{(y_0\operatorname{cn}u-m\operatorname{dn}w_1)^2+(l^2+y_0^2)\operatorname{sn}^2u}},\\
&A_3=\frac{2ny_0}{m}\operatorname{cn}u\operatorname{sn}w_1,\qquad \operatorname{sn}(2h_3,k_3)=\frac{-m\operatorname{dn}w_1}{n\operatorname{sn}w_1}\,\frac{\sqrt{l^2+y_0^2}\operatorname{sn}u}{k_3\sqrt{D_3}},\\
&\operatorname{sn}(\omega_3^{(1)},k_3)=\frac{\sqrt{D_3}}{\sqrt{(y_0\operatorname{cn}u+m\operatorname{dn}w_1)^2+(l^2+y_0^2)\operatorname{sn}^2u}}\,\frac{1-\operatorname{sn}v_1}{i\operatorname{cn}v_1},\\
&\operatorname{sn}(\omega_3^{(2)},k_3)=\frac{\sqrt{D_3}}{\sqrt{(y_0\operatorname{cn}u+m\operatorname{dn}w_1)^2+(l^2+y_0^2)\operatorname{sn}^2u}}\,\frac{1-\operatorname{sn}v_2}{i\operatorname{cn}v_2};
\end{aligned}\right.$$

')
$$\left\{\begin{aligned}
&D_4=y_0^2-m^2+l^2\operatorname{sn}^2u+n^2\operatorname{sn}^2w_2-2i\sqrt{(l^2\operatorname{sn}^2u+n^2\operatorname{sn}^2w_2)^2+y_0^2(m^2\operatorname{sn}^2u-n^2\operatorname{cn}^2u\operatorname{sn}^2w_2)},\\
&k_4=\frac{1}{D_4}\sqrt{(y_0^2+l^2\operatorname{sn}^2u+m^2\operatorname{dn}^2w_2)^2-4m^2y_0^2\operatorname{cn}^2u\operatorname{dn}^2w_2},\\
&\sqrt{T_2}=imn\operatorname{sn}w_2\operatorname{dn}w_2,\qquad \operatorname{sn}(h_4^0,k_4)=\frac{\sqrt{D_4}}{\sqrt{(y_0\operatorname{cn}u-m\operatorname{dn}w_2)^2+(l^2+y_0^2)\operatorname{sn}^2u}},\\
&A_4=\frac{2ny_0}{m}\operatorname{cn}u\operatorname{sn}w_2,\qquad \operatorname{sn}(2h_4,k_4)=\frac{-m\operatorname{dn}w_2}{n\operatorname{sn}w_2}\,\frac{\sqrt{l^2+y_0^2}\operatorname{sn}u}{k_4\sqrt{D_4}},\\
&\operatorname{sn}(\omega_4^{(1)},k_4)=\frac{\sqrt{D_4}}{\sqrt{(y_0\operatorname{cn}u+m\operatorname{dn}w_2)^2+(l^2+y_0^2)\operatorname{sn}^2u}}\,\frac{1-\operatorname{sn}v_1}{i\operatorname{cn}v_1},\\
&\operatorname{sn}(\omega_4^{(2)},k_4)=\frac{\sqrt{D_4}}{\sqrt{(y_0\operatorname{cn}u+m\operatorname{dn}w_2)^2+(l^2+y_0^2)\operatorname{sn}^2u}}\,\frac{1-\operatorname{sn}v_2}{i\operatorname{cn}v_2};
\end{aligned}\right.$$

TABLEAU $\overline{Q}_{y}^{(x)}$

$$\left\{\begin{aligned} B &= \sqrt{l^2 + y_0^2}\,\mathrm{dn}\,v + \frac{m}{l}\,y_0\,\mathrm{sn}\,v, \\ C &= \sqrt{l^2 + y_0^2}\,\mathrm{dn}\,v - \frac{m}{l}\,y_0\,\mathrm{sn}\,v, \end{aligned}\right.$$

(I)

$$D_1 = y_0^2 - m^2 + l^2\mathrm{dn}^2 v + n^2\mathrm{sn}^2 w_1 - 2im\sqrt{(l^2\mathrm{dn}^2 v + n^2\mathrm{sn}^2 w_1) + y_0^2(\mathrm{dn}^2 v + \frac{n^2}{l^2}\mathrm{sn}^2}$$

$$k_1 = \frac{1}{D_1}\sqrt{(y_0^2 + l^2\,\mathrm{dn}^2\,v + m^2\,\mathrm{dn}^2\,w_1)^2 + 4\,\frac{m^4}{l^2}\,y_0^2\,\mathrm{sn}^2\,v\,\mathrm{dn}^2\,w_1},$$

$$\sqrt{S_1} = imn\,\mathrm{sn}\,w_1\mathrm{dn}\,w_1, \qquad \mathrm{sn}(h_1^0, k_1) = \frac{l\sqrt{D_1}}{\sqrt{-m^2(y_0\mathrm{sn}\,v + il\mathrm{dn}\,w_1)^2 + l^2(l^2 + y}}$$

$$A_1 = 2\frac{in}{l}\,y_0\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,w_1, \qquad \mathrm{sn}\,(2h_1, k_1) = \frac{-m}{n}\,\frac{\mathrm{dn}\,w_1}{\mathrm{sn}\,w_1}\,\frac{\sqrt{l^2 + y_0^2}\,\mathrm{dn}\,v}{k_1\sqrt{D_1}},$$

$$\mathrm{sn}\,(\omega_1^{(1)}, k_1) = \frac{l\sqrt{D_1}}{\sqrt{-m^2(y_0\mathrm{sn}\,v - il\,\mathrm{dn}\,w_1)^2 + l^2(l^2 + y_0^2)\mathrm{dn}^2 v}}\;\frac{m + il\,\mathrm{cn}\,u_1}{n\,\mathrm{dn}\,u_1},$$

$$\mathrm{sn}\,(\omega_1^{(2)}, k_1) = \frac{l\sqrt{D_1}}{\sqrt{-m^2(y_0\mathrm{sn}\,v - il\,\mathrm{dn}\,w_1)^2 + l^2(l^2 + y_0^2)\mathrm{dn}^2 v}}\;\frac{m + il\,\mathrm{cn}\,u_2}{n\,\mathrm{dn}\,u_2};$$

(II).

$$D_2 = y_0^2 - m^2 + l^2\mathrm{dn}^2 v + n^2\mathrm{sn}^2 w_2 - 2im\sqrt{(l^2\mathrm{dn}^2 v + n^2\mathrm{sn}^2 w_2) + y_0^2(\mathrm{dn}^2 v + \frac{n^2}{l^2}\mathrm{sn}^2 v}$$

$$k_2 = \frac{1}{D_2}\sqrt{(y_0^2 + l^2\,\mathrm{dn}^2\,v + m^2\,\mathrm{dn}^2\,w_2)^2 + 4\,\frac{m^4}{l^2}\,y_0^2\,\mathrm{sn}^2\,v\,\mathrm{dn}^2\,w_2},$$

$$\sqrt{S_2} = imn\,\mathrm{sn}\,w_2\mathrm{dn}\,w_2, \qquad \mathrm{sn}(h_2^0, k_2) = \frac{l\sqrt{D_2}}{\sqrt{-m^2(y_0\mathrm{sn}\,v + il\mathrm{dn}\,w_2)^2 + l^2(l^2 + y_0^2}}$$

$$A_2 = 2\frac{in}{l}\,y_0\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,w_2, \qquad \mathrm{sn}\,(2h_2, k_2) = \frac{-m}{n}\,\frac{\mathrm{dn}\,w_2}{\mathrm{sn}\,w_2}\,\frac{\sqrt{l^2 + y_0^2}\,\mathrm{dn}\,v}{k_2\sqrt{D_2}},$$

$$\mathrm{sn}\,(\omega_2^{(1)}, k_2) = \frac{l\sqrt{D_2}}{\sqrt{-m^2(y_0\mathrm{sn}\,v - il\,\mathrm{dn}\,w_2)^2 + l^2(l^2 + y_0^2)\mathrm{dn}^2 v}}\;\frac{m + il\,\mathrm{cn}\,u_1}{n\,\mathrm{dn}\,u_1},$$

$$\mathrm{sn}\,(\omega_2^{(2)}, k_2) = \frac{l\sqrt{D_2}}{\sqrt{-m^2(y_0\mathrm{sn}\,v - il\,\mathrm{dn}\,w_2)^2 + l^2(l^2 + y_0^2)\mathrm{dn}^2 v}}\;\frac{m + il\,\mathrm{cn}\,u_2}{n\,\mathrm{dn}\,u_2};$$

$$\text{III)}\begin{cases}
D_3=y_0^2-m^2+l^2\mathrm{dn}^2 v+n^2\mathrm{dn}^2 u_1-2im\sqrt{(l^2\mathrm{dn}^2 v+n^2\mathrm{dn}^2 u_1)+y_0^2(\mathrm{dn}^2 v+\frac{n^2}{l^2}\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{dn}^2 u_1)},\\
k_3=\frac{1}{D_3}\sqrt{(y_0^2+l^2\,\mathrm{dn}^2 v-l^2\,\mathrm{cn}^2 u_1)^2-4m^2 y_0^2\,\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{cn}^2 u_1},\\
\sqrt{T_1}=nl\,\mathrm{cn}\,u_1\mathrm{dn}\,u_1,\qquad \mathrm{sn}(h_3^0,k_3)=\frac{l\sqrt{D_3}}{\sqrt{-(my_0\,\mathrm{sn}\,v+l^2\mathrm{cn}\,u_1)^2+l^2(l^2+y_0^2)\mathrm{dn}^2 v}},\\
A_3=2\frac{in}{l}y_0\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,u_1,\qquad \mathrm{sn}(2h_3,k_3)=\frac{il}{n}\frac{\mathrm{cn}\,u_1}{\mathrm{dn}\,u_1}\frac{\sqrt{l^2+y_0^2}\,\mathrm{dn}\,v}{k_3\sqrt{D_3}},\\
\mathrm{sn}(\omega_3^{(1)},k_3)=\frac{l\sqrt{D_3}}{\sqrt{-(my_0\,\mathrm{sn}\,v-l^2\,\mathrm{cn}\,u_1)^2+l^2(l^2+y_0^2)\,\mathrm{dn}^2 v}}\;\frac{m(1-\mathrm{dn}\,w_1)}{n\,\mathrm{sn}\,w_1},\\
\mathrm{sn}(\omega_3^{(2)},k_3)=\frac{l\sqrt{D_3}}{\sqrt{-(my_0\,\mathrm{sn}\,v-l^2\,\mathrm{cn}\,u_1)^2+l^2(l^2+y_0^2)\,\mathrm{dn}^2 v}}\;\frac{m(1-\mathrm{dn}\,w_2)}{n\,\mathrm{sn}\,w_2};
\end{cases}$$

$$\text{IV)}\begin{cases}
D_4=y_0^2-m^2+l^2\mathrm{dn}^2 v+n^2\mathrm{dn}^2 u_2-2im\sqrt{(l^2\mathrm{dn}^2 v+n^2\mathrm{dn}^2 u_2)+y_0^2(\mathrm{dn}^2 v+\frac{n^2}{l^2}\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{dn}^2 u_2)},\\
k_4=\frac{1}{D_4}\sqrt{(y_0^2+l^2\,\mathrm{dn}^2 v-l^2\,\mathrm{cn}^2 u_2)^2-4m^2 y_0^2\,\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{cn}^2 u_2},\\
\sqrt{T_2}=nl\,\mathrm{cn}\,u_2\mathrm{dn}\,u_2,\qquad \mathrm{sn}(h_4^0,k_4)=\frac{l\sqrt{D_4}}{\sqrt{-(my_0\,\mathrm{sn}\,v+l^2\mathrm{cn}\,u_2)^2+l^2(l^2+y_0^2)\mathrm{dn}^2 v}},\\
A_4=2\frac{in}{l}y_0\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,u_2,\qquad \mathrm{sn}(2h_4,k_4)=\frac{il}{n}\frac{\mathrm{cn}\,u_2}{\mathrm{dn}\,u_2}\frac{\sqrt{l^2+y_0^2}\,\mathrm{dn}\,v}{k_4\sqrt{D_4}},\\
\mathrm{sn}(\omega_4^{(1)},k_4)=\frac{l\sqrt{D_4}}{\sqrt{-(my_0\,\mathrm{sn}\,v-l^2\,\mathrm{cn}\,u_2)^2+l^2(l^2+y_0^2)\,\mathrm{dn}^2 v}}\;\frac{m(1-\mathrm{dn}\,w_1)}{n\,\mathrm{sn}\,w_1},\\
\mathrm{sn}(\omega_4^{(2)},k_4)=\frac{l\sqrt{D_4}}{\sqrt{-(my_0\,\mathrm{sn}\,v-l^2\,\mathrm{cn}\,u_2)^2+l^2(l^2+y_0^2)\,\mathrm{dn}^2 v}}\;\frac{m(1-\mathrm{dn}\,w_2)}{n\,\mathrm{sn}\,w_2}.
\end{cases}$$

TABLEAU $\bar{R}_y^{(x)}$

$$\left\{\begin{aligned} B &= \frac{1}{l}\left[in\sqrt{l^2+y_0^2}\,\mathrm{cn}\,w + m y_0\,\mathrm{dn}\,w\right], \\ C &= \frac{1}{l}\left[in\sqrt{l^2+y_0^2}\,\mathrm{cn}\,w - m y_0\,\mathrm{dn}\,w\right], \end{aligned}\right.$$

(I)

$$D_1 = y_0^2 - m^2 - n^2\mathrm{cn}^2 w + n^2\mathrm{dn}^2 u_1 + 2mn\sqrt{(\mathrm{cn}^2 w - \mathrm{dn}^2 u_1) + \frac{y_0^2}{l^2}(\mathrm{cn}^2 w - \mathrm{dn}^2 w\,\mathrm{dn}^2}$$

$$k_1 = \frac{1}{D_1}\sqrt{(y_0^2 - n^2\mathrm{cn}^2 w - l^2\mathrm{cn}^2 u_1)^2 - 4m^2 y_0^2\,\mathrm{dn}^2 w\,\mathrm{cn}^2 u_1},$$

$$\sqrt{S_1} = nl\,\mathrm{cn}\,u_1\,\mathrm{dn}\,u_1, \qquad \mathrm{sn}(h_1^0, k_1) = \frac{-il\sqrt{D_1}}{\sqrt{(m y_0\,\mathrm{dn}\,w + l^2\mathrm{cn}\,u_1)^2 + n^2(l^2+y_0^2)\mathrm{cn}}}$$

$$A_1 = 2\frac{in}{l}\,y_0\,\mathrm{dn}\,w\,\mathrm{dn}\,u_1, \qquad \mathrm{sn}(2h_1, k_1) = -\frac{\mathrm{cn}\,u_1}{\mathrm{dn}\,u_1}\,\frac{\sqrt{l^2+y_0^2}\,\mathrm{cn}\,w}{k_1\sqrt{D_1}},$$

$$\mathrm{sn}(\omega_1^{(1)}, k_1) = \frac{-l\sqrt{D_1}}{\sqrt{(m y_0\,\mathrm{dn}\,w - l^2\mathrm{cn}\,u_1)^2 + n^2(l^2+y_0^2)\,\mathrm{cn}^2 w}}\;\frac{1-\mathrm{sn}\,v_1}{\mathrm{cn}\,v_1},$$

$$\mathrm{sn}(\omega_1^{(2)}, k_1) = \frac{-l\sqrt{D_1}}{\sqrt{(m y_0\,\mathrm{dn}\,w - l^2\mathrm{cn}\,u_1)^2 + n^2(l^2+y_0^2)\,\mathrm{cn}^2 u_1}}\;\frac{1-\mathrm{sn}\,v_2}{\mathrm{cn}\,v_2};$$

(II)

$$D_2 = y_0^2 - m^2 - n^2\mathrm{cn}^2 w + n^2\mathrm{dn}^2 u_2 + 2mn\sqrt{(\mathrm{cn}^2 w - \mathrm{dn}^2 u_2) + \frac{y_0^2}{l^2}(\mathrm{cn}^2 w - \mathrm{dn}^2 w\,\mathrm{dn}^2 u}$$

$$k_2 = \frac{1}{D_2}\sqrt{(y_0^2 - n^2\mathrm{cn}^2 w - l^2\mathrm{cn}^2 u_2)^2 - 4m^2 y_0^2\,\mathrm{dn}^2 w\,\mathrm{cn}^2 u_2},$$

$$\sqrt{S_2} = nl\,\mathrm{cn}\,u_2\,\mathrm{dn}\,u_2, \qquad \mathrm{sn}(h_2^0, k_2) = \frac{-il\sqrt{D_2}}{\sqrt{(m y_0\,\mathrm{dn}\,w + l^2\mathrm{cn}\,u_2)^2 + n^2(l^2+y_0^2)\mathrm{cn}^2 w}}$$

$$A_2 = 2\frac{in}{l}\,y_0\,\mathrm{dn}\,w\,\mathrm{dn}\,u_2, \qquad \mathrm{sn}(2h_2, k_2) = -\frac{\mathrm{cn}\,u_2}{\mathrm{dn}\,u_2}\,\frac{\sqrt{l^2+y_0^2}\,\mathrm{cn}\,w}{k_2\sqrt{D_2}},$$

$$\mathrm{sn}(\omega_2^{(1)}, k_2) = \frac{-l\sqrt{D_2}}{\sqrt{(m y_0\,\mathrm{dn}\,w - l^2\mathrm{cn}\,u_2)^2 + n^2(l^2+y_0^2)\,\mathrm{cn}^2 w}}\;\frac{1-\mathrm{sn}\,v_1}{\mathrm{cn}\,v_1},$$

$$\mathrm{sn}(\omega_2^{(2)}, k_2) = \frac{-l\sqrt{D_2}}{\sqrt{(m y_0\,\mathrm{dn}\,w - l^2\mathrm{cn}\,u_2)^2 + n^2(l^2+y_0^2)\,\mathrm{cn}^2 w}}\;\frac{1-\mathrm{sn}\,v_2}{\mathrm{cn}\,v_2};$$

$$
\text{(}i\text{)}\left\{\begin{aligned}
&D_3=y_0^2-m^2-n^2\operatorname{cn}^2w-m^2\operatorname{cn}^2v_1-2im\sqrt{(n^2\operatorname{cn}^2w+m^2\operatorname{cn}^2v_1)+\frac{y_0^2}{l^2}(n^2\operatorname{cn}^2w+m^2\operatorname{dn}^2w\operatorname{cn}^2v_1)},\\
&k_3=\frac{1}{D_3}\sqrt{(y_0^2-n^2\operatorname{cn}^2w+m^2\operatorname{sn}^2v_1)^2+4\frac{m^4}{l^2}y_0^2\operatorname{dn}^2w\operatorname{sn}^2v_1},\\
&\sqrt{T_1}=m^2\operatorname{sn}v_1\operatorname{cn}v_1,\qquad \operatorname{sn}(h_3^0,k_3)=\frac{-il\sqrt{D_3}}{\sqrt{m^2(y_0\operatorname{dn}w+il\operatorname{sn}v_1)^2+n^2(l^2+y_0^2)\operatorname{cn}^2w}},\\
&A_3=2\frac{m}{l}y_0\operatorname{dn}w\operatorname{cn}v_1,\qquad \operatorname{sn}(2h_3,k_3)=\frac{-n}{l}\frac{\operatorname{sn}v_1}{\operatorname{cn}v_1}\frac{\sqrt{l^2+y_0^2}\operatorname{cn}w}{k_3\sqrt{D_3}},\\
&\operatorname{sn}(\omega_3^{(1)},k_3)=\frac{-il\sqrt{D_3}}{\sqrt{m^2(y_0\operatorname{dn}w-il\operatorname{sn}v_1)^2+n^2(l^2+y_0^2)\operatorname{cn}^2w}}\;\frac{m+il\operatorname{cn}u_1}{n\operatorname{dn}u_1},\\
&\operatorname{sn}(\omega_3^{(2)},k_3)=\frac{-il\sqrt{D_3}}{\sqrt{m^2(y_0\operatorname{dn}w-il\operatorname{sn}v_1)^2+n^2(l^2+y_0^2)\operatorname{cn}^2w}}\;\frac{m+il\operatorname{cn}u_2}{n\operatorname{dn}u_2};
\end{aligned}\right.
$$

$$
\text{(}r\text{)}\left\{\begin{aligned}
&D_4=y_0^2-m^2-n^2\operatorname{cn}^2w-m^2\operatorname{cn}^2v_2-2im\sqrt{(n^2\operatorname{cn}^2w+m^2\operatorname{cn}^2v_2)+\frac{y_0^2}{l^2}(n^2\operatorname{cn}^2w+m^2\operatorname{dn}^2w\operatorname{cn}^2v_2)},\\
&k_4=\frac{1}{D_4}\sqrt{(y_0^2-n^2\operatorname{cn}^2w+m^2\operatorname{sn}^2v_2)^2+4\frac{m^4}{l^2}y_0^2\operatorname{dn}^2w\operatorname{sn}^2v_2},\\
&\sqrt{T_2}=m^2\operatorname{sn}v_2\operatorname{cn}v_2,\qquad \operatorname{sn}(h_4^0,k_4)=\frac{-il\sqrt{D_4}}{\sqrt{m^2(y_0\operatorname{dn}w+il\operatorname{sn}v_2)^2+n^2(l^2+y_0^2)\operatorname{cn}^2w}},\\
&A_4=2\frac{m}{l}y_0\operatorname{dn}w\operatorname{cn}v_2,\qquad \operatorname{sn}(2h_4,k_4)=\frac{-n}{l}\frac{\operatorname{sn}v_2}{\operatorname{cn}v_2}\frac{\sqrt{l^2+y_0^2}\operatorname{cn}w}{k_4\sqrt{D_4}},\\
&\operatorname{sn}(\omega_4^{(1)},k_4)=\frac{-il\sqrt{D_4}}{\sqrt{m^2(y_0\operatorname{dn}w-il\operatorname{sn}v_2)^2+n^2(l^2+y_0^2)\operatorname{cn}^2w}}\;\frac{m+il\operatorname{cn}u_1}{n\operatorname{dn}u_1},\\
&\operatorname{sn}(\omega_4^{(2)},k_4)=\frac{-il\sqrt{D_4}}{\sqrt{m^2(y_0\operatorname{dn}w-il\operatorname{sn}v_2)^2+n^2(l^2+y_0^2)\operatorname{cn}^2w}}\;\frac{m+il\operatorname{cn}u_2}{n\operatorname{dn}u_2},
\end{aligned}\right.
$$

Tout comme pour le problème résolu dans le Chapitre I, dans chacun de ces tableaux chaque élément ou coefficient demandé étant déterminé successivement au moyen des quantités qui figurent antérieurement dans le même tableau, à la condition de faire usage pour le calcul de chaque paramètre h de la formule générale (133), les dits tableaux $\overline{P}_y^{(x)}$, $\overline{Q}_y^{(x)}$, $\overline{R}_y^{(x)}$ fournissent donc, par le moyen de la formule unique (135), les expressions définitives en fonction des données des trois quantités $I^{(p^2)}$, $I^{(q^2)}$, $I^{(r^2)}$, moyennant lesquelles les formules (5) et (7), considérées pour le cas particulier actuel, donneront, pour celle de la première composante demandée, la valeur

$$(137) \qquad X_y = \frac{-fD}{l.in}\left([\sqrt{P}\, I^{(p^2)}]_1^1 + [\sqrt{Q}\, I^{(q^2)}]_2^1 + [\sqrt{R}\, I^{(r^2)}]_2^1\right),$$

les coefficients $\sqrt{P}$, $\sqrt{Q}$, $\sqrt{R}$, *positifs par définition*, étant donnés eux-mêmes immédiatement par les égalités ci-dessus (136), d'où l'on tirera, en choisissant le signe convenable à cet effet,

$$(138) \left\{ \begin{array}{ll} P = (l^2-p^2)(n^2+p^2) = n^2 l^2 \,\mathrm{cn}^2 u \,\mathrm{dn}^2 u, & \sqrt{P} = \pm\, n l \,\mathrm{cn}\, u \,\mathrm{dn}\, u, \\ Q = (l^2-q^2)(n^2+q^2) = m^4 \,\mathrm{sn}^2 v \,\mathrm{cn}^2 v, & \sqrt{Q} = \pm\, m^2 \,\mathrm{sn}\, v \,\mathrm{cn}\, v, \\ R = (l^2-r^2)(n^2+r^2) = -m^2 n^2 \,\mathrm{sn}^2 w \,\mathrm{dn}^2 w, & \sqrt{R} = \pm\, i m n \,\mathrm{sn}\, w \,\mathrm{dn}\, w; \end{array} \right.$$

et les indices 1 et 2 enfin se rapportant, d'après nos conventions, pour les premiers crochets dans la parenthèse à la coordonnée u, pour les seconds à la coordonnée v, et pour les troisièmes à la coordonnée w, lesquelles coordonnées u, v, w ne sont affectées, précisément dans cette intention, d'aucun indice dans les tableaux respectivement correspondants $\overline{P}_y^{(x)}$, $\overline{Q}_y^{(x)}$, $\overline{R}_y^{(x)}$, ainsi qu'on l'a sans doute remarqué.

B. *Expression de la Composante* Z_y. — Si, au lieu de la composante X relative au cas particulier actuel, nous nous étions proposé de déterminer la composante Z, cette recherche eût encore consisté, avons-nous dit au début du Chapitre II (pp. 9-10), dans la détermination, à l'aide des variables p'', q'', r'', d'une intégrale double $I^{(3)}$ de la forme (8) au moyen d'un calcul tout semblable; et ce nouveau résultat étant obtenu, l'expression demandée de la

quantité $\Delta_y^{(z)} = \frac{n.im}{-fD} Z_y$ eût alors été fournie par la seconde formule (9), ce qui revient à dire que la composante Z_y (5) aurait été représentée elle-même par celle-ci

$$(139) \qquad Z_y = \frac{-fD}{n.im}\left([\sqrt{P''}\, I^{(p''^2)}]_2^1 + [\sqrt{Q''}\, I^{(q''^2)}]_2^1 + [\sqrt{R''}\, I^{(r''^2)}]_2^1\right),$$

les nouveaux coefficients $\sqrt{P''}$, $\sqrt{Q''}$, $\sqrt{R''}$ positifs encore par définition, se déduisant des précédents (138) par la même loi que les variables p'', q'', r'' des variables p, q, r, c'est-à-dire par une permutation circulaire deux fois répétée, et étant dès lors les valeurs positives des expressions :

$$) \qquad \sqrt{P''} = \pm mn \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w, \qquad \sqrt{Q''} = \pm l^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u, \qquad \sqrt{R''} = \pm ilm \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v.$$

Or, la question étant ainsi ramenée au calcul de la dite quantité $I^{(\varpi)}$ (8), avec les variables p'', q'', r'' au lieu de p, q, r et l'introduction de la double hypothèse $x_0 = 0$ et $z_0 = 0$, les considérations que nous avons développées dans le Chapitre précédent (pp. 19-25) nous dispensent d'effectuer à nouveau le dit calcul, car elles montrent comment la simple permutation des deux plans coordonnés zx et xy, opérée sur l'expression déjà acquise (137) de la composante X_y, nous procurera d'abord celle de la composante corrélative X_z, et partant de là une permutation circulaire des trois axes coordonnés, opérée deux fois de suite sur ce nouveau résultat lui-même, nous fournira alors la seconde composante demandée Z_y.

En effet, rappelons d'abord que la première de ces deux opérations, savoir la permutation des deux plans coordonnés zx et xy, équivaudra, d'après les explications susmentionnées, à changer simultanément dans le résultat précité (137) y_0 en $-z_0$, puis l, m, n respectivement en in, $-im$, $-il$, et par voie de conséquence k, k', k'' en $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{k''}$, $\frac{1}{k'}$: opération qui revient pratiquement, quant aux trois fonctions elliptiques sn, cn, dn des coordonnées u, v, w, à changer comme nous l'avons montré, ces neuf fonctions elliptiques en celles indiquées par les derniers membres des neuf équivalences (23).

Si donc, pour symboliser le résultat final des deux opérations spécifiées tout à l'heure, nous écrivons pour un instant le résultat précédent (137) sous la forme simplifiée

$$X_y = \frac{-fD}{l.in}(\mathcal{A}I_1 + \mathcal{B}I_2 + \mathcal{C}I_3),$$

en faisant à la fois, en vue de simplifier l'écriture,

$$\mathcal{A} = \sqrt{P}, \quad \mathcal{B} = \sqrt{Q}, \quad \mathcal{C} = \sqrt{R}, \quad I_1 = I^{(p^2)}, \quad I_2 = I^{(q^2)}, \quad I_3 = I^{(r^2)},$$

et sous-entendant pour chaque terme les indices superposés 1 et 2 relatifs aux limites de la variable correspondante à ce terme, puis que nous convenions en même temps d'exprimer par une ou deux parenthèses entourant les dits symboles ce que deviennent chacune de ces quantités par l'effet, soit de la première seule des dites opérations, soit des deux opérations successives, on voit donc, qu'en ayant égard d'abord aux équivalences (22) du Chapitre II, à la suite de la première opération, la formule en question sera transformée une première fois dans la suivante

$$(141) \quad \left\{ \begin{aligned} X_z &= \frac{-fD}{in.i(-il)}\Big((\mathcal{A})(I_1) + (\mathcal{B})(I_2) + (\mathcal{C})(I_3)\Big) \\ &= \frac{-fD}{l.in}\Big((\mathcal{A})(I_1) + (\mathcal{B})(I_2) + (\mathcal{C})(I_3)\Big), \end{aligned} \right.$$

dans laquelle on aura, en partant des valeurs ci-dessus (138) de $\sqrt{P}$, $\sqrt{Q}$, $\sqrt{R}$, puis ayant égard en outre aux équivalences (23) du même Chapitre,

$$\left\{ \begin{aligned} (\mathcal{A}) &= \pm(-il).\, in \operatorname{dn} u \operatorname{cn} u = \pm nl \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \\ (\mathcal{B}) &= \pm(-m^2)\frac{n}{im} \operatorname{sn} w \operatorname{dn} w = \pm imn \operatorname{sn} w \operatorname{dn} w, \\ (\mathcal{C}) &= \pm i(-im)(-il)\frac{m}{il} \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v = \pm m^2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v, \end{aligned} \right.$$

et qu'à la suite de la seconde opération elle sera devenue finalement

$$(142) \quad Z_y = \frac{-fD}{n.im}\Big(((\mathcal{A}))((I_1)) + ((\mathcal{B}))((I_2)) + ((\mathcal{C}))((I_3))\Big),$$

les valeurs des nouveaux coefficients étant alors

$$((\mathfrak{A})) = \pm mn \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w, \qquad ((\mathfrak{B})) = \pm ilm \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v, \qquad ((\mathfrak{C})) = \pm l^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u,$$

c'est-à-dire exactement, la valeur positive étant seule à considérer par définition dans ces expressions comme dans celles (138) et (140), les valeurs

$$((\mathfrak{A})) = \sqrt{\overline{P}''}, \qquad ((\mathfrak{B})) = \sqrt{\overline{R}''}, \qquad ((\mathfrak{C})) = \sqrt{\overline{Q}''}.$$

D'où il suit que la dite valeur (142) de la composante Z_y sera, en intervertissant seulement les deux derniers termes,

$$Z_y = \frac{-fD}{n.im}\left(\sqrt{\overline{P}''}\,((I_1)) + \sqrt{\overline{Q}''}\,((I_3)) + \sqrt{\overline{R}''}\,((I_2))\right),$$

et dès lors, la comparaison de ce dernier résultat avec la formule ci-dessus (139) fait voir clairement que l'on aura :

$$I^{(p''^2)} = ((I_1)), \qquad I^{(q''^2)} = ((I_3)), \qquad I^{(r''^2)} = ((I_2)).$$

Les valeurs de tous les divers éléments et coefficients, avec lesquels sera composée, par le moyen de la même formule (135), chacune de ces trois expressions, seront donc indiquées encore par trois nouveaux tableaux, que nous appellerons par analogie $\overline{P}_y^{(z)}, \overline{Q}_y^{(z)}, \overline{R}_y^{(z)}$ et qui résulteront, par le moyen des deux opérations spécifiées un peu plus haut (p. 128) respectivement des tableaux précédents $\overline{P}_y^{(x)}, \overline{R}_y^{(x)}, \overline{Q}_y^{(x)}$ relatifs à l'autre composante normale X_y.

Le calcul correspondant alors, tant aux opérations purement littérales ainsi spécifiées (assez longues et fastidieuses, à la vérité, en raison du nombre énorme de termes sur lesquels elles devront porter) qu'aux réductions qui s'offriront d'elles-mêmes à la suite de la première, est trop simple et trop facile pour qu'il soit utile d'en développer ici, même à titre d'exemple, la moindre partie. — Nous allons donc nous borner à indiquer dans les pages suivantes le résultat final, afin de remplir notre promesse d'apporter dans le présent Chapitre la solution complète et définitive du problème quant aux deux Composantes Normales à l'axe de symétrie sur lequel nous supposons situé le point attiré.

TABLEAU $\overline{\mathrm{P}}_r^{(2)}$

$$\left\{\begin{aligned} B &= \frac{n}{m}\sqrt{m^2+y_0^2}\,\mathrm{sn}\,w + i y_0\,\mathrm{dn}\,w,\\ C &= \frac{n}{m}\sqrt{m^2+y_0^2}\,\mathrm{sn}\,w - i y_0\,\mathrm{dn}\,w, \end{aligned}\right.$$

$$\text{(I)}\left\{\begin{aligned} &D_1 = y_0^2 + l^2 + n^2\mathrm{sn}^2 w + l^2\mathrm{dn}^2 v_1 - 2l\sqrt{(n^2\mathrm{sn}^2 w + l^2\mathrm{dn}^2 v_1) + y_0^2\left(\frac{n^2}{m^2}\mathrm{sn}^2 w + \mathrm{dn}^2 w\,\mathrm{dn}\right.}\\ &k_1 = \frac{1}{D_1}\sqrt{(y_0^2 + n^2\,\mathrm{sn}^2 w - m^2\,\mathrm{sn}^2 v_1)^2 - 4m^2 y_0^2\,\mathrm{dn}^2 w\,\mathrm{sn}^2 v_1},\\ &\sqrt{S_1} = i l m\,\mathrm{sn}\,v_1\,\mathrm{dn}\,v_1, \qquad \mathrm{sn}(h_1^0, k_1) = \frac{m\sqrt{D_1}}{\sqrt{m^2(y_0\mathrm{dn}\,w - m\,\mathrm{sn}\,v_1)^2 + n^2(m^2+y_0^2)\mathrm{sn}}}\\ &A_1 = -2m y_0\mathrm{dn}\,w\,\mathrm{dn}\,v_1, \qquad \mathrm{sn}(2h_1, k_1) = \frac{n}{l}\,\frac{\mathrm{sn}\,v_1}{\mathrm{dn}\,v_1}\,\frac{\sqrt{m^2+y_0^2}\,\mathrm{sn}\,w}{k_1\sqrt{D_1}},\\ &\mathrm{sn}(\omega_1^{(1)}, k_1) = \frac{m\sqrt{D_1}}{\sqrt{m^2(y_0\,\mathrm{dn}\,w + m\,\mathrm{sn}\,v_1)^2 + n^2(m^2+y_0^2)\,\mathrm{sn}^2 w}}\;\frac{i(1-\mathrm{cn}\,u_1)}{\mathrm{sn}\,u_1},\\ &\mathrm{sn}(\omega_1^{(2)}, k_1) = \frac{m\sqrt{D_1}}{\sqrt{m^2(y_0\,\mathrm{dn}\,w + m\,\mathrm{sn}\,v_1)^2 + n^2(m^2+y_0^2)\,\mathrm{sn}^2 w}}\;\frac{i(1-\mathrm{cn}\,u_2)}{\mathrm{sn}\,u_2}; \end{aligned}\right.$$

$$\text{(II)}\left\{\begin{aligned} &D_2 = y_0^2 + l^2 + n^2\mathrm{sn}^2 w + l^2\mathrm{dn}^2 v_2 - 2l\sqrt{(n^2\mathrm{sn}^2 w + l^2\mathrm{dn}^2 v_2) + y_0^2\left(\frac{n^2}{m^2}\mathrm{sn}^2 w + \mathrm{dn}^2 w\,\mathrm{dn}^2\right.}\\ &k_2 = \frac{1}{D_2}\sqrt{(y_0^2 + n^2\,\mathrm{sn}^2 w - m^2\,\mathrm{sn}\,v_2)^2 - 4m^2 y_0^2\,\mathrm{dn}^2 w\,\mathrm{sn}^2 v_2},\\ &\sqrt{S_2} = i l m\,\mathrm{sn}\,v_2\,\mathrm{dn}\,v_2, \qquad \mathrm{sn}(h_2^0, k_2) = \frac{m\sqrt{D_2}}{\sqrt{m^2(y_0\mathrm{dn}\,w - m\,\mathrm{sn}\,v_2)^2 + n^2(m^2+y_0^2)\mathrm{sn}}}\\ &A_2 = -2m y_0\,\mathrm{dn}\,w\,\mathrm{dn}\,v_2, \qquad \mathrm{sn}(2h_2, k_2) = \frac{n}{l}\,\frac{\mathrm{sn}\,v_2}{\mathrm{dn}\,v_2}\,\frac{\sqrt{m^2+y_0^2}\,\mathrm{sn}\,w}{k_2\sqrt{D_2}},\\ &\mathrm{sn}(\omega_2^{(1)}, k_2) = \frac{m\sqrt{D_2}}{\sqrt{m^2(y_0\,\mathrm{dn}\,w + m\,\mathrm{sn}\,w_2)^2 + n^2(m^2+y_0^2)\,\mathrm{sn}^2 w}}\;\frac{i(1-\mathrm{cn}\,u_1)}{\mathrm{sn}\,u_1},\\ &\mathrm{sn}(\omega_2^{(2)}, k_2) = \frac{m\sqrt{D_2}}{\sqrt{m^2(y_0\,\mathrm{dn}\,w + m\,\mathrm{sn}\,w_2)^2 + n^2(m^2+y_0^2)\,\mathrm{sn}^2 w}}\;\frac{i(1-\mathrm{cn}\,u_2)}{\mathrm{sn}\,u_2}; \end{aligned}\right.$$

1)
$$\begin{cases} D_3 = y_0^2 + l^2 + n^2 \operatorname{sn}^2 w + l^2 \operatorname{sn}^2 u_1 + 2\sqrt{n^2 l^2 (\operatorname{sn}^2 w - \operatorname{cn}^2 u_1) - y_0^2 (l^2 + n^2 \operatorname{dn}^2 w \operatorname{cn}^2 u_1)}, \\ k_3 = \dfrac{1}{D_3} \sqrt{(y_0^2 + n^2 \operatorname{sn}^2 w - l^2 \operatorname{cn}^2 u_1)^2 + 4 l^2 y_0^2 \operatorname{dn}^2 w \operatorname{cn}^2 u_1}, \\ \sqrt{T_1} = -l^2 \operatorname{sn} u_1 \operatorname{cn} u_1, \quad \operatorname{sn}(h_3^0, k_3) = \dfrac{m\sqrt{D_3}}{\sqrt{m^2 (y_0 \operatorname{dn} w - il \operatorname{cn} u_1)^2 + n^2 (m^2 + y_0^2) \operatorname{sn}^2 w}}, \\ A_3 = 2 l y_0 \operatorname{dn} w \operatorname{sn} u_1, \quad \operatorname{sn}(2h_3, k_3) = -\dfrac{in}{m} \dfrac{\operatorname{cn} u_1}{\operatorname{sn} u_1} \dfrac{\sqrt{m^2 + y_0^2} \operatorname{sn} w}{k_3 \sqrt{D_3}}, \\ \operatorname{sn}(\omega_3^{(1)}, k_3) = \dfrac{m\sqrt{D_3}}{\sqrt{m^2 (y_0 \operatorname{dn} w + il \operatorname{cn} u_1)^2 + n^2 (m^2 + y_0^2) \operatorname{sn}^2 w}} \dfrac{l + im \operatorname{sn} v_1}{il \operatorname{dn} v_1}, \\ \operatorname{sn}(\omega_3^{(2)}, k_3) = \dfrac{m\sqrt{D_3}}{\sqrt{m^2 (y_0 \operatorname{dn} w + il \operatorname{cn} u_1)^2 + n^2 (m^2 + y_0^2) \operatorname{sn}^2 w}} \dfrac{l + im \operatorname{sn} v_2}{il \operatorname{dn} v_2}; \end{cases}$$

)
$$\begin{cases} D_4 = y_0^2 + l^2 + n^2 \operatorname{sn}^2 w + l^2 \operatorname{sn}^2 u_2 + 2\sqrt{n^2 l^2 (\operatorname{sn}^2 w - \operatorname{cn}^2 u_2) - y_0^2 (l^2 + n^2 \operatorname{dn}^2 w \operatorname{cn}^2 u_2)}, \\ k_4 = \dfrac{1}{D_4} \sqrt{(y_0^2 + n^2 \operatorname{sn}^2 w - l^2 \operatorname{cn}^2 u_2)^2 + 4 l^2 y_0^2 \operatorname{dn}^2 w \operatorname{cn}^2 u_2}, \\ \sqrt{T_2} = -l^2 \operatorname{sn} u_2 \operatorname{cn} u_2, \quad \operatorname{sn}(h_4^0, k_4) = \dfrac{m\sqrt{D_4}}{\sqrt{m^2 (y_0 \operatorname{dn} w - il \operatorname{cn} u_2)^2 + n^2 (m^2 + y_0^2) \operatorname{sn}^2 w}}, \\ A_4 = 2 l y_0 \operatorname{dn} w \operatorname{sn} u_2, \quad \operatorname{sn}(2h_4, k_4) = -\dfrac{in}{m} \dfrac{\operatorname{cn} u_2}{\operatorname{sn} u_2} \dfrac{\sqrt{m^2 + y_0^2} \operatorname{sn} w}{k_4 \sqrt{D_4}}, \\ \operatorname{sn}(\omega_4^{(1)}, k_4) = \dfrac{m\sqrt{D_4}}{\sqrt{m^2 (y_0 \operatorname{dn} w + il \operatorname{cn} u_2)^2 + n^2 (m^2 + y_0^2) \operatorname{sn}^2 w}} \dfrac{l + im \operatorname{sn} v_1}{il \operatorname{dn} v_1}, \\ \operatorname{sn}(\omega_4^{(2)}, k_4) = \dfrac{m\sqrt{D_4}}{\sqrt{m^2 (y_0 \operatorname{dn} w + il \operatorname{cn} u_2)^2 + n^2 (m^2 + y_0^2) \operatorname{sn}^2 w}} \dfrac{l + im \operatorname{sn} v_2}{il \operatorname{dn} v_2}. \end{cases}$$

TABLEAU $\overline{Q}_r^{(2)}$

$$\begin{cases} B = \dfrac{-1}{m}\left[n\sqrt{m^2+y_0^2}\,\mathrm{dn}\,u - ly_0\,\mathrm{cn}\,u\right], \\ C = \dfrac{-1}{m}\left[n\sqrt{m^2+y_0^2}\,\mathrm{dn}\,u + ly_0\,\mathrm{cn}\,u\right]. \end{cases}$$

(I)

$$D_1 = y_0^2 + l^2 + n^2\mathrm{dn}^2u - n^2\mathrm{cn}^2w_1 + 2\frac{inl}{m}\sqrt{m^2(\mathrm{dn}^2u - \mathrm{cn}^2w) + y_0^2(\mathrm{dn}^2u + \mathrm{cn}^2u\,\mathrm{cn}}$$

$$k_1 = \frac{1}{D_1}\sqrt{(y_0^2 + n^2\,\mathrm{dn}^2\,u - m^2\,\mathrm{dn}^2\,w_1)^2 + 4n^2y_0^2\,\mathrm{cn}^2\,u\,\mathrm{dn}^2\,w_1},$$

$$\sqrt{S_1} = mn\,\mathrm{cn}\,w_1\,\mathrm{dn}\,w_1, \qquad \mathrm{sn}(h_1^0, k_1) = \frac{m\sqrt{D_1}}{\sqrt{(ily_0\mathrm{cn}\,u + m^2\mathrm{dn}\,w_1)^2 + n^2(m^2+y_0^2)\mathrm{d}}}$$

$$A_1 = 2\frac{nl}{m}\,y_0\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,w_1, \qquad \mathrm{sn}(2h_1, k_1) = -i\frac{\mathrm{dn}\,w_1}{\mathrm{cn}\,w_1}\,\frac{\sqrt{m^2+y_0^2}\,\mathrm{dn}\,u}{k_1\sqrt{D_1}},$$

$$\mathrm{sn}(\omega_1^{(1)}, k_1) = \frac{m\sqrt{D_1}}{\sqrt{(ily_0\,\mathrm{cn}\,u - m^2\,\mathrm{dn}\,w_1)^2 + n^2(m^2+y_0^2)\,\mathrm{dn}^2u}}\;\frac{l + im\,\mathrm{sn}\,v_1}{il\,\mathrm{dn}\,v_1},$$

$$\mathrm{sn}(\omega_1^{(2)}, k_1) = \frac{m\sqrt{D_1}}{\sqrt{(ily_0\,\mathrm{cn}\,u - m^2\,\mathrm{dn}\,w_1)^2 + n^2(m^2+y_0^2)\,\mathrm{dn}^2u}}\;\frac{l + im\,\mathrm{sn}\,v_2}{il\,\mathrm{dn}\,v_2};$$

(II)

$$D_2 = y_0^2 + l^2 + n^2\mathrm{dn}^2u - n^2\mathrm{cn}^2w_2 + 2\frac{inl}{m}\sqrt{m^2(\mathrm{dn}^2u - \mathrm{cn}^2w_2) + y_0^2(\mathrm{dn}^2u + \mathrm{cn}^2u\,\mathrm{cn}^2}$$

$$k_2 = \frac{1}{D_2}\sqrt{(y_0^2 + n^2\,\mathrm{dn}^2\,u - m^2\,\mathrm{dn}^2\,w_2)^2 + 4n^2y_0^2\,\mathrm{cn}^2\,u\,\mathrm{dn}^2\,w_2},$$

$$\sqrt{S_2} = mn\,\mathrm{cn}\,w_2\,\mathrm{dn}\,w_2, \qquad \mathrm{sn}(h_2^0, k_2) = \frac{m\sqrt{D_2}}{\sqrt{(ily_0\mathrm{cn}\,u + m^2\mathrm{dn}\,w_2)^2 + n^2(m^2+y_0^2)\mathrm{dn}}}$$

$$A_2 = 2\frac{nl}{m}\,y_0\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,w_2, \qquad \mathrm{sn}(2h_2, k_2) = -i\frac{\mathrm{dn}\,w_2}{\mathrm{cn}\,w_2}\,\frac{\sqrt{m^2+y_0^2}\,\mathrm{dn}\,u}{k_2\sqrt{D_2}},$$

$$\mathrm{sn}(\omega_2^{(1)}, k_2) = \frac{m\sqrt{D_2}}{\sqrt{(ily_0\,\mathrm{cn}\,u - m^2\,\mathrm{dn}\,w_2)^2 + n^2(m^2+y_0^2)\,\mathrm{dn}^2u}}\;\frac{l + im\,\mathrm{sn}\,v_1}{il\,\mathrm{dn}\,v_1},$$

$$\mathrm{sn}(\omega_2^{(2)}, k_2) = \frac{m\sqrt{D_2}}{\sqrt{(ily_0\,\mathrm{cn}\,u - m^2\,\mathrm{dn}\,w_2)^2 + n^2(m^2+y_0^2)\,\mathrm{dn}^2u}}\;\frac{l + im\,\mathrm{sn}\,v_2}{il\,\mathrm{dn}\,v_2};$$

I)

$$D_3 = y_0^2 + l^2 + n^2 \mathrm{dn}^2 u + l^2 \mathrm{dn}^2 v_1 + 2\frac{il}{m}\sqrt{m^2(n^2\mathrm{dn}^2 u + l^2\mathrm{dn}^2 v_1) + y_0^2(n^2\mathrm{dn}^2 u - l^2\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 v_1)},$$

$$k_3 = \frac{1}{D_3}\sqrt{(y_0^2 + n^2\,\mathrm{dn}^2 u + m^2\,\mathrm{sn}^2 v_1)^2 + 4\,l^2 y_0^2\,\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v_1},$$

$$\sqrt{T_1} = ilm\,\mathrm{sn}\,v_1\,\mathrm{dn}\,v_1, \qquad \mathrm{sn}(h_3^0, k_3) = \frac{-im\sqrt{D_3}}{\sqrt{(l y_0\,\mathrm{cn}\,u + m\,n\,\mathrm{sn}\,v_1)^2 - n^2(m^2 + y_0^2)\,\mathrm{dn}^2 u}},$$

$$A_3 = -2\frac{il^2}{m}\,y_0\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,v_1, \qquad \mathrm{sn}(2h_3, k_3) = \frac{n}{l}\,\frac{\mathrm{sn}\,v_1}{\mathrm{dn}\,v_1}\,\frac{\sqrt{m^2 + y_0^2}\,\mathrm{dn}\,u}{k_3\sqrt{D_3}},$$

$$\mathrm{sn}(\omega_3^{(1)}, k_3) = \frac{-im\sqrt{D_3}}{\sqrt{(l y_0\,\mathrm{cn}\,u - m\,n\,\mathrm{sn}\,v_1)^2 - n^2(m^2 + y_0^2)\,\mathrm{dn}^2 u}}\;\frac{l - im\,\mathrm{dn}\,w_1}{n\,\mathrm{cn}\,w_1},$$

$$\mathrm{sn}(\omega_3^{(2)}, k_3) = \frac{-im\sqrt{D_3}}{\sqrt{(l y_0\,\mathrm{cn}\,u - m\,n\,\mathrm{sn}\,v_1)^2 - n^2(m^2 + y_0^2)\,\mathrm{dn}^2 u}}\;\frac{l - im\,\mathrm{dn}\,w_2}{n\,\mathrm{cn}\,w_2};$$

)

$$D_4 = y_0^2 + l^2 + n^2 \mathrm{dn}^2 u + l^2 \mathrm{dn}^2 v_2 + 2\frac{il}{m}\sqrt{m^2(n^2\mathrm{dn}^2 u + l^2\mathrm{dn}^2 v_2) + y_0^2(n^2\mathrm{dn}^2 u - l^2\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 v_2)},$$

$$k_4 = \frac{1}{D_4}\sqrt{(y_0^2 + n^2\,\mathrm{dn}^2 u + m^2\,\mathrm{sn}^2 v_2)^2 + 4\,l^2 y_0^2\,\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v_2},$$

$$\sqrt{T_2} = ilm\,\mathrm{sn}\,v_2\,\mathrm{dn}\,v_2, \qquad \mathrm{sn}(h_4^0, k_4) = \frac{-im\sqrt{D_4}}{\sqrt{(l y_0\,\mathrm{cn}\,u + m\,n\,\mathrm{sn}\,v_2)^2 - n^2(m^2 + y_0^2)\,\mathrm{dn}^2 u}},$$

$$A_4 = -2\frac{il^2}{m}\,y_0\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,v_2, \qquad \mathrm{sn}(2h_4, k_4) = \frac{n}{l}\,\frac{\mathrm{sn}\,v_2}{\mathrm{dn}\,v_2}\,\frac{\sqrt{m^2 + y_0^2}\,\mathrm{dn}\,u}{k_4\sqrt{D_4}},$$

$$\mathrm{sn}(\omega_4^{(1)}, k_4) = \frac{-im\sqrt{D_4}}{\sqrt{(l y_0\,\mathrm{cn}\,u - m\,n\,\mathrm{sn}\,v_2)^2 - n^2(m^2 + y_0^2)\,\mathrm{dn}^2 u}}\;\frac{l - im\,\mathrm{dn}\,w_1}{n\,\mathrm{cn}\,w_1},$$

$$\mathrm{sn}(\omega_4^{(2)}, k_4) = \frac{-im\sqrt{D_4}}{\sqrt{(l y_0\,\mathrm{cn}\,u - m\,n\,\mathrm{sn}\,v_2)^2 - n^2(m^2 + y_0^2)\,\mathrm{dn}^2 u}}\;\frac{l - im\,\mathrm{dn}\,w_2}{n\,\mathrm{cn}\,w_2}.$$

TABLEAU $\overline{R}_y^{(3)}$

$$\left\{\begin{array}{l} B = i\,[\sqrt{m^2+y_0^2}\,\mathrm{cn}\,v - y_0\,\mathrm{sn}\,v], \\ C = i\,[\sqrt{m^2+y_0^2}\,\mathrm{cn}\,v + y_0\,\mathrm{sn}\,v], \end{array}\right.$$

(I)

$$D_1 = y_0^2 + l^2 - m^2\mathrm{cn}^2 v + l^2\mathrm{sn}^2 u_1 + 2il\sqrt{(m^2\mathrm{cn}^2 v - l^2\mathrm{sn}^2 u_1) + y_0^2(\mathrm{cn}^2 v - \mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{si}}$$

$$k_1 = \frac{1}{D_1}\sqrt{(y_0^2 - m^2\,\mathrm{cn}^2 v - l^2\,\mathrm{cn}^2 u_1)^2 + 4\,l^2 y_0^2\,\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{cn}^2 u_1},$$

$$\sqrt{S_1} = -\,l^2\mathrm{sn}\,u_1\,\mathrm{cn}\,u_1, \qquad \mathrm{sn}(h_1^0, k_1) = \frac{\sqrt{D_1}}{\sqrt{(y_0\mathrm{sn}\,v + im\,\mathrm{cn}\,u_1)^2 - (m^2+y_0^2)}}$$

$$A_1 = -\,2ly_0\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,u_1, \qquad \mathrm{sn}\,(2h_1, k_1) = -\,\frac{l}{m}\,\frac{\mathrm{cn}\,u_1}{\mathrm{sn}\,u_1}\,\frac{\sqrt{m^2+y_0^2}\,\mathrm{cn}\,v}{k_1\sqrt{D_1}},$$

$$\mathrm{sn}\,(\omega_1^{(1)}, k_1) = \frac{\sqrt{D_1}}{\sqrt{(y_0\,\mathrm{sn}\,v - im\,\mathrm{cn}\,u_1)^2 - (m^2+y_0^2)\,\mathrm{cn}^2 v}}\;\frac{l - im\,\mathrm{dn}\,w_1}{n\,\mathrm{cn}\,w_1},$$

$$\mathrm{sn}\,(\omega_1^{(2)}, k_1) = \frac{\sqrt{D_1}}{\sqrt{(y_0\,\mathrm{sn}\,v - im\,\mathrm{cn}\,u_1)^2 - (m^2+y_0^2)\,\mathrm{cn}^2 v}}\;\frac{l - im\,\mathrm{dn}\,w_2}{n\,\mathrm{cn}\,w_2};$$

(II)

$$D_2 = y_0^2 + l^2 - m^2\mathrm{cn}^2 v + l^2\mathrm{sn}^2 u_2 + 2il\sqrt{(m^2\mathrm{cn}^2 v - l^2\mathrm{sn}^2 u_2) + y_0^2(\mathrm{cn}^2 v - \mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{sn}}$$

$$k_2 = \frac{1}{D_2}\sqrt{(y_0^2 - m^2\,\mathrm{cn}^2 v - l^2\,\mathrm{sn}^2 u_2)^2 + 4\,l^2 y_0^2\,\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{cn}^2 u_2},$$

$$\sqrt{S_2} = -\,l^2\,\mathrm{sn}\,u_2\,\mathrm{cn}\,u_2, \qquad \mathrm{sn}(h_2^0, k_2) = \frac{\sqrt{D_2}}{\sqrt{(y_0\mathrm{sn}\,v + im\,\mathrm{cn}\,u_2)^2 - (m^2+y_0^2)\mathrm{c}}}$$

$$A_2 = -\,2ly_0\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,u_2, \qquad \mathrm{sn}\,(2h_2, k_2) = -\,\frac{l}{m}\,\frac{\mathrm{cn}\,u_2}{\mathrm{sn}\,u_2}\,\frac{\sqrt{m^2+y_0^2}\,\mathrm{cn}\,v}{k_2\sqrt{D_2}},$$

$$\mathrm{sn}\,(\omega_2^{(1)}, k_2) = \frac{\sqrt{D_2}}{\sqrt{(y_0\,\mathrm{sn}\,v - im\,\mathrm{cn}\,u_2)^2 - (m^2+y_0^2)\,\mathrm{cn}^2 v}}\;\frac{l - im\,\mathrm{dn}\,w_1}{n\,\mathrm{cn}\,w_1},$$

$$\mathrm{sn}\,(\omega_2^{(2)}, k_2) = \frac{\sqrt{D_2}}{\sqrt{(y_0\,\mathrm{sn}\,v - im\,\mathrm{cn}\,u_2)^2 - (m^2+y_0^2)\,\mathrm{cn}^2 v}}\;\frac{l - im\,\mathrm{dn}\,w_2}{n\,\mathrm{cn}\,w_2};$$

l) $$\left\{\begin{aligned}
&D_3 = y_0^2 + l^2 - m^2\operatorname{cn}^2 v - n^2\operatorname{cn}^2 w_1 + 2i\sqrt{l^2(m^2\operatorname{cn}^2 v + n^2\operatorname{cn}^2 w_1)^2 + y_0^2(l^2\operatorname{cn}^2 v - n^2\operatorname{sn}^2 v\operatorname{cn}^2 w_1)},\\
&k_3 = \frac{1}{D_3}\sqrt{(y_0^2 - m^2\operatorname{cn}^2 v + m^2\operatorname{dn}^2 w_1)^2 - 4m^2 y_0^2\operatorname{sn}^2 v\operatorname{dn}^2 w_1},\\
&\sqrt{T_1} = mn\operatorname{cn} w_1\operatorname{dn} w_1, \qquad \operatorname{sn}(h_3^0, k_3) = \frac{\sqrt{D_3}}{\sqrt{(y_0\operatorname{sn} v - m\operatorname{dn} w_1)^2 - (m^2 + y_0^2)\operatorname{cn}^2 v}},\\
&A_3 = -2iny_0\operatorname{sn} v\operatorname{cn} w_1, \qquad \operatorname{sn}(2h_3, k_3) = -\frac{l}{m}\,\frac{\operatorname{dn} w_1}{\operatorname{cn} w_1}\,\frac{\sqrt{m^2 + y_0^2}\operatorname{cn} v}{k_3\sqrt{D_3}},\\
&\operatorname{sn}(\omega_3^{(1)}, k_3) = \frac{\sqrt{D_3}}{\sqrt{(y_0\operatorname{sn} v + m\operatorname{dn} w_1)^2 - (m^2 + y_0^2)\operatorname{cn}^2 v}}\;\frac{i(1 - \operatorname{cn} u_1)}{\operatorname{sn} u_1},\\
&\operatorname{sn}(\omega_3^{(2)}, k_3) = \frac{\sqrt{D_3}}{\sqrt{(y_0\operatorname{sn} v + m\operatorname{dn} w_1)^2 - (m^2 + y_0^2)\operatorname{cn}^2 v}}\;\frac{i(1 - \operatorname{cn} u_2)}{\operatorname{sn} u_2};
\end{aligned}\right.$$

) $$\left\{\begin{aligned}
&D_4 = y_0^2 + l^2 - m^2\operatorname{cn}^2 v - n^2\operatorname{cn}^2 w_2 + 2i\sqrt{l^2(m^2\operatorname{cn}^2 v + n^2\operatorname{cn}^2 w_2) + y_0^2(l^2\operatorname{cn}^2 v - n^2\operatorname{sn}^2 v\operatorname{cn}^2 w_2)},\\
&k_4 = \frac{1}{D_4}\sqrt{(y_0^2 - m^2\operatorname{cn}^2 v + m^2\operatorname{dn}^2 w_2)^2 - 4m^2 y_0^2\operatorname{sn}^2 v\operatorname{dn}^2 w_2},\\
&\sqrt{T_2} = mn\operatorname{cn} w_2\operatorname{dn} w_2, \qquad \operatorname{sn}(h_4^0, k_4) = \frac{\sqrt{D_4}}{\sqrt{(y_0\operatorname{sn} v - m\operatorname{dn} w_2)^2 - (m^2 + y_0^2)\operatorname{cn}^2 v}},\\
&A_4 = -2iny_0\operatorname{sn} v\operatorname{cn} w_2, \qquad \operatorname{sn}(2h_4, k_4) = -\frac{l}{m}\,\frac{\operatorname{dn} w_2}{\operatorname{cn} w_2}\,\frac{\sqrt{m^2 + y_0^2}\operatorname{cn} v}{k_4\sqrt{D_4}},\\
&\operatorname{sn}(\omega_4^{(1)}, k_4) = \frac{\sqrt{D_4}}{\sqrt{(y_0\operatorname{sn} v + m\operatorname{dn} w_2)^2 - (m^2 + y_0^2)\operatorname{cn}^2 v}}\;\frac{i(1 - \operatorname{cn} u_1)}{\operatorname{sn} u_1},\\
&\operatorname{sn}(\omega_4^{(2)}, k_4) = \frac{\sqrt{D_4}}{\sqrt{(y_0\operatorname{sn} v + m\operatorname{dn} w_2)^2 - (m^2 + y_0^2)\operatorname{cn}^2 v}}\;\frac{i(1 - \operatorname{cn} u_2)}{\operatorname{sn} u_2}.
\end{aligned}\right.$$

Tout comme pour la composante X_y, suivant que nous l'avons alors suffisamment expliqué, ces trois derniers tableaux fournissent encore, par le moyen de la même formule type (135), l'expression définitive en fonction des données de chacune des trois quantités $I^{(p''^2)}$, $I^{(q''^2)}$, $I^{(r''^2)}$, avec lesquelles est ainsi composée celle (139) de la composante actuellement envisagée Z_y, les coefficients $\sqrt{P''}, \sqrt{Q''}, \sqrt{R''}$ de la dite formule, étant semblablement les valeurs positives des expressions connexes (140), et les indices 1 et 2 des divers crochets dans la parenthèse se rapportant cette fois, les premiers à la coordonnée w, les seconds à la coordonnée u, et les troisièmes à la coordonnée v, lesquelles coordonnées w, u, v figurent, précisément à cette fin, sans aucun indice dans les tableaux respectivement correspondants $\overline{P}_y^{(z)}$, $\overline{Q}_y^{(z)}$, $\overline{R}_y^{(z)}$ dont il s'agit.

En résumé, l'expression en question (135) de la quantité type $I^{(\varpi)}$ comprenant huit termes pour chacune de ses quatre lignes, soit au total 32 termes différents, et d'ailleurs chacune des six limites données du corps u_1, u_2; v_1, v_2; w_1, w_2 donnant naissance à une quantité $I^{(\varpi)}$ correspondante, l'expression définitive, réalisée de la façon que nous venons de dire, de chacune des deux composantes X_y ou Z_y sera donc formée, comme on le voit, de $6 \times 32 = 192$ termes tous proportionnels à des fonctions elliptiques dont $\frac{1}{4}$, soit 48, de première espèce, et $\frac{3}{4}$ soit 144 de troisième espèce, lesquels 192 termes sont tous indiqués explicitement, ainsi que leurs coefficients par les formules et les six tableaux $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$ de ce paragraphe.

Concordance de ces résultats avec les formules classiques relatives a l'attraction des ellipsoïdes. — Les calculs que nous avons développé dans le précédent et le présent Chapitre, ainsi que les résultats auxquels ils nous ont conduits, sont trop compliqués pour qu'il nous soit permis d'en négliger un moyen simple de contrôle (à défaut d'une vérification proprement dite) qui s'offre immédiatement à l'esprit, par la comparaison des dits résultats, envisagés pour les données-limites qui réduiraient le Corps attirant à une Ellipsoïde entier, avec les formules classiques

relatives à l'attraction de ce dernier Corps, considérées pour la même situation du point attiré : et cela d'autant mieux que la constatation de cette concordance indispensable est très facile, et n'exigera que des développements très peu étendus.

Or, ces dernières étant de la forme $X = Ax_0$, $Y = By_0$, $Z = Cz_0$, A, B, C tenant lieu des intégrales elliptiques de seconde espèce que l'on sait, nous devrons donc trouver pour les deux Composantes X_y et Z_y relatives à la double hypothèse $x_0 = 0$, $z_0 = 0$ envisagée dans ce Chapitre, les deux valeurs $X_y = 0$ et $Z_y = 0$.

Pour voir, dans cette pensée, ce que deviendront les résultats en question pour le cas-limite que nous venons de dire, il est clair tout d'abord qu'il faudra attribuer à la variation de chacune des deux premières coordonnées u et v auxquelles correspondent comme familles de surfaces deux Hyperboloïdes, toute l'extension dont elle est susceptible par définition, et de même à la troisième coordonnée w, correspondant à la famille d'Ellipsoïdes, toutes les valeurs depuis $-w_0$ jusqu'à $+w_0$, ces deux limites données $\pm w_0$ étant les valeurs de w qui caractérisent précisément les deux moitiés de l'Ellipsoïde envisagé lui-même, séparées par le plan des xy : car, de cette façon seulement, les trois familles de surfaces homo-focales, qui par leur intersection définissent chaque point de l'espace, pourront alors atteindre, en se déformant comme l'explique Lamé (*), tous les points situés à l'intérieur du dit Ellipsoïde.

Ainsi donc, les six limites données qui caractérisent le cas proposé seront :

$$(143) \qquad u_1 = -K, \quad u_2 = +K; \qquad v_1 = -K', \quad v_2 = +K'; \quad w_1 = -w_0, \quad w_2 = +w_0.$$

Cela posé, quant à la première composante X_y représentée par la formule (137), les expressions (138) de ses coefficients $\sqrt{P}, \sqrt{Q}, \sqrt{R}$ montrent que les deux premiers seront nuls, aussi bien pour la limite supérieure que pour la limite inférieure de la coordonnée correspondante (K' étant, d'après nos notations, la première fonc-

(*) Voir notre THÉORIE NOUVELLE DU SYSTÈME ORTHOGONAL TRIPLEMENT ISOTHERME, Tome I, pp. 426-433.

tion complète relative au module k' propre à la coordonnée v), et que le troisième aura exactement la même valeur pour les deux limites de la coordonnée w, du moment que par définition les dits coefficients sont expressément les valeurs *positives* des radicaux en question (*), en sorte que la dite formule se réduira donc simplement dans ce cas à l'expression :

$$(144) \qquad X_y = -fD.\frac{m}{l}\,\text{sn}\,w_0\,\text{dn}\,w_0\left[(I^{(r^2)})_{-w_0} - (I^{(r^2)})_{+w_0}\right].$$

Or, on reconnaît de suite que chacun des deux termes de la différence à l'intérieur des crochets a exactement la même valeur; car, un simple coup d'œil jeté sur le dernier tableau $\overline{R}_y^{(x)}$ (p. 125) relatif à la composante en question X_y fait voir que la coordonnée w, correspondante à la variable r, n'intervient dans toutes les expressions du dit tableau que par des fonctions paires de cette coordonnée : d'où il suit que les deux termes $(I^{(r^2)})_{-w_0}$ et $(I^{(r^2)})_{+w_0}$, fournis l'un et l'autre par l'expression (135) de $I^{(\varpi)}$ pour $\varpi = r^2 = -n^2\,\text{cn}^2\,w$, mais à la condition de prendre dans l'un $w = -w_0$ et dans l'autre $w = +w_0$, coïncideront exactement, en sorte que leur différence, et par conséquent l'expression précédente (144) de X_y sera bien nulle, ainsi qu'il le fallait.

Semblablement, quant à l'autre composante Z_y représentée par la formule (139), les expressions (140) de ses coefficients $\sqrt{P''}$, $\sqrt{Q''}$, $\sqrt{R''}$ montrent que le second sera nul pour les deux limites de la coordonnée u; et de plus, si l'on observe que la définition du module k' propre à la coordonnée v, savoir $k'^2 = \frac{m^2}{-l^2}$, donnera

$$\begin{aligned} ilm\,\text{sn}\,(K', k')\,\text{dn}\,(K', k') &= ilm\sqrt{1-k'^2} = ilm\sqrt{1+\frac{m^2}{l^2}} \\ &= im\sqrt{l^2+m^2} = im\sqrt{-n^2} = im\,.\,in = -mn, \end{aligned}$$

(*) IBID. Tome I, p. 491, *en haut.*

on voit donc, en se rappelant que les coefficients en question sont par définition les valeurs positives des radicaux envisagés, que l'expression précitée de la composante Z_y sera dans le cas actuel

$$(145)\quad \left\{ \begin{aligned} Z_y &= \frac{-fD}{n.im}\left(mn \operatorname{cn} w_0 \operatorname{dn} w_0 \left[I^{(p''2)}\right]_2^1 + mn \left[I^{(r''2)}\right]_2^1\right) \\ &= ifD\,[\operatorname{cn} w_0 \operatorname{dn} w_0 \} (I^{(p''2)})_{-w_0} - (I^{(p''2)})_{+w_0} \{ \\ &\qquad + \} (I^{(r''2)})_{-K'} - (I^{(r''2)})_{+K'} \{]. \end{aligned} \right.$$

Or, tout comme pour la Composante X_y, mais par d'autres raisons toutes fois, on reconnait de suite que, pour chacune des deux accolades à l'intérieur des crochets, les deux termes de la différence qui la constitue ont exactement la même valeur et par conséquent se détruisent.

En effet, quant à la première, le premier tableau $\overline{P}_y^{(2)}$ relatif à la Composante en question Z_y(p. 131), fait voir de nouveau que, à l'exception des expressions des quatre quantités sn $(2h, k)$ (en faisant abstraction de l'indice inférieur commun à h et k), lesquelles sont cette fois proportionnelles à sn w, la coordonnée w, correspondante à la variable p'', n'interviendra encore dans toutes les autres expressions du dit tableau que par des fonctions paires de cette coordonnée; mais, comme les quatre paramètres h auxquels se rapportent les expressions précitées sont en réalité définis, ainsi que nous l'avons dit, par la formule générale

$$\operatorname{sn}(h, k) = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cn}(2h, k)}{1 + \operatorname{dn}(2h, k)}},$$

les valeurs de cn $(2h, k)$ et dn $(2h, k)$ étant alors des fonctions paires de la dite coordonnée w, on voit donc que les arguments h en question seront, dans ces conditions, exprimés eux aussi par des fonctions paires de cette coordonnée w : d'où il suit que, tout comme dans le cas précédent, les deux termes envisagés $(I^{(p''2)})_{-w_0}$ et $(I^{(p''2)})_{+w_0}$ auront de nouveau exactement la même valeur, en sorte que leur différence, c'est-à-dire la première accolade, sera encore nulle.

Pour la seconde, on arrivera encore à la même conclusion, mais par cette autre raison que les deux termes qui la constituent sont cette fois séparément nuls.

En effet, en jetant les yeux sur le dernier tableau $\overline{R}_y^{(2)}$ (p. 134), qui correspond à la quantité $I^{(r''_2)}$, on aperçoit de suite que, quant aux deux premiers groupe (I) et (II) de ce tableau, les deux valeurs de sn $(\omega^{(1)}, h)$ et sn $(\omega^{(2)}, k)$ (en faisant encore abstraction de l'indice inférieur 1 ou 2 commun à ω et k) sont égales entre elles, pour chaque groupe séparément, dans l'hypothèse actuelle (143) de $w_1 = - w_2$: et comme on pourra prendre dès lors pour chacune $\omega^{(2)} = \omega^{(1)}$, il en résultera dès lors immédiatement, eu égard à l'expression générale (135) de $I^{(\varpi)}$, que, pour la quantité $I^{(r''_2)}$, les deux premières lignes correspondantes de la dite expression seront séparément nulles, puisque chaque terme des dites lignes aura la même valeur pour les deux limites $\omega^{(1)}$ et $\omega^{(2)}$ indiindiquées par les crochets. — Et de même, quant aux deux autres groupes (II) et (III) du même tableau, si l'on observe qu'ils ne diffèrent l'un de l'autre que par le changement de w_1 en w_2, et que la dite coordonnée w_1 ou w_2 n'y entre d'ailleurs que par des fonctions paires, on en conclura donc, toujours à vue de la même expression (135) de $I^{(\varpi)}$, que quant à la même quantité $I^{(r''_2)}$, les deux dernières lignes correspondantes seront égales entre elles, terme à terme (mais pas nulles cette fois), et par conséquent se détruisent en raison de leur signes contraires. — D'où il suit, en résumé, que les deux quantités $(I^{(r''_2)})_{-K'}$ et $(I^{(r''_2)})_{+K'}$, seront bien nulles séparément, comme nous l'avions annoncé, et par conséquent aussi, en définitive, l'expression ci-dessous (145) de la Composante Z_y envisagée : ce qui établit, comme on le demandait, l'exacte concordance nécessaire *a priori*, des résultats en question avec les formules classiques de l'Attraction des Ellipsoïdes.

APPENDICE

NOTE II

Sur quelques formules intéressantes déduites de la formule d'addition des paramètres relative a la Fonction Elliptique de troisième espèce.

Nous nous sommes trouvés, au cours du Chapitre III, dans la nécessité de faire appel à une formule déduite, à titre de cas particulier, de la formule d'addition des paramètres relative à la Fonction Elliptique de troisième espèce [formule (126), p. 95], et nous avons ainsi contracté l'obligation d'en apporter la démonstration explicite avant de clore le présent Ouvrage. Mais, comme les mêmes procédés qu'il faut mettre en œuvre pour cette démonstration fournissent également, exactement de la même façon, celle de cinq autres formules analogues dont quelques-unes nous seront utiles dans les Notes suivantes de cet Appendice, nous allons, dans la présente, développer cette démonstration à la fois pour les six formules connexes, dont le rapprochement d'une part, et une combinaison des plus simples d'autre part, nous fourniront ensuite, sans autre calcul, deux nouveaux résultats relatifs à la Fonction Elliptique de troisième espèce qui, comme ceux de la Note précédente, valent encore, croyons-nous, la peine d'être signalés.

Partons donc, à cet effet, de la formule connue relative à l'addition des paramètres p et q de la fonction Π, savoir (*)

(*) Briot et Bouquet, *Théorie des Fonctions Elliptiques*, Livre VII, Chap. II, § 327, formules (33), p. 515

$$(1)\qquad \Pi(\omega, p+q) = \Pi(\omega, p) + \Pi(\omega, q) - k^2 \operatorname{sn} p \operatorname{sn} q \operatorname{sn}(p+q) . \omega + \frac{1}{4}\log\frac{LM}{PQ}$$

dans laquelle L, M, P et Q sont les quantités

$$(2)\quad \begin{cases} L = 1 - k^2\operatorname{sn}^2(\omega - p)\operatorname{sn}^2 q, & M = 1 - k^2\operatorname{sn}^2(\omega - q)\operatorname{sn}^2 p, \\ P = 1 - k^2\operatorname{sn}^2(\omega + p)\operatorname{sn}^2 q, & Q = 1 - k^2\operatorname{sn}^2(\omega + q)\operatorname{sn}^2 p, \end{cases}$$

et considérons en même temps la formule analogue relative à l'addition des arguments ω et q, savoir (*)

$$\Pi(\omega + q, p) = \Pi(\omega, p) + \Pi(q, p) + \frac{1}{4}\log\frac{LN}{PR},$$

dans laquelle L et P désignant toujours les mêmes quantités que nous venons d'écrire, N et R sont de même les suivantes

$$(3)\qquad N = 1 - k^2\operatorname{sn}^2(q - p)\operatorname{sn}^2\omega, \qquad R = 1 - k^2\operatorname{sn}^2(q + p)\operatorname{sn}^2\omega,$$

et qui nous permettra, en ajoutant et retranchant dans la formule (1) la somme des deux termes $\Pi(q, p) + \frac{1}{4}\log\frac{N}{R}$ de manière à l'écrire ainsi

$$\Pi(\omega, p+q) = \left[\Pi(\omega, p) + \Pi(q, p) + \frac{1}{4}\log\frac{L}{P} + \frac{1}{4}\log\frac{N}{R}\right] - \Pi(q, p) - \frac{1}{4}\log\frac{N}{R}$$
$$- k^2 \operatorname{sn} p \operatorname{sn} q \operatorname{sn}(p+q) . \omega + \frac{1}{4}\log\frac{M}{Q},$$

de la présenter par conséquent sous la forme :

$$(4)\quad \begin{cases} \Pi(\omega, p+q) = \Pi(\omega + q, p) - k^2 \operatorname{sn} p \operatorname{sn} q \operatorname{sn}(p+q) . \omega \\ \qquad\qquad + \Pi(\omega, q) - \Pi(q, p) + \frac{1}{4}\log\frac{M}{Q} - \frac{1}{4}\log\frac{N}{R}. \end{cases}$$

(*) Ibid., § 326, formule (31), p. 514.

Cela posé, nous examinerons alors *parallèlement* ce que deviennent ces deux formules (1) et (4) dans les trois hypothèses connexes où la somme $p+q$ reçoit les trois valeurs analogues

$$p+q=h+K, \qquad b.)\ \ p+q=h+K+iK', \qquad c.)\ \ p+q=h+iK',$$

lesquelles hypothèses seront en outre caractérisées, comme on va le voir, par cette circonstance commune que dans ces deux développements la fonction $\Pi(\omega, q)$ disparaîtra, ainsi que les deux termes $\log\frac{M}{Q}$ et $\log\frac{N}{R}$.

a.) Faisant donc d'abord $p = h$ et $q = K$, la valeur $\operatorname{cn} q = \operatorname{cn} K = 0$ entraînera d'une part $\Pi(\omega, q) = 0$ quel que soit ω, en vertu de la définition même de la fonction Π. — D'autre part, les deux premiers facteurs L et P (2) de la fraction soumise au signe logarithme se réduisant séparément à l'une ou à l'autre des quantités

$$1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\omega \mp h) \operatorname{sn}^2 K = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\omega \mp h) = \operatorname{dn}^2(\omega \mp h),$$

les deux suivants M et Q se réduiront l'un et l'autre à la quantité

$$1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\omega \mp K) \operatorname{sn}^2 h = 1 - k^2 \frac{\operatorname{cn}^2 \omega}{\operatorname{dn}^2 \omega} \operatorname{sn}^2 h,$$

et de même les deux autres N et R (3) à la suivante

$$1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \omega \operatorname{sn}^2(K \mp h) = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \omega \cdot \frac{\operatorname{cn}^2 h}{\operatorname{dn}^2 h},$$

en sorte qu'on aura à la fois $\frac{M}{Q} = 1$ et $\frac{N}{R} = 1$; et enfin le terme proportionnel à ω aura pour valeur

$$-k^2 \operatorname{sn} p \operatorname{sn} q \operatorname{sn}(p+q) \,.\, \omega = -k^2 \operatorname{sn} h \operatorname{sn} K \operatorname{sn}(h+K) \,.\, \omega$$
$$= -k^2 \operatorname{sn} h \frac{\operatorname{cn} h}{\operatorname{dn} h} \cdot \omega.$$

D'où il résulte qu'en désignant encore, comme dans la Note précédente, par $\Pi(h)$ et $\Pi'(h)$ les deux fonctions complètes de la fonction $\Pi(\omega, h)$, c'est-à-dire les quantités définies par l'équation

$$(5) \qquad \Pi(K + iK', h) = \Pi(h) + i\Pi'(h),$$

les deux développements en question (1) et (4) seront dans ce cas les suivants

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Pi(\omega, h+K) = \Pi(\omega, h) - k^2 \frac{\operatorname{sn} h \operatorname{cn} h}{\operatorname{dn} h} \omega + \frac{1}{4} \log \frac{\operatorname{dn}^2(\omega - h)}{\operatorname{dn}^2(\omega + h)}, \\ &\Pi(\omega, h+K) = \Pi(\omega + K, h) - k^2 \frac{\operatorname{sn} h \operatorname{cn} h}{\operatorname{dn} h} \omega - \Pi(h). \end{aligned} \right.$$

b.) Faisant pour ce second cas $p = h$ et $q = K + iK'$, d'une part, la valeur $\operatorname{dn} q = \operatorname{dn}(K + iK') = 0$ entraînera de même $\Pi(\omega, q) = 0$ quelque soit ω, et d'autre part les deux premiers facteurs L et P (2) devenant cette fois séparément l'une ou l'autre des quantités

$$1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\omega \mp h) \operatorname{sn}^2(K + iK') = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\omega \mp h) \cdot \frac{1}{k^2} = \operatorname{cn}^2(\omega \mp h),$$

les deux suivants M et Q se réduiront encore simultanément à celle-ci

$$1 - k^2 \operatorname{sn}^2[\omega \mp (K + iK')] \operatorname{sn}^2 h = 1 - k^2 \cdot \frac{\operatorname{dn}^2 \omega}{k^2 \operatorname{cn}^2 \omega} \cdot \operatorname{sn}^2 h,$$

et de même encore les deux autres N et R à la suivante

$$1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \omega \operatorname{sn}^2(K + iK' \mp h) = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \omega \cdot \frac{\operatorname{dn}^2 h}{k^2 \operatorname{cn}^2 h},$$

de manière qu'on aura de nouveau $\frac{M}{Q} = 1$ et $\frac{N}{R} = 1$; et enfin le terme proportionnel à ω des deux développements se réduisant dans cette hypothèse à la valeur

$$\operatorname{sn} h \operatorname{sn}(K+iK')\operatorname{sn}(h+K+iK').\omega = -k^2 \operatorname{sn} h\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{\operatorname{dn} h}{k\operatorname{cn} h}\cdot\omega = -\frac{\operatorname{sn} h \operatorname{dn} h}{\operatorname{cn} h}\omega,$$

il résulte donc de ces différentes circonstances que les deux formules en question (1) et (4) deviendront pour ce cas les suivantes

$$\left\{\begin{aligned} &\Pi(\omega, h+K+iK') = \Pi(\omega, h) - \frac{\operatorname{sn} h \operatorname{dn} h}{\operatorname{cn} h}\omega + \frac{1}{4}\log\frac{\operatorname{cn}^2(\omega-h)}{\operatorname{cn}^2(\omega+h)},\\ &\Pi(\omega, h+K+iK') = \Pi(\omega+K+iK', h) - \frac{\operatorname{sn} h \operatorname{dn} h}{\operatorname{cn} h}\omega - [\Pi(h)+i\Pi'(h)].\end{aligned}\right.$$

c.) Faisant enfin pour ce dernier cas $p = h - K$ et $q = K + iK'$, l'on aura donc de nouveau, comme tout à l'heure, $\Pi(\omega, q) = 0$ quel que soit ω, et les facteurs L et P seront alors respectivement chacune des deux quantités

$$= 1 - k^2 \operatorname{sn}[\omega \mp (h-K)] \operatorname{sn}^2(K+iK') = 1 - k^2\cdot\frac{\operatorname{cn}^2(\omega\mp h)}{\operatorname{dn}^2(\omega\mp h)}\cdot\frac{1}{k^2}$$

$$= \frac{\operatorname{dn}^2(\omega\mp h) - \operatorname{cn}^2(\omega\mp h)}{\operatorname{dn}^2(\omega\mp h)} = \frac{[1-k^2\operatorname{sn}^2(\omega\mp h) - [1-\operatorname{sn}^2(\omega\mp h)]}{\operatorname{dn}^2(\omega\mp h)} = \frac{k'^2\operatorname{sn}^2(\omega\mp h)}{\operatorname{dn}^2(\omega\mp h)},$$

en sorte que l'on aura pour leur rapport

$$\frac{L}{P} = \frac{\dfrac{k'^2\operatorname{sn}^2(\omega-h)}{\operatorname{dn}^2(\omega-h)}}{\dfrac{k'^2\operatorname{sn}^2(\omega+h)}{\operatorname{dn}^2(\omega+h)}} = \frac{\operatorname{sn}^2(\omega-h)\operatorname{dn}^2(\omega+h)}{\operatorname{sn}^2(\omega+h)\operatorname{dn}^2(\omega-h)},$$

pendant que les deux suivants M et Q se réduiront de nouveau simultanément à la quantité

$$1 - k^2\operatorname{sn}^2[\omega\mp(K+iK')]\operatorname{sn}^2(h-K) = 1 - k^2\cdot\frac{\operatorname{dn}^2\omega}{k^2\operatorname{cn}^2\omega}\cdot\frac{\operatorname{cn}^2 h}{\operatorname{dn}^2 h},$$

et les deux autres N et R semblablement à cette autre quantité

$$1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \omega \operatorname{sn}^2 [(K + iK') \mp (h - K)] = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \omega \operatorname{sn}^2 [(h - K) \mp (K + iK')]$$
$$= 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \omega \operatorname{sn}^2 (h \mp iK') = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \omega \cdot \frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 h},$$

de manière que l'on aura cette fois encore $\frac{M}{Q} = 1$ et $\frac{N}{R} = 1$.

D'ailleurs, le terme proportionnel à ω des développements envisagés (1) et (4) étant en même temps pour lesdites valeurs de p et q,

$$- k^2 \operatorname{sn}(h - K) \operatorname{sn}(K + iK') \operatorname{sn}(h + iK') . \omega = - k^2 \frac{-\operatorname{cn} h}{\operatorname{dn} h} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k \operatorname{sn} h} \cdot \omega = \frac{\operatorname{cn} h}{\operatorname{dn} h \operatorname{sn} h}$$

les deux formules en question donneront donc tout d'abord les développements

$$(8) \begin{cases} \Pi(\omega, h + iK') = \Pi(\omega, h - K) + \dfrac{\operatorname{cn} h}{\operatorname{dn} h \operatorname{sn} h} \omega + \dfrac{1}{4} \log \dfrac{\operatorname{sn}^2(\omega - h) \operatorname{dn}^2(\omega + h)}{\operatorname{sn}^2(\omega + h) \operatorname{dn}^2(\omega - h)}, \\ \Pi(\omega, h + iK') = \Pi(\omega + K + iK', h - K) + \dfrac{\operatorname{cn} h}{\operatorname{dn} h \operatorname{sn} h} \omega - \Pi(K + iK', h - K), \end{cases}$$

dont le premier terme de l'un et le dernier terme de l'autre auront pour valeurs, d'abord en vertu de la seconde égalité (2) de la Note I précédente, puis de la première des formules obtenues tout à l'heure (6),

$$(9) \begin{cases} \Pi(\omega, h - K) = \Pi[\omega, (h + K) - 2K] = \Pi(\omega, h + K) \\ \qquad = \Pi(\omega, h) - k^2 \dfrac{\operatorname{sn} h \operatorname{cn} h}{\operatorname{dn} h} \omega + \dfrac{1}{4} \log \dfrac{\operatorname{dn}^2(\omega - h)}{\operatorname{dn}^2(\omega + h)}, \end{cases}$$

$$(10) \begin{cases} \Pi(K + iK', h - K) = \Pi[K + iK', (h + K) - 2K] = \Pi(K + iK', h + K) \\ \qquad = \Pi(K + iK', h) - k^2 \dfrac{\operatorname{sn} h \operatorname{cn} h}{\operatorname{dn} h} (K + iK'). \end{cases}$$

Quant au premier terme du second développement (8), nous le développerons lui-même à l'aide des mêmes procédés qui nous ont conduit déjà à la seconde formule (6), c'est-à-dire en partant encore de la même formule générale (4), mais pour y faire cette fois $p = h$ et $q = -K$, en y écrivant en même temps $\omega + K + iK'$ à la place de ω. Avec ces nouvelles valeurs le terme $\Pi(\omega, q)$ disparaissant toujours à cause de la valeur $\text{cn}\, q = \text{cn}\, K = 0$, les deux facteurs M et Q se réduiront de nouveau à la même quantité

$$1 - k^2\text{sn}^2[(\omega + K + iK') \mp (-K)]\,\text{sn}^2 h = 1 - k^2\text{sn}^2(\omega + iK')\,\text{sn}^2 h = 1 - \frac{\text{sn}^2 h}{\text{sn}^2 \omega},$$

et de même les deux autres N et R à la suivante

$$1 - k^2\,\text{sn}^2(\omega + K + iK')\,\text{sn}^2(-K \mp h) = 1 - k^2.\,\frac{\text{dn}^2 \omega}{k^2\text{cn}^2\omega}\,\frac{\text{cn}^2 h}{\text{dn}^2 h},$$

de sorte que l'on aura toujours $\frac{M}{Q} = 1$ et $\frac{N}{R} = 1$.

D'ailleurs, le terme proportionnel à ω de la formule en question (4) devenant avec nos hypothèses actuelles

$$-k^2\,\text{sn}\, h\,\text{sn}\,(-K)\,\text{sn}\,(h - K).(\omega + K + iK') = k^2\text{sn}\, h\,\frac{-\text{cn}\, h}{\text{dn}\, h}(\omega + K + iK'),$$

il résulte de ces diverses circonstances que nous aurons ainsi l'expression :

$$\begin{aligned}\Pi(\omega + K + iK', h - K) &= \Pi[\omega + K + iK') - K, h] \\ &\quad - k^2\text{sn}\, h\,\frac{-\text{cn}\, h}{\text{dn}\, h}(\omega + K + iK') - \Pi(-K, h) \\ &= \Pi(\omega + iK', h) - k^2\frac{\text{sn}\, h\,\text{cn}\, h}{\text{dn}\, h}(\omega + K + iK') + \Pi(h).\end{aligned}$$

En la reportant dès lors, ainsi que les deux dernières (9) et (10) dans les derniers membres des égalités (8), nous obtiendrons donc

ainsi, pour les deux expressions que nous nous proposons de calculer, les développements suivants

$$\Pi(\omega, h+i\mathrm{K}')=\left[\Pi(\omega, h)-k^2\frac{\operatorname{sn} h \operatorname{cn} h}{\operatorname{dn} h}\omega+\frac{1}{4}\log\frac{\operatorname{dn}^2(\omega-h)}{\operatorname{dn}^2(\omega+h)}\right]$$

$$+\frac{\operatorname{cn} h}{\operatorname{dn} h \operatorname{sn} h}\omega+\frac{1}{4}\log\frac{\operatorname{sn}^2(\omega-h)\operatorname{dn}^2(\omega+h)}{\operatorname{sn}^2(\omega+h)\operatorname{dn}^2(\omega-h)}$$

$$=\Pi(\omega, h)+\frac{\operatorname{cn} h}{\operatorname{dn} h \operatorname{sn} h}(1-k^2\operatorname{sn}^2 h)\omega+\frac{1}{4}\log\frac{\operatorname{dn}^2(\omega-h)}{\operatorname{dn}^2(\omega+h)}$$

$$+\frac{1}{4}\log\frac{\operatorname{sn}^2(\omega-h)}{\operatorname{sn}^2(\omega+h)}-\frac{1}{4}\log\frac{\operatorname{dn}^2(\omega-h)}{\operatorname{dn}^2(\omega+h)},$$

$$\Pi(\omega, h+i\mathrm{K}')=\left[\Pi(\omega+i\mathrm{K}', h)-k^2\frac{\operatorname{sn} h \operatorname{cn} h}{\operatorname{dn} h}(\omega+\mathrm{K}+i\mathrm{K}')+\Pi(h)\right]$$

$$+\frac{\operatorname{cn} h}{\operatorname{sn} h \operatorname{dn} h}\omega-\left[\Pi(\mathrm{K}+i\mathrm{K}', h)-k^2\frac{\operatorname{sn} h \operatorname{cn} h}{\operatorname{dn} h}(\mathrm{K}+i\mathrm{K}')\right]$$

$$=\Pi(\omega+i\mathrm{K}', h)+\frac{\operatorname{cn} h}{\operatorname{sn} h \operatorname{dn} h}(1-k^2\operatorname{sn}^2 h)\,\omega+\Pi(h)-[\Pi(h)+i\Pi'(h)],$$

c'est-à-dire définitivement les deux formules, analogues respectivement aux précédentes :

$$(11)\begin{cases}\Pi(\omega, h+i\mathrm{K}')=\Pi(\omega, h)+\dfrac{\operatorname{cn} h \operatorname{dn} h}{\operatorname{sn} h}\omega+\dfrac{1}{4}\log\dfrac{\operatorname{sn}^2(\omega-h)}{\operatorname{sn}^2(\omega+h)},\\[2ex] \Pi(\omega, h+i\mathrm{K}')=\Pi(\omega+i\mathrm{K}', h)+\dfrac{\operatorname{cn} h \operatorname{dn} h}{\operatorname{sn} h}\omega-i\Pi'(h).\end{cases}$$

Cela fait, en rapprochant séparément les premières égalités (6), (7), et (11), nous obtiendrons ainsi le premier groupe de formules semblables

$$(12)\begin{cases}\Pi(\omega, h+\mathrm{K})=\Pi(\omega, h)-k^2\dfrac{\operatorname{sn} h \operatorname{cn} h}{\operatorname{dn} h}\omega+\dfrac{1}{4}\log\dfrac{\operatorname{dn}^2(\omega-h)}{\operatorname{dn}^2(\omega+h)},\\[2ex] \Pi(\omega, h+\mathrm{K}+i\mathrm{K}')=\Pi(\omega, h)-\dfrac{\operatorname{sn} h \operatorname{dn} h}{\operatorname{cn} h}\omega+\dfrac{1}{4}\log\dfrac{\operatorname{cn}^2(\omega-h)}{\operatorname{cn}^2(\omega+h)},\\[2ex] \Pi(\omega, h+i\mathrm{K}')=\Pi(\omega, h)+\dfrac{\operatorname{cn} h \operatorname{dn} h}{\operatorname{sn} h}\omega+\dfrac{1}{4}\log\dfrac{\operatorname{sn}^2(\omega-h)}{\operatorname{sn}^2(\omega+h)},\end{cases}$$

dont le caractère analytique propre consiste en ce que les développements qui forment leurs seconds membres sont tous les trois compris dans le type

$$(13)\qquad \Pi(\omega, h) + \frac{d}{dh}\log\varphi(h).\,\omega + \frac{1}{4}\log\left(\frac{\varphi(\omega-h)}{\varphi(\omega+h)}\right)^2,$$

en y prenant pour la fonction φ successivement les trois fonctions elliptiques de première espèce dn, cn, sn.

De même, en rapprochant séparément les secondes égalités des trois mêmes groupes que tout à l'heure, nous obtiendrons encore le second groupe de formules semblables

$$\left\{\begin{aligned} \Pi(\omega, h+\mathrm{K}) &= \Pi(\omega+\mathrm{K}, h) - k^2\frac{\operatorname{sn} h \operatorname{cn} h}{\operatorname{dn} h}\omega - \Pi(h),\\ \Pi(\omega, h+\mathrm{K}+i\mathrm{K}') &= \Pi(\omega+\mathrm{K}+i\mathrm{K}', h) - \frac{\operatorname{sn} h \operatorname{dn} h}{\operatorname{cn} h}\omega - [\Pi(h)+i\Pi'(h)],\\ \Pi(\omega, h+i\mathrm{K}') &= \Pi(\omega+i\mathrm{K}', h) + \frac{\operatorname{cn} h \operatorname{dn} h}{\operatorname{sn} h}\omega - i\Pi'(h), \end{aligned}\right.$$

formules dont nous ferons mieux ressortir le caractère analytique propre en les écrivant ainsi, par interversion des deux membres,

$$(14)\left\{\begin{aligned} \Pi(\omega+\mathrm{K}, h) - \Pi(\omega, h+\mathrm{K}) &= \Pi(h) + k^2\frac{\operatorname{sn} h \operatorname{cn} h}{\operatorname{dn} h}\omega,\\ \Pi(\omega+\mathrm{K}+i\mathrm{K}', h) - \Pi(\omega, h+\mathrm{K}+i\mathrm{K}') &= [\Pi(h)+i\Pi'(h)] + \frac{\operatorname{sn} h \operatorname{dn} h}{\operatorname{cn} h}\omega,\\ \Pi(\omega+i\mathrm{K}', h) - \Pi(\omega, h+i\mathrm{K}') &= i\Pi'(h) - \frac{\operatorname{cn} h \operatorname{dn} h}{\operatorname{sn} h}\omega, \end{aligned}\right.$$

parce que leurs premiers membres présenteront alors, avec celui de la formule dite *l'échange de l'argument et du paramètre*, une sorte d'analogie consistant en ce que le même augment constant (nous voulons dire fonction du module seul) K, $\mathrm{K}+i\mathrm{K}'$, ou $i\mathrm{K}'$ se trouve transporté, dans chacune de ces différences, de l'argument au paramètre.

Enfin, en ajoutant membre à membre la première et la troisième de ces dernières formules et retranchant la seconde, nous obtiendrons immédiatement la formule remarquable

$$(15)\quad \begin{cases} [\Pi(\omega+K,h)-\Pi(\omega,h+K)]-[\Pi(\omega+K+iK',h)-\Pi(\omega,h+K+iK')] \\ \qquad +[\Pi(\omega+iK',h)-\Pi(\omega,h+iK')]=-\dfrac{\mathrm{dn}^2 h-\mathrm{sn}^2 h\,\mathrm{cn}^2 h}{\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{cn}\,h\,\mathrm{dn}\,h}\,\omega \end{cases}$$

laquelle offre cette singularité de ne renfermer, avec des fonctions elliptiques de troisième espèce, qu'un terme proportionnel à l'argument seulement : résultat qui n'est réalisé dans aucun cas par la formule générale d'addition envisagée seule, laquelle contient en général un terme logarithmique, et dans les cas particuliers où ce terme vient à disparaître, tout au moins alors les fonctions complètes de troisième espèce du paramètre.

Ce dernier fait, et celui relevé tout à l'heure à propos du type (13) des seconds membres du premier groupe (12), ne sont réalisés, à notre connaissance, par aucune autre formule relative aux fonctions de troisième espèce : c'est pourquoi l'on trouvera sans doute que lesdites formules méritaient à ce titre d'être signalées.

NOTE III

Sur trois formules remarquables résultant de l'application de la transformation de Landen a la Fonction Elliptique de troisième espèce.

De toutes les transformations rationnelles du second ordre que l'on peut appliquer aux fonctions elliptiques, la plus ancienne et la plus connue, parce qu'elle ressort d'une démonstration très simple, soit géométrique, soit analytique, et qu'elle a ouvert la voie et suggéré, en quelque sorte, le problème général de la transformation, est sans contredit la célèbre transformation, dite *de Landen,* que l'on trouve rapportée dans tous les traités d'Analyse, mais quant aux fonctions elliptiques de première espèce seulement. Or, cette même transformation (nous voulons dire ici la même relation entre l'ancien et le nouveau module) conduit, quant à la Fonction Elliptique de troisième espèce, à des résultats non moins simples, et non moins dignes de remarque, dont nous voudrions démontrer les principaux dans cette Note, parce qu'ils nous sont nécessaires pour une question importante dont nous avons indiqué les grandes lignes au cours de notre Chapitre III (pp. 99 et 101, et dont le Lecteur trouvera les calculs complètement développés dans la Note V subséquente de cet Appendice.

A cette fin, nous réunirons dans l'énoncé du premier Théorème suivant, à la fois les résultats classiques susmentionnés, et l'un de ceux que nous voulons signaler dans cette Note à l'attention du Lecteur :

THÉORÈME I. — « *Si l'on suppose les deux modules k et k_0 liés*
» *ensemble par l'une ou l'autre des relations équivalentes*

$$(1) \qquad k_0 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k} \qquad \text{ou} \qquad k = \frac{(1+k_0')^2}{k_0^2},$$

» *qui caractérisent la transformation dite de* LANDEN, *on aura,*
» *d'une part, quant aux fonctions elliptiques de première espèce,*
» *les deux formules inverses de transformation*

$$(2) \begin{cases} \operatorname{sn}(w_0, k_0) = \dfrac{(1+k)\operatorname{sn}\left(\dfrac{w_0}{1+k}, k\right)}{1 + k\operatorname{sn}^2\left(\dfrac{w_0}{1+k}, k\right)}, \\ \text{» ou} \\ \operatorname{sn}\left(\dfrac{w_0}{1+k}, k\right) = \dfrac{1 \pm \operatorname{dn}(w_0, k_0)}{(1+k_0')\operatorname{sn}(w_0, k_0)}, \end{cases}$$

» *et d'autre part, quant aux fonctions de troisième espèce, la formule*

$$(3) \qquad \Pi(w_0, h_0, k_0) = \Pi\left(\frac{w_0}{1+k}, h_1, k\right) + \Pi\left(\frac{w_0}{1+k}, h_2, k\right),$$

» *dans laquelle les deux nouveaux paramètres h_1 et h_2, qui repré-*
» *sentent deux quantités imaginaires conjuguées, lorsque le module*
» *donné k_0 est supposé canonique et le paramètre donné h_0*
» *supposé réel, sont respectivement définis par les équations*

$$(4) \begin{cases} \operatorname{sn}(h_1, k) = \dfrac{k_0}{1+k_0'}[\operatorname{sn}(h_0, k_0) + i\operatorname{cn}(h_0, k_0)], \\ \operatorname{sn}(h_2, k) = \dfrac{k_0}{1+k_0'}[\operatorname{sn}(h_0, k_0) - i\operatorname{cn}(h_0, k_0)], \end{cases}$$

» *lesquelles donnent manifestement*

$$(5) \qquad \operatorname{sn}(h_1, k)\operatorname{sn}(h_2, k) = \frac{1}{k},$$

» *en sorte que ces deux paramètres peuvent, dans la question, être*
» *considérés comme liés par la relation :* »

(6) $$h_2 - h_1 = i\mathrm{K}'.$$

Pour établir ces divers résultats, nous commencerons, pour plus de commodité, par rappeler la démonstration la plus simple des formules classiques (2), démonstration qui nous fournira les éléments, et nous servira de guide, pour celle de la nouvelle formule suivante (3)-(4).

Faisant donc, dans ce but,

(7) $$\operatorname{sn}(\omega_0, k_0) = y \qquad \text{ou} \qquad d\omega_0 = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k_0^2 y^2)}},$$

si l'on cherche ce que devient cette différentielle $d\omega_0$ par la transformation rationnelle du second ordre

(8) $$y = \frac{(1+k)x}{1+kx^2},$$

ce changement de variables donnant successivement, en tenant compte de la première relation (1) admise entre les modules

$$\left\{\begin{aligned}
1 - y^2 &= \frac{1}{(1+kx^2)^2}\left[(1+kx^2)^2 - (1+k)^2x^2\right] \\
&= \frac{1}{(1+kx^2)^2}\left[(1+2kx^2+k^2x^4) - (1+2k+k^2)x^2\right] = \frac{(1-x^2)(1-k^2x^2)}{(1+kx^2)^2}, \\
1 - k_0^2 y^2 &= 1 - \frac{4k}{(1+k)^2}\frac{(1+k)^2x^2}{(1+kx^2)^2} = \frac{(1+kx^2)^2 - 4kx^2}{(1+kx^2)^2} = \frac{(1-kx^2)^2}{(1+kx^2)^2}, \\
\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k_0^2y^2} &= \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1+kx^2}\,\frac{1-kx^2}{1+kx^2}, \\
dy &= (1+k)\frac{(1+kx^2) - x.2kx}{(1+kx^2)^2}dx = (1+k)\frac{1-kx^2}{(1+kx^2)^2}dx, \\
\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k_0^2y^2)}} &= \frac{(1+k)\dfrac{1-kx^2}{(1+kx^2)^2}dx}{\dfrac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1+kx^2}\,\dfrac{1-kx^2}{1+kx^2}} = \frac{(1+k)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},
\end{aligned}\right.$$

l'on voit ainsi que la différentielle elliptique $d\omega_0$ (7) est susceptible des deux formes, normales l'une et l'autre,

$$(9) \qquad d\omega_0 = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k_0^2y^2)}} = \frac{(1+k)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

qui donneront simultanément, x s'annulant en même temps que y et par conséquent que ω_0, d'après les définitions (7) et (8) des variables y et x,

$$(10) \qquad y = \operatorname{sn}(\omega_0, k_0), \qquad\qquad x = \operatorname{sn}\left(\frac{\omega_0}{1+k}, k\right),$$

valeurs qui, étant remises dans la dite définition (8), procureront dès lors, en premier lieu, la formule :

$$(11) \qquad \operatorname{sn}(\omega_0, k_0) = \frac{(1+k)\operatorname{sn}\left(\frac{\omega_0}{1+k}, k\right)}{1 + k\operatorname{sn}^2\left(\frac{\omega_0}{1+k}, k\right)}.$$

D'autre part, la même équation de définition (8) devenant, si l'on en chasse le dénominateur, et qu'on ait égard ensuite à la première relation (1) admise entre les modules,

$$0 = y(1+kx^2) - (1+k)x = ky.x^2 - (1+k)x + y$$
$$= y\left[(x\sqrt{k})^2 - \frac{2}{y}\frac{1+k}{2\sqrt{k}}(x\sqrt{k}) + 1\right]$$
$$= y\left[(x\sqrt{k})^2 - \frac{2}{k_0 y}(x\sqrt{k}) + 1\right],$$

donnera donc, étant résolue par rapport à $x\sqrt{k}$, la valeur

$$(12) \qquad x\sqrt{k} = \frac{1}{k_0 y} \pm \sqrt{\frac{1}{k_0^2y^2} - 1} = \frac{1}{k_0 y}\left[1 \pm \sqrt{1-k_0^2y^2}\right],$$

égalité d'où l'on tirera par conséquent, en ayant égard cette fois aux expressions (10) des variables x et y, ainsi qu'à la seconde relation (1) entre les modules,

$$\operatorname{sn}\left(\frac{\omega_0}{1+k}, k\right) = x = \frac{1}{k_0\sqrt{k}}\,\frac{1+\sqrt{1-k_0^2\operatorname{sn}^2(\omega_0, k_0)}}{\operatorname{sn}(\omega_0, k_0)},$$

c'est-à-dire définitivement :

$$\operatorname{sn}\left(\frac{\omega_0}{1+k}, k\right) = \frac{1}{1+k_0}\,\frac{1 \pm \operatorname{dn}(\omega_0, k_0)}{\operatorname{sn}(\omega_0, k_0)}. \tag{13}$$

Ces deux formules équivalentes (11) et (13) sont les formules classiques de la transformation de Landen.

Partant dès lors de ce résultat relatif à la fonction elliptique de première espèce, et utilisant les mêmes éléments qui nous l'ont procuré, la définition de la fonction de troisième espèce $\Pi(\omega_0, h_0, k_0)$ nous donnera maintenant, en ayant égard de nouveau aux définitions (1), (7) et (8), ainsi qu'à la relation différentielle (9),

$$\left.\begin{aligned}
\Pi(\omega_0, h_0, k_0) &= \int_0^{\omega_0} \frac{k_0^2\operatorname{sn}(h_0, k_0)\operatorname{cn}(h_0, k_0)\operatorname{dn}(h_0, k_0)}{1-k_0^2\operatorname{sn}^2(h_0, k_0)\operatorname{sn}^2(\omega_0, k_0)}\operatorname{sn}^2(\omega_0, k_0)\,d\omega_0 \\
&= \int_0^{y} \frac{k_0^2\operatorname{sn}(h_0, k_0)\operatorname{cn}(h_0, k_0)\operatorname{dn}(h_0, k_0)}{1-k_0^2\operatorname{sn}^2(h_0, k_0).y^2}\,y^2\,\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k_0^2y^2)}} \\
&= \int_0^{x} \frac{\frac{4k}{(1+k)^2}\operatorname{sn}(h_0, k_0)\operatorname{cn}(h_0, k_0)\operatorname{dn}(h_0, k_0)}{1-\frac{4k}{(1+k)^2}\operatorname{sn}^2(h_0, k_0).\frac{(1+k)^2x^2}{(1+kx^2)^2}}\,\frac{(1+k)^2x^2}{(1+kx^2)^2}\,\frac{(1+k)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\
&= \int_0^{x} \frac{4k(1+k)\operatorname{sn}(h_0, k_0)\operatorname{cn}(h_0, k_0)\operatorname{dn}(h_0, k_0)}{(1+kx^2)^2-4k\operatorname{sn}^2(h_0, k_0).x^2}\,\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\
&= \int_0^{x} \frac{4k(1+k)\operatorname{sn}(h_0, k_0)\operatorname{cn}(h_0, k_0)\operatorname{dn}(h_0, k_0)}{k^2(x^2-\alpha)(x^2-\beta)}\,\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\
&= \Pi_0\int_0^{x} \frac{x^2}{(x^2-\alpha)(x^2-\beta)}\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

le symbole H_0 tenant lieu, pour abréger, du coefficient

$$(15) \qquad H_0 = 4\frac{1+k}{k}\,\mathrm{sn}\,(h_0, k_0)\,\mathrm{cn}\,(h_0, k_0)\,\mathrm{dn}\,(h_0, k_0),$$

et de même α et β représentant les deux racines de l'équation du second degré en x^2

$$\begin{aligned} 0 &= (1 + kx^2)^2 - 4k\,\mathrm{sn}^2\, h_0, k_0) \,.\, x^2 \\ &= (1 + 2kx^2 + k^2x^4) - 4k\,\mathrm{sn}^2\,(h_0, k_0) \,.\, x^2 \\ &= (k^2x^4 + 2k\,[1 - 2\,\mathrm{sn}^2\,(h_0, k_0)] \,.\, x^2 + 1, \end{aligned}$$

équation ayant pour discriminant

$$\begin{aligned} \Delta = k^2\,[1 - 2\,\mathrm{sn}^2\,(h_0, k_0)]^2 - k^2 &= k^2\,[1 - 4\,\mathrm{sn}^2\,(h_0, k_0) + 4\,\mathrm{sn}^4\,(h_0, k_0)] - k^2 \\ = -4k^2\,\mathrm{sn}^2\,(h_0, k_0)\,[1 - \mathrm{sn}^2\,(h_0, k_0)] &= -4k^2\,\mathrm{sn}^2\,(h_0, k_0)\,\mathrm{cn}^2\,(h_0, k_0), \end{aligned}$$

et dont les valeurs des racines peuvent par conséquent être écrites :

$$(16) \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{k^2}[-k\,\{\,\mathrm{cn}^2(h_0, k_0) - \mathrm{sn}^2(h_0, k_0)\,\} - 2ik\,\mathrm{sn}\,(h_0, k_0)\,\mathrm{cn}\,(h_0, k_0)] \\ &= \frac{-1}{k}\,[\mathrm{cn}^2\,(h_0, k_0) - \mathrm{sn}^2\,(h_0, k_0) + 2\,i\,\mathrm{sn}\,(h_0, k_0)\,\mathrm{cn}\,(h_0, k_0)] \\ &= \frac{-1}{k}\,[\mathrm{cn}\,(h_0, k_0) + i\,\mathrm{sn}\,(h_0, k_0)]^2, \\ \beta &= \frac{-1}{k}\,[\mathrm{cn}\,(h_0, k_0) - i\,\mathrm{sn}\,(h_0, k_0)]^2. \end{aligned} \right.$$

Or, ayant identiquement

$$\frac{x^2}{(x^2 - \alpha)(x^2 - \beta)} = \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\frac{\alpha}{x^2 - \alpha} - \frac{\beta}{x^2 - \beta}\right),$$

l'expression précédente (14) de $\Pi\,(\omega_0, h_0, k_0)$ pourra donc s'écrire

$$\Pi(\omega_0, h_0, k_0) = H_0 \int_0^x \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha}{x^2-\alpha} - \frac{\beta}{x^2-\beta}\right)\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k x^2)}}$$

$$= \frac{-H_0}{\alpha-\beta}\int_0^x \left(\frac{\alpha - x^2 + x^2}{\alpha - x^2} - \frac{\beta - x^2 + x^2}{\beta - x^2}\right)\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$= \frac{-H_0}{\alpha-\beta}\int_0^x \left(\frac{x^2}{\alpha - x^2} - \frac{x^2}{\beta - x^2}\right)\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$= \frac{-H_0}{\alpha-\beta}\left[\int_0^x \frac{x^2dx}{(\alpha-x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} - \int_0^x \frac{x^2dx}{(\beta-x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\right]$$

$$= \frac{-H_0}{\alpha-\beta}\left[\frac{1}{\alpha}\int_0^x \frac{x^2dx}{\left(1-\frac{x^2}{\alpha}\right)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} - \frac{1}{\beta}\int_0^x \frac{x^2dx}{\left(1-\frac{x^2}{\beta}\right)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\right];$$

d'où il suit qu'il suffira alors de poser

$$\frac{1}{\alpha} = k^2 \operatorname{sn}^2(h_1, k), \qquad \frac{1}{\beta} = k^2 \operatorname{sn}^2(h_2, k),$$

c'est-à-dire, en ayant égard aux valeurs ci-dessus (16) de α et β,

$$(17) \qquad \operatorname{sn}^2(h_1, k) = \frac{1}{k^2\alpha}, \qquad \operatorname{sn}^2(h_2, k) = \frac{1}{k^2\beta},$$

pour que la même expression de $\Pi(\omega_0, h_0, k_0)$ puisse être écrite, en multipliant et divisant chacune des deux intégrales du dernier membre des égalités précédentes par le facteur qui entre dans la définition de la fonction Π correspondante, et tenant compte en outre de l'interprétation (10) de la variable x,

$$\Pi(\omega_0, h_0, k_0) = \frac{-H_0}{\alpha-\beta}\left[\frac{1}{\alpha . k^2 \operatorname{sn}(h_1,k)\operatorname{cn}(h_1,k)\operatorname{dn}(h_1,k)}\Pi\left(\frac{\omega_0}{1+k}, h_1, k\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{\beta . k^2 \operatorname{sn}(h_2,k)\operatorname{cn}(h_2,k)\operatorname{dn}(h_2,k)}\Pi\left(\frac{\omega_0}{1+k}, h_2, k\right)\right],$$

c'est-à-dire se réduise en définitive à la formule très simple et très symétrique

$$(18)\qquad \Pi(\omega_0, h_0, k_0) = H_1 \Pi\left(\frac{\omega_0}{1+k}, h_1, k\right) + H_2 \Pi\left(\frac{\omega_0}{1+k}, h_2, k\right),$$

les deux coefficients H_1 et H_2 étant, eu égard aux définitions (17) des paramètres h_1 et h_2, les expressions

$$(19)\qquad H_1 = \frac{-H_0}{\alpha - \beta} \frac{\operatorname{sn}(h_1, k)}{\operatorname{cn}(h_1, k)\operatorname{dn}(h_1, k)}, \qquad H_2 = \frac{-H_0}{\beta - \alpha} \frac{\operatorname{sn}(h_2, k)}{\operatorname{cn}(h_2, k)\operatorname{dn}(h_2, k)}$$

formules dans lesquelles il reste seulement à calculer les valeurs des paramètres h_1 et h_2 et des coefficients H_1 et H_2.

Pour cela, quant à la première de ces quantités, la première définition (17) donnera, conjointement avec la valeur (16) de la racine α,

$$\operatorname{sn}^2(h_1, k) = \frac{1}{k^2}\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{k^2}\frac{-k}{[\operatorname{cn}(h_0, k_0) + i \operatorname{sn}(h_0, k_0)]^2},$$

ou, en simplifiant, puis extrayant la racine carrée

$$(20)\qquad \begin{cases} \operatorname{sn}(h_1, k) = \dfrac{1}{\sqrt{k}} \dfrac{i}{\operatorname{cn}(h_0, k_0) + i\operatorname{sn}(h_0, k_0)} = \dfrac{1}{\sqrt{k}} \dfrac{i[\operatorname{cn}(h_0, k_0) - i \operatorname{sn}(h_0, k_0)]}{\operatorname{cn}^2(h_0, k_0) + \operatorname{sn}^2(h_0, k_0)} \\ \qquad = \dfrac{1}{\sqrt{k}}[\operatorname{sn}(h_0, k_0) + i \operatorname{cn}(h_0, k_0)], \end{cases}$$

et du moment que les expressions (16) des deux racines α et β ne diffèrent que par le signe de l'imaginaire i, la seconde définition (17) conduira de même à la valeur :

$$(20^{\text{bis}})\qquad \operatorname{sn}(h_2, k) = \frac{1}{\sqrt{k}}[\operatorname{sn}(h_0, k_0) - i \operatorname{cn}(h_0, k_0)].$$

Puis semblablement, quant aux coefficients H_1 et H_2, la définition (15) du précédent H_0 donnant, conjointement encore avec les valeurs (16) des racines α et β,

$$\frac{-H_0}{\alpha-\beta}=\frac{-4\frac{1+k}{k}\operatorname{sn}(h_0,k_0)\operatorname{cn}(h_0,k_0)\operatorname{dn}(h_0,k_0)}{\frac{-1}{k}[-4i\operatorname{sn}(h_0,k_0)\operatorname{cn}(h_0,k_0)]}=(1+k).\,i\operatorname{dn}(h_0,k_0),$$

ces coefficients H_1 et H_2 (19) se présenteront donc tout d'abord sous la forme des deux expressions

21) $$H_1=i\operatorname{dn}(h_0,k_0)\frac{(1+k)\operatorname{sn}(h_1,k)}{\operatorname{cn}(h_1,k)\operatorname{dn}(h_1,k)},\qquad H_2=-i\operatorname{dn}(h_0,k_0)\frac{(1+k)\operatorname{sn}(h_2,k)}{\operatorname{cn}(h_2,k)\operatorname{dn}(h_2,k)},$$

qui seront imaginaires conjuguées dans les circonstances où les valeurs de h_1 et h_2 définies par les équations (20) et (20bis) le seront elles-mêmes.

Mais ces premières formules dissimulent leurs valeurs réelles, parce qu'elles contiennent à la fois des fonctions elliptiques, au module k_0 d'une part, et au module k de l'autre, et que ces valeurs réelles ne sauraient apparaître clairement que si les diverses fonctions elliptiques qui entrent dans les dites expressions étaient toutes ramenées au même module.

Pour réaliser cette dernière transformation, déduisant successivement de l'expression (20) qui définit le paramètre h_1, en omettant dans l'algorithme des diverses fonctions elliptiques qui interviendront dans le dit calcul l'indication du module qui sera toujours k_0 pour h_0 et k pour h_1,

$$\left\{\begin{array}{ll}\operatorname{sn}h_1=\frac{1}{\sqrt{k}}(\operatorname{sn}h_0-i\operatorname{cn}h_0), & i\operatorname{cn}h_0=\operatorname{sn}h_0-\sqrt{k}\operatorname{sn}h_1,\\ -(1-\operatorname{sn}^2h_0)=(\operatorname{sn}h_0-\sqrt{k}\operatorname{sn}h_1)^2=\operatorname{sn}^2h_0-2\sqrt{k}\operatorname{sn}h_1\operatorname{sn}h_0+k\operatorname{sn}^2h_1, & \\ 2\sqrt{k}\operatorname{sn}h_1.\operatorname{sn}h_0=1+k\operatorname{sn}^2h_1, & \operatorname{sn}h_0=\frac{1+k\operatorname{sn}^2h_1}{2\sqrt{k}\operatorname{sn}h_1},\end{array}\right.$$

puis de là, en ayant égard à la première relation (1) admise entre les modules,

$$\left\{\begin{aligned}
\mathrm{dn}^2(h_0, k_0) &= 1 - k_0^2 \,\mathrm{sn}^2 h_0 = 1 - \frac{4k}{(1+k)^2}\frac{(1+k\,\mathrm{sn}^2 h_1)^2}{4k\,\mathrm{sn}^2 h_1}\\
&= \frac{1}{(1+k)^2\,\mathrm{sn}^2 h_1}[(1+k)^2\,\mathrm{sn}^2 h_1 - (1+k\,\mathrm{sn}^2 h_1)^2]\\
&= \frac{1}{(1+k)^2\,\mathrm{sn}^2 h_1}[(1+2k+k^2)\mathrm{sn}^2 h_1 - (1+2k\,\mathrm{sn}^2 h_1 + k^2\,\mathrm{sn}^4 h_1)]\\
&= \frac{1}{(1+k)^2\,\mathrm{sn}^2 h_1}[(\mathrm{sn}^2 h_1 - 1) + k^2\,\mathrm{sn}^2 h_1(1-\mathrm{sn}^2 h_1)]\\
&= \frac{-(1-\mathrm{sn}^2 h_1)(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 h_1)}{(1+k)^2\,\mathrm{sn}^2 h_1} = \frac{-\mathrm{cn}^2 h_1\,\mathrm{dn}^2 h_1}{(1+k)^2\,\mathrm{sn}^2 h_1},\\
\mathrm{dn}(h_0, k_0) &= \frac{i\,\mathrm{cn}(h_1, k)\,\mathrm{dn}(h_1, k)}{(1+k)\,\mathrm{sn}(h_1, k)},
\end{aligned}\right.$$

la valeur ci-dessus (21), trouvée de prime abord pour le coefficient H_1 se réduira donc simplement à

$$H_1 = 1 = H_2$$

du moment que les deux expressions (21) de ces coefficients se déduisent l'une de l'autre par le changement de i en $-i$.

La formule de transformation (18) obtenue tout à l'heure est donc simplement

$$\Pi(\omega_0, h_0, k_0) = \Pi\left(\frac{\omega_0}{1+k}, h_1, k\right) + \Pi\left(\frac{\omega_0}{1+k}, h_2, k\right),$$

les deux nouveaux paramètres h_1 et h_2, définis (aux multiples des périodes près) par les équations (20) et (20bis), satisfaisant dès lors, de par ces définitions mêmes, manifestement à la condition

$$\mathrm{sn}(h_1, k)\,\mathrm{sn}(h_2, k) = \frac{1}{k},$$

laquelle peut être considérée, dans la question, comme équivalente à la relation $h_2 - h_1 = iK'$, du moment que la valeur de la fonction $\Pi(\omega, h, k)$ en général n'est pas altérée par l'addition

au paramètre h d'un multiple quelconque des périodes $2K$ ou $2iK'$, comme l'indiquent les formules (2) de la Note I ci-dessus.

Ainsi se trouve démontré complètement l'énoncé du Théorème I formulé au début de la présente Note.

Avant de démontrer également un second Théorème analogue, il nous reste à déduire de celui-ci, en quelques lignes, le résultat (ou autre formule) que nous invoquons dans notre Chapitre III (pp. 99-101) pour une conclusion importante.

Pour cela, la formule (3) de ce Théorème pouvant être écrite, en tenant compte de la relation (6) entre les paramètres h_1 et h_2,

$$\Pi(\omega_0, h_0, k_0) = \Pi\left(\frac{\omega_0}{1+k}, h_1, k\right) + \Pi\left(\frac{\omega_0}{1+k}, h_1 + iK', k\right),$$

si nous appliquons alors à la seconde fonction Π du second membre la troisième formule (12) de la Note II précédente, cette même formule deviendra, en y faisant pour faciliter l'écriture, $\frac{\omega_0}{1+k} = \varphi$, et sous-entendant le module k dans l'algorithme de toutes les fonctions elliptiques de première espèce que nous allons écrire,

$$\Pi(\omega_0, h_0, k_0) = \Pi(\varphi, h_1, k) + \left[\Pi(\varphi, h_1, k) + \frac{\operatorname{cn} h_1 \operatorname{dn} h_1}{\operatorname{sn} h_1}\varphi + \frac{1}{4}\log\frac{\operatorname{sn}^2(\varphi - h_1)}{\operatorname{sn}^2(\varphi + h_1)}\right],$$

c'est-à-dire simplement ;

$$(21^{\text{bis}}) \qquad \Pi(\omega_0, h_0, k_0) = 2\Pi(\varphi, h_1, k) + \frac{\operatorname{cn} h_1 \operatorname{dn} h_1}{\operatorname{sn} h_1}\varphi + \frac{1}{4}\log\frac{\operatorname{sn}^2(\varphi - h_1)}{\operatorname{sn}^2(\varphi + h_1)}.$$

C'est le résultat que nous invoquons au cours de notre Chapitre III, et qui nous sera utile encore pour le calcul intéressant que nous développons dans la Note V subséquente.

Nous avons fait connaitre, dans une Note présentée à l'*Académie des Sciences* [Comptes Rendus, 13 Mai 1895, formule (3)] les quatre formules suivantes

$$(22)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \Pi(x,h,k')=\Pi(ix,ih+K+iK',k), & \Pi\left(x,h,\frac{1}{k'}\right)=\Pi\left(\frac{ix}{k'},\frac{ih}{k'}+K+iK',k\right), \\ \Pi\left(x,h,\frac{ik'}{k}\right)=\Pi\left(\frac{ix}{k},\frac{ih}{k}+K,k\right), & \Pi\left(x,h,\frac{ik}{k'}\right)=\Pi\left(\frac{x}{k'},\frac{h}{k'}+K,k\right), \end{array} \right.$$

dont le caractère analytique propre est, comme on le voit, de transformer, par le moyen d'un changement linéaire du paramètre, la fonction de troisième espèce considérée en une autre fonction de troisième espèce de module différent.

Si maintenant nous appliquons à chacune des fonctions de troisième espèce résultant de cette première transformation, c'est-à-dire aux seconds membres des formules que nous venons d'écrire, la transformation de Landen spécifiée par le Théorème I ci-dessus, il est clair que nous obtiendrons ainsi quatre nouvelles formules, au moyen desquelles les diverses fonctions de troisième espèce qui forment les premiers membres des mêmes égalités précédentes se trouveront exprimées de nouveau par la somme de deux fonctions de troisième espèce, dont il sera facile d'exprimer à chaque fois, en tenant compte du Théorème précité, les module, paramètre, et argument en fonction des module, paramètre, et argument primitifs.

Pour fournir une démonstration complète des quatre nouvelles formules de transformation qui résulteraient de ces diverses opérations, il faudrait donc commencer par développer celle des quatre formules précédentes (22) qui devrait en constituer le point de départ. Étant contraint de nous limiter, nous ne pouvons songer à introduire ici un semblable calcul, et il nous faut dès lors nous borner à envisager la première seule, parce que nous en avons déjà fourni la démonstration rigoureuse demandée dans la Note I ci-dessus [formule (1), pp. 1-3].

Dans cette pensée, en vue de faciliter autant que possible l'application du Théorème I ci-dessus à la formule en question, nous commencerons par la reproduire ici, en y écrivant ω_0, h_0, et

k_0 à la place de x, h, et k', et par conséquent K_0 et K'_0 à la place, respectivement, de K' et K. Si de plus nous convenons de faire alors, pour abréger les écritures,

$$(23) \qquad h'_0 = ih_0 + K'_0 + iK_0,$$

il est clair que la dite formule (22) se présentera sous la forme simplifiée

$$(24) \qquad \Pi(\omega_0, h_0, k_0) = \Pi(i\omega_0, ih_0 + K'_0 + iK_0, k'_0) = \Pi(i\omega_0, h'_0, k'_0);$$

et alors, pour appliquer, ainsi que nous l'avons dit, à cette dernière fonction $\Pi(i\omega_0, h'_0, k'_0)$ les formules du Théorème I précité, il suffira de changer partout dans les dites formules ω_0 en $i\omega_0$, h_0 en h'_0, et k_0 en k'_0 : c'est-à-dire que la formule (3) de ce Théorème deviendra dans le cas actuel

$$(25) \qquad \Pi(i\omega_0, h'_0, k'_0) = \Pi\left(\frac{i\omega_0}{1+k}, h_1, k\right) + \Pi\left(\frac{i\omega_0}{1+k}, h_2, k\right),$$

le nouveau module k étant cette fois, en vertu de la relation de droite (1) entre les modules,

$$(26) \qquad k = \frac{(1+k_0)^2}{k_0'^2} = \frac{(1+k_0)^2}{1-k_0^2} = \frac{(1+k_0)^2}{(1+k_0)(1-k_0)} = \frac{1+k_0}{1-k_0},$$

puis les nouveaux paramètres h_1 et h_2 étant de même définis, en vertu des formules (4), par les deux équations

$$(27) \quad \begin{cases} \operatorname{sn}(h_1, k) = \dfrac{k'_0}{1+k_0}\,[\operatorname{sn}(h'_0, k'_0) + i\operatorname{cn}(h'_0, k'_0)], \\[2ex] \operatorname{sn}(h_2, k) = \dfrac{k'_0}{1+k_0}\,[\operatorname{sn}(h'_0, k'_0) - i\operatorname{cn}(h'_0, k'_0)], \end{cases}$$

et enfin l'on aura cette fois, en vertu de la formule de droite (2), entre le sinus amplitude des arguments des nouvelles fonctions de troisième espèce au module k, et celui de la fonction provisoirement envisagée au module k_0', la relation :

$$(28) \qquad \operatorname{sn}\left(\frac{i\omega_0}{1+k}, k\right) = \frac{1}{1+k_0} \frac{1 \pm \operatorname{dn}(i\omega_0, k_0')}{\operatorname{sn}(i\omega_0, k_0')}.$$

Mais le troisième membre des égalités (24), que nous venons de prendre pour point de départ de ce dernier calcul, n'est en réalité qu'un résultat intermédiaire, envisagé seulement pour la facilité des transformations que nous avions à accomplir. Il nous reste donc à introduire à présent dans les expressions actuelles (27) et (28) de $\operatorname{sn}(h_1, k)$, $\operatorname{sn}(h_2, k)$ et $\operatorname{sn}\left(\frac{i\omega_0}{1+k}, k\right)$, à la place de

$$\operatorname{sn}(h_0', k_0'), \qquad \operatorname{cn}(h_0', k_0'); \qquad \operatorname{sn}(i\omega_0, k_0'), \qquad \operatorname{dn}(i\omega_0, k_0'),$$

leurs valeurs en fonction des éléments ω_0, h_0, et k_0 de la fonction Π réellement proposée, c'est-à-dire, par le fait, en fonction de

$$\operatorname{sn}(h_0,k_0),\ \operatorname{cn}(h_0,k_0),\ \operatorname{dn}(h_0,k_0); \quad \operatorname{sn}(\omega_0,k_0),\ \operatorname{cn}(\omega_0,k_0),\ \operatorname{dn}(h_0,k_0).$$

Quant au dernier de ces calculs qui est le plus simple, tout d'abord, l'expression en question (28) deviendra presque immédiatement, en ayant égard aux formules connues de la transformation *par modules complémentaires :*

$$(29) \quad \operatorname{sn}\left(\frac{i\omega_0}{1+k}, k\right) = \frac{1}{1+k_0} \frac{1 \pm \dfrac{\operatorname{dn}(\omega_0, k_0)}{\operatorname{cn}(\omega_0, k_0)}}{\dfrac{i \operatorname{sn}(\omega_0, k_0)}{\operatorname{cn}(\omega_0, k_0)}} = \frac{\operatorname{cn}(\omega_0, k_0) \pm \operatorname{dn}(\omega_0, k_0)}{i(1+k_0)\operatorname{sn}(\omega_0, k_0)}.$$

Semblablement, quant à l'expression (27) de $\operatorname{sn}(h_1, k)$, les valeurs de $\operatorname{sn}(h_0', k_0')$ et $\operatorname{cn}(h_0', k_0')$ qui y figurent devenant respectivement, en ayant égard à la définition (23) du paramètre h_0', puis appliquant les formules classiques de la Théorie des fonctions elliptiques



$$\left\{\begin{aligned}
\operatorname{sn}(h_0', k_0') &= \operatorname{sn}[ih_0 + (K_0' + iK_0), k_0'] = \frac{\operatorname{dn}(ih_0, k_0')}{k_0' \operatorname{cn}(ih_0, k_0')} \\
&= \frac{\dfrac{\operatorname{dn}(h_0, k_0)}{\operatorname{cn}(h_0, k_0)}}{k_0' \dfrac{1}{\operatorname{cn}(h_0, k_0)}} = \frac{1}{k_0'} \operatorname{dn}(h_0, k_0), \\
\operatorname{cn}(h_0', k_0') &= \operatorname{cn}[ih_0 + (K_0' + iK_0), k_0'] = \frac{-ik_0}{k_0' \operatorname{cn}(ih_0, k_0')} \\
&= \frac{-ik_0}{k_0' \dfrac{1}{\operatorname{cn}(h_0, k_0)}} = -\frac{ik_0}{k_0'} \operatorname{cn}(h_0, k_0),
\end{aligned}\right.$$

l'expression en question (27) de $\operatorname{sn}(h_1, k)$ sera donc, par ces valeurs,

$$\operatorname{sn}(h_1, k) = \frac{k_0'}{1 + k_0}\left[\frac{1}{k_0'} \operatorname{dn}(h_0, k_0) + i\left(-\frac{ik_0}{k_0'}\right) \operatorname{cn}(h_0, k_0)\right],$$

et dès lors, après réduction, l'on obtiendra, pour définir les deux nouveaux paramètres h_1 et h_2 du cas actuel, les deux formules

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned}
\operatorname{sn}(h_1, k) &= \frac{1}{1+k_0}[\operatorname{dn}(h_0, k_0) + k_0 \operatorname{cn}(h_0, k_0)], \\
\operatorname{sn}(h_2, k) &= \frac{1}{1+k_0}[\operatorname{dn}(h_0, k_0) - k_0 \operatorname{cn}(h_0, k_0)],
\end{aligned}\right.$$

du moment que les deux expressions en question (27) ne diffèrent que par le signe du second terme à l'intérieur des crochets.

D'ailleurs, ces mêmes expressions (30) donnant encore, étant multipliées entre elles, et en ayant égard à la première valeur (26) du module k,

$$(31)\qquad \operatorname{sn}(h_1, k) \operatorname{sn}(h_2, k) = \frac{k_0'^2}{(1 + k_0)^2} = \frac{1}{k},$$

ces deux paramètres h_1 et h_2 satisferont donc de nouveau à la condition

$$h_2 - h_1 = iK'.$$

En rappelant alors la démonstration de la formule (1) de la Note I ci-dessus, qui reproduit la première des formules (22) de la présente, et rapprochant les divers résultats (24), (25), (26), (29), et (30) de celle-ci, on voit donc que nous avons établi rigoureusement ainsi le second Théorème suivant :

THÉORÈME II. — « *Si l'on applique à la fonction* $\Pi(\omega_0, h_0, k_0)$ » *la transformation caractérisée par les relations inverses entre* » *les modules*

$$(32) \qquad k_0 = \frac{k-1}{k+1} \qquad \text{ou} \qquad k = \frac{1+k_0}{1-k_0},$$

» *laquelle est déduite de celle de* LANDEN *par le simple changement* » *de l'ancien module* k_0 *en son complémentaire* k_0', *ladite fonc-* » *tion* Π *se changera dans la somme des deux suivantes*

$$(33) \qquad \Pi(\omega_0, h_0, k_0) = \Pi\left(\frac{i\omega_0}{1+k}, h_1, k\right) + \Pi\left(\frac{i\omega_0}{1+k}, h_2, k\right),$$

» *dans laquelle les sinus amplitude du nouvel argument et des* » *nouveaux paramètres auront respectivement pour expressions*

$$(34) \qquad \operatorname{sn}\left(\frac{i\omega_0}{1+k}, k\right) = \frac{\operatorname{cn}(\omega_0, k_0) \pm \operatorname{dn}(\omega_0, k_0)}{i(1+k_0)\operatorname{sn}(\omega_0, k_0)},$$

$$(35) \quad \begin{cases} \operatorname{sn}(h_1, k) = \dfrac{1}{1+k_0}\left[\operatorname{dn}(h_0, k_0) + k_0 \operatorname{cn}(h_0, k_0)\right], \\[2ex] \operatorname{sn}(h_2, k) = \dfrac{1}{1+k_0}\left[\operatorname{dn}(h_0, k_0) - k_0 \operatorname{cn}(h_0, k_0)\right], \end{cases}$$

» *les deux paramètres* h_1 *et* h_2 *ainsi définis satisfaisant de nouveau* » *aux conditions :* »

$$(36) \quad \operatorname{sn}(h_1, k)\operatorname{sn}(h_2, k) = \frac{1}{k}, \qquad \text{ou} \qquad h_2 - h_1 = iK'.$$

D'ailleurs, la formule (33) de ce second Théorème ayant exactement la même forme que la formule correspondante du Théorème I, il est bien clair qu'elle pourra être mise comme celle-là sous la même forme (21bis), les quantités h_1 et k étant seulement celles relatives à ce second Théorème.

Cette seconde transformation offre sur la première l'avantage que lorsque les éléments donnés ω_0 et h_0 sont réels et le module k_0 supposé canonique, les nouveaux paramètres h_1 et h_2 sont tous les deux réels, d'après les valeurs (35), (au lieu d'imaginaires conjugués dans le cas précédent), l'expression du sinus amplitude du nouvel argument (34) étant seule purement imaginaire, comme il était nécessaire *à priori*.

Ce seul exemple suffit à montrer comment les trois autres formules (22) étant combinées avec celle du Théorème I, fourniront chacune, à l'aide de procédés tout semblables, une formule de transformation différente de la fonction $\Pi(\omega_0, h_0, k_0)$ analogue aux deux formules démontrées ci-dessus (3) et (33).

FIN DE LA SECONDE PARTIE

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

COMMUNICATIONS DIVERSES

CONFÉRENCES

